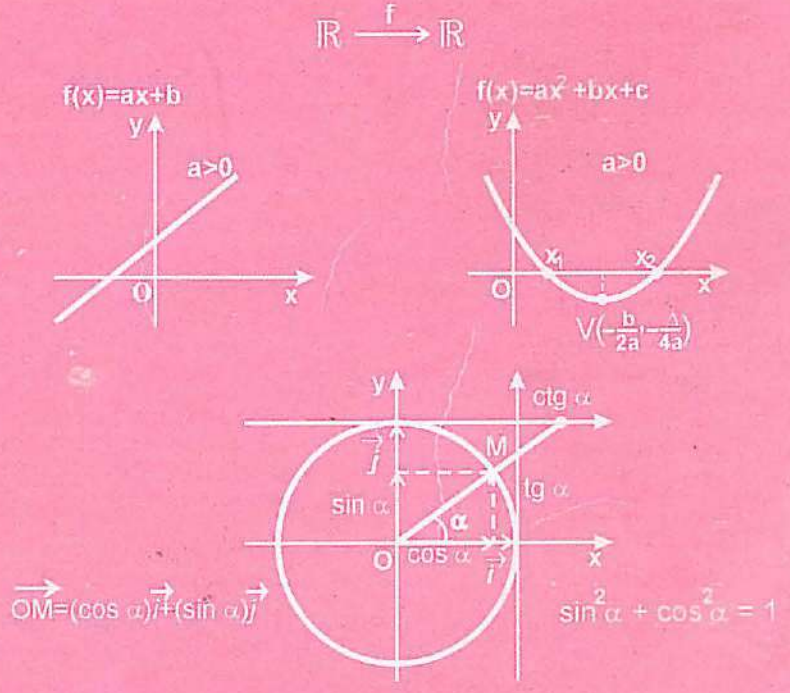
Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului

MIRCEA GANGA

MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA a IX-a

TRUNCHI COMUN + CURRICULUM DIFERENȚIAT



EDITURA MATHPRESS

2008

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului

MIRCEA GANGA

MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA a IX-a

TRUNCHI COMUN + CURRICULUM DIFERENȚIAT

EDITURA MATHPRESS

ALGEBRA ÎN NUME ŞI DESCOPERIRI

În tabelul de mai jos figurează autori ai unor rezultate care au contribuit la dezvoltarea algebrei pe care o studiaţi în acest manual.

Perioada	Nume	Rezultate importante
sec III înainte de Hristos	Arhimede	Axioma lui Arhimede Pentru $a, b \in \mathbb{N}$, $a > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $an > b$
sec III î.H.	Diofant	Autor al celebrei lucrări „Aritmetica". Rezolvări de ecuaţii în numere raţionale (**ecuaţii diofantice**)
Era nouă, după Hristos		
sec VIII A.D.	Al-Horezmi ($\sim$ 780-$\simeq$850)	Contribuie la dezvoltarea aritmeticii şi algebrei. A introdus operaţiile cu numere negative şi zero.
sec XVI A.D.	Viète (1540-1603)	Relaţiile lui Viète $ax^2 + bx + c = 0$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.
sec XVIII-XIX A.D.	Horner (1768-1837)	Are rezultate în domeniul rezolvării ecuaţiilor algebrice. **Schema lui Horner** de determinare a câtului şi restului la împărţirea unui polinom prin $X - a$.
sec XIX A.D.	Peano (1858-1932)	A realizat sistematizarea numerelor naturale
sec XIX - XX A.D.	Weierstrass (1815-1897) Dedekind (1831-1916) Cantor (1845-1918)	Autori cu remarcabile contribuţii la dezvoltarea conceptelor de număr real şi de mulţime.
sec XIX- XX A.D.	Russel (1872-1970) Zermello (1871-1953) Frankel (1891-1965) J.von Newmann (1903-1957)	Au contribuit la fundamentarea axiomatică a teoriei mulţimilor
sec XX A.D.	Şcoala lui Bourbaki	Realizează sistematizarea matematicii având la bază teoria mulţimilor.

1. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI TEORIA MULŢIMILOR

1.1. NOŢIUNEA DE MULŢIME

Lucrurile cele mai simple se descoperă după îndelungi reflecţii, iar istoria matematică este plină de astfel de întâmplări. Astfel, păsările, de obicei, zboară în stoluri, oamenii în societate trăiesc şi îşi desfăşoară activitatea, formând ceea ce numim generic **mulţimi** (de păsări, de oameni).

Matematicienii ultimelor secole au descoperit un fapt important şi anume că edificiul matematicii are la bază noţiunile de **mulţime** şi de **relaţie** între elementele diferitelor mulţimi. Aceste două noţiuni facilitează accesul la matematică şi permit o bună înţelegere a structurilor sale profunde. Noţiunea de mulţime apare în lucrările matematicianului german Georg Cantor (1845-1918).

Noţiunea de mulţime este o noţiune **primară**, fundamentală, care nu se defineşte. Totuşi, adăugăm următoarele două precizări, care dau termenului de mulţime o semnificaţie diferită de cea din limbajul curent.

1) O colecţie de obiecte este o **mulţime** dacă se poate spune cu certitudine dacă un anumit obiect aparţine sau nu colecţiei.

2) Un acelaşi element nu poate figura mai mult de o dată în mulţime.

Exemple. 1) Mulţimea literelor alfabetului.

2) Mulţimea judeţelor din România.

3) Mulţimea paginilor unei cărţi.

4) Mulţimea elevilor unei clase.

5) Mulţimea claselor unui liceu.

6) Mulţimea triunghiurilor isoscele.

7) Mulţimea punctelor unei drepte.

8) Mulţimea literelor alfabetului figurând în cuvântul „Mississipi" este formată din elementele m, i, s, p, în virtutea convenţiei că un acelaşi element nu se poate repeta într-o mulţime.

Criteriul care defineşte o mulţime trebuie să fie obiectiv, în sensul că punând întrebarea „acel obiect aparţine mulţimii?", răspunsul să poată fi dat fără ambiguitate. Aşa de exemplu, colecţia formată din cele mai bune trei picturi ale lui Grigorescu nu este o mulţime – căci nu putem decide obiectiv care sunt cele mai bune tablouri ale unui pictor.

Nu este posibil de a clasifica definitiv un obiect ca fiind al unei mulţimi, căci cei doi termeni sunt relativi. Astfel, o mulţime poate fi considerată ca element al altei mulţimi. De exemplu, în mulţimea claselor unui liceu, o clasă este un element, iar pe de altă parte, fiecare clasă este o mulţime de elevi.

O mulţime este formată dintr-un număr finit sau infinit de elemente.

Definiţie. O mulţime se numeşte **finită** dacă are un număr finit de elemente.

O mulţime se numeşte **infinită** dacă nu este finită.

Exemple. 1)–5), 8) conţin exemple de mulţimi finite, iar mulţimile din 6), 7) sunt infinite.

Determinarea unei mulţimi. Notaţii

Prezentăm mai jos câteva reguli unanim acceptate în cărţile de matematică şi pe care este bine să le urmăm:

1) Cel mai adesea o mulţime de notează cu o literă mare: $A, B, \ldots, X, \ldots$.

2) În chestiuni teoretice, unde elementele mulţimii nu sunt precizate, vom reprezenta aceste elemente prin litere mici: $a, b, \ldots, x, \ldots$.

3) Cuvântul *mulţime* este simbolizat prin două acolade care încadrează elementele mulţimii considerate, separate unele de altele prin virgulă. Câteodată, în caz de ambiguitate, de exemplu când elementele sunt numere zecimale, se separă elementele prin punct şi virgulă.

Exemple. 1) Dacă mulţimea A este formată din trei elemente prezentate prin literele x, y, z, atunci vom scrie: $A = \{x, y, z\}$.

2) Dacă mulţimea X este formată din numerele zecimale 1,2 şi 2,3, atunci vom scrie $X = \{1,2; 2,3\}$.

3) Dacă mulţimea este infinită, nu se pot scrie toate numerele; se enumeră, câteva dintre ele, suficiente pentru a recunoaşte despre ce mulţime este vorba, apoi se pun puncte de suspensie.

Exemplu. Mulţimea B a multiplilor lui 4 poate fi reprezentată prin

$B = \{0, 4, 8, 12, 16, \ldots\}$.

La fel vom proceda în cazul unei mulţimi care conţine un mare număr de elemente

$C = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 98, 100\}$.

4) Fiind dat un element a al unei mulţimi A, nu sunt decât două posibilităţi: a este element din mulţimea A sau a nu este element al lui A.

Pentru a exprima faptul că elementul a se află în mulţimea A, vom nota: $a \in A$ şi citim: „a aparţine lui A".

Faptul că elementul a nu este în mulţimea A, îl notăm prin: $a \notin A$ şi citim: „a nu aparţine lui A".

Semnul $\in$ se numeşte **apartenenţă**, fiind introdus în 1886 de matematicianul italian Giuseppe Peano (1858-1932).

Observaţie. Uneori notăm $A \ni a$ şi citim: „A conţine elementul a" şi negativ, $A \not\ni a$, adică „A nu conţine elementul a".

Există două modalităţi de a determina o mulţime:

1) prin enumerarea elementelor sale;

Exemple. 1) $A = \{x, y, z\}$; 2) $B = \{2, 4, 6\}$.

2) printr-o proprietate caracteristică de care se bucură toate elementele sale. În acest caz, se adoptă notaţia următoare: fie A mulţimea elementelor care au proprietatea P; se notează:

$A = \{x \mid x \text{ are proprietatea } P\}$ şi citim: „A este mulţimea elementelor x care au proprietatea P".

Litera x desemnează un element arbitrar al mulţimii A; se spune că x descrie mulţimea. Bara care separă litera x de proprietate se citeşte „astfel încât".

Dacă proprietatea P nu este explicitată, se scrie: $A = \{x | P(x)\}$, notaţia $P(x)$ însemnând „x are proprietatea P" sau „P este verificată de x".

Exemple. 1) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$, reprezintă mulţimea numerelor naturale cel mult egale cu 3. Avem deci $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

2) $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x \text{ divide } 10\}$, conţine divizori naturali ai lui 10. Deci $B = \{1, 2, 5, 10\}$.

3) $C = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$. Pentru a determina această mulţime se dau valori lui n, pe rând, când se obţin elemente ale lui C. Pentru $n = 0$ rezultă $x = 0$; pentru $n = 1$, se obţine $x = 2$; pentru $n = 2$, găsim $x = 4$ etc. Obţinem aşadar $C = \{0, 2, 4, \ldots\}$, care este mulţimea numerelor naturale pare.

Mulţimea vidă

Să analizăm următoarele două mulţimi:
$A = \{x | x$ este un judeţ din România, al cărui nume începe cu litera K$\}$ şi
$B = \{x | x$ este un număr prim şi $13 < x < 17\}$.
Examinând cele două mulţimi, constatăm că acestea nu conţin nici un element. Iată că, în matematică, contrar a ceea ce se face în limbajul comun, se obţin mulţimi care nu au nici un obiect. Această mulţime se numeşte **mulţimea vidă** şi se reprezintă prin simbolul $\emptyset$.

Submulţimi. Părţile unei mulţimi

Fie $A = \{1,2,3\}$, $B = \{-1,0,1,2,3,5\}$. Observăm că orice element al mulţimii A este şi element al mulţimii B. Caracterizăm această situaţie spunând că mulţimea A este o **submulţime** sau o **parte** a lui B.

Definiţie. Spunem că mulţimea A **este o submulţime** sau **o parte** a mulţimii B, dacă orice element din A este element în B.

Notaţie. $A \subset B$ şi citim: „mulţimea A este inclusă în mulţimea B".

Deci $A \subset B$, dacă şi numai dacă $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$.

Se consideră că $\emptyset \subset A$ (adică mulţimea vidă este submulţime a oricărei mulţimi). Dacă $A \neq \emptyset$, atunci clasa tuturor submulţimilor lui A o notăm cu $\mathcal{P}(A)$ (citim: „mulţimea părţilor lui A"). Deci $\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq A\}$. Dacă $A = \{1,2,3\}$, atunci

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Faptul că $A \not\subset B$ (citim: „A nu este inclusă în B") se traduce prin „există $x \in A$ astfel încât $x \notin B$".
Se verifică uşor următoarele proprietăţi ale incluziunii mulţimilor:

Reflexivitatea: $A \subset A, \forall A$.
Antisimetria: Dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$, atunci $A = B$.
Tranzitivitatea: Dacă $A \subset B$ şi $B \subset C$, atunci $A \subset C$.

Aplicaţie. Să se determine numărul minim n de întregi care trebuie aleşi din $S = \{1,2,\ldots,9\}$, astfel încât:
a) **suma a doi din cei n întregi să fie pară;** b) **diferenţa a doi din cei n să fie 5.**
R. a) Se ştie că suma a două numere pare sau a două numere impare este un număr par. Considerăm submulţimile lui S, $S_1 = \{1,3,5,7,9\}$ şi $S_2 = \{2,4,6,8\}$. Se aplică **principiul cutiei** (care în esenţă spune că dacă avem n cutii şi $n+1$ beţe care se introduc în cutii, atunci există o cutie în care se află cel puţin două beţe). Deci $n = 3$.
b) Se consideră cinci submulţimi ale lui S, $\{1,6\}, \{2,7\}, \{3,8\}, \{4,9\}, \{5\}$. Pentru $n = 6$, suntem siguri că doi întregi vor fi în aceeaşi mulţime.

Diagrama Venn-Euler

Uneori este comod de a da o reprezentare grafică unei mulţimi pentru a concretiza anumite situaţii. Pentru aceasta se utilizează aşa numita **diagramă Venn-Euler** (John Venn (1834-1923) logician englez; Leonhard Euler (1707-1783) matematician elveţian), formată dintr-o linie simplă închisă (un cerc, un oval, un dreptunghi), în interiorul căreia se scriu elementele mulţimii.
Atragem atenţia că această reprezentare are ca scop **fixarea ideilor şi să faciliteze înţelegerea**. Dacă mulţimea este notată cu o literă, aceasta se scrie lângă linie. Dacă elementele mulţimii nu sunt precizate sau mulţimea este infinită, aceste elemente sunt reprezentate prin puncte situate în porţiunea planului

limitată de linia închisă. Dacă un element nu aparţine mulţimii, el va fi figurat printr-un punct situat în afara liniei.

Exemple.

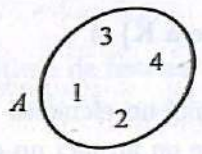


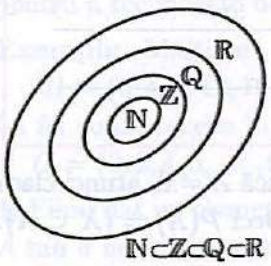
Diagrama lui Venn pentru mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Diagrama lui Venn pentru mulţimea B cu elementele neprecizate

Exemple de mulţimi. Notaţii pentru mulţimi de numere

Mulţimile uzuale de numere pe care le-aţi întâlnit în clasele precedente au notaţii particulare, judicios alese de matematicieni.

1. Mulţimea numerelor naturale este notată cu $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$



2. Mulţimea numerelor întregi se notează cu $\mathbb{Z}$:
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

3. Mulţimea numerelor raţionale se notează cu $\mathbb{Q}$:
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$. Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

4. Mulţimea numerelor reale este notată cu $\mathbb{R}$. Aceasta este mulţimea tuturor numerelor pe care le-aţi întâlnit în clasele precedente. Este formată din numerele raţionale şi numerele iraţionale (care nu sunt raţionale – $\sqrt{2}, \pi \ldots$). Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

5. Adesea se utilizează mulţimile precedente, din care s-a eliminat zero. Aceste mulţimi se notează prin $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ ($\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\ldots$).

6. De asemenea, utilizăm următoarele notaţii:

$\mathbb{R}_+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ (mulţimea numerelor reale pozitive sau nule);
$\mathbb{R}_- = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$ (mulţimea numerelor reale negative sau nule);
$\mathbb{R}_+^* = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ (mulţimea numerelor reale pozitive, nenule);
$\mathbb{R}_-^* = \{x | x \in \mathbb{R}, x < 0\}$ (mulţimea numerelor reale negative, nenule).

O interpretare similară au notaţiile: $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_-^*$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{Q}_-^*$.

1.2. MULŢIMEA NUMERELOR REALE

Scopul acestui paragraf este de a prezenta principalele mulţimi de numere pe care le-aţi studiat în anii precedenţi, indicând pentru fiecare mulţime:

1) proprietăţile algebrice;
2) proprietăţile de ordine;
3) corespondenţa cu punctele unei drepte.

Având în vedere că unele rezultate au fost studiate în anii trecuţi, le vom reaminti. Construcţia acestor mulţimi de numere depăşeşte cadrul acestui manual.

1.2.1. Mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$

Istoria matematicii începe cu problema numărării, ceea ce a condus, după îndelungi tatonări la conceptul fructuos de număr natural.

Matematicienii secolului al XIX-lea au arătat cum se poate construi riguros mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale plecând de la câteva noţiuni elementare.

Axiomatica numerelor naturale cea mai cunoscută a fost elaborată în 1889 de matematicianul italian

Giuseppe Peano (1858-1932).

Numere cardinale. Sub forma cea mai naivă şi primitivă, problema numărării se poate pune sub forma: fiind date două mulţimi A şi B, care dintre cele două mulţimi are mai multe elemente ?

Numerele cardinale indică mărimea mulţimii, respectiv numărul de elemente ale mulţimii.

Numere ordinale. Au apărut din necesitatea de a stabili o ordine în interiorul unei mulţimi.

Numerele cardinale şi ordinale s-au dezvoltat într-o legătură permanentă unele cu altele şi formează cele două aspecte ale numerelor naturale, la care se adaugă de cele mai multe ori prin convenţie şi numărul zero.

Operaţii pe $\mathbb{N}$

Mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale nu posedă în sine nici o altă proprietate în afară de aceea de a număra. O astfel de mulţime este amorfă sau altfel spus nu este structurată. Mulţimea numerelor naturale este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, iar $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ reprezintă mulţimea numerelor naturale nenule.

Adunarea. Cea mai simplă operaţie cu numere naturale face ca la orice două numere $a, b \in \mathbb{N}$ să se asocieze tot un număr natural notat $a + b$.

Proprietăţile adunării pe $\mathbb{N}$

A_1. **Adunarea este asociativă**, adică $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

A_2. **Adunarea este comutativă**, adică $a+b = b+a$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.

A_3. **Numărul 0 este element neutru pentru adunare**, adică $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in \mathbb{N}$.

Observaţii. **1)** Semnul + apare pentru prima dată cu sensul actual într-un manuscris aflat la biblioteca din Dresda şi scris în jurul lui 1480.

2) Adunarea este considerată o operaţie de **ordinul întâi.**

3) Scăderea numerelor indică pe plan abstract ideea de scădere dintr-o mulţime a unei părţi din elementele acelei mulţimi. Scăderea este operaţia inversă adunării. Diferenţa a două numere naturale nu este întotdeauna un număr natural. Diferenţa dintre numerele $a, b \in \mathbb{N}$ se notează $a - b$.

Înmulţirea. La operaţia de înmulţire s-a ajuns prin adunarea mai multor termeni egali. Această operaţie asociază la două numere naturale $a, b \in \mathbb{N}$ numărul natural $a \cdot b$ sau simplu ab.

Proprietăţile înmulţirii pe $\mathbb{N}$

I_1. **Înmulţirea este asociativă**, adică $(ab)c = a(bc)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

I_2. **Înmulţirea este comutativă**, adică $ab = ba$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.

I_3. **Numărul 1 este element neutru pentru înmulţire**, adică $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $\forall a \in \mathbb{N}$.

Observaţii. **1)** Semnele $\cdot$ şi $\times$ sunt utilizate din 1631.

2) Împărţirea numerelor naturale este operaţie inversă a înmulţirii.

Împărţirea a două numere naturale nu este întotdeauna un număr natural.

Împărţirea prin zero nu are sens. Înmulţirea şi împărţirea sunt **operaţii de ordinul doi.**

Ordinea operaţiilor. Dacă intervin mai multe feluri de operaţii, ordinea efectuării operaţiilor are influenţă asupra rezultatului. **Operaţia de ordin superior se efectuează la început.** Operaţiile ale căror semne sunt puncte preced pe cele ale căror semne sunt linii. Dacă operaţiile trebuie făcute în altă ordine, atunci se folosesc parantezele care se vor efectua primele.

Distributivitatea în raport cu adunarea. Legătura între cele două operaţii pe $\mathbb{N}$ este dată de proprietatea

D. **Înmulţirea este distributivă în raport cu operaţia de adunare**, adică
$$a(b+c) = ab + ac, \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Pentru $a \in \mathbb{N}^*$ se notează produsul lui a cu el însuşi de n ori, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel: $a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n}$.

Ansamblul a^n îl numim **putere** în care a este **baza puterii**, iar n este **exponentul puterii.** Au loc proprietăţile:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; 2) $(ab)^n = a^n b^n$; 3) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $n > m$; 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$; 5) $(a^n)^m = a^{nm}$.

Convenim ca $a^0 = 1$, $a \neq 0$. Operaţiei 0^0 nu i se acordă nici un sens. Ridicarea la putere este o **operaţie de ordinul trei.**

Ordonarea numerelor naturale

Orice număr natural are un succesor, de exemplu 11 este succesorul lui 10. Aceasta înseamnă că în şirul numerelor naturale $0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots$ nu există un ultim număr, acest şir fiind infinit. Numărul 0 (zero) nu este succesor. Orice alt număr natural are un predecesor; aceasta înseamnă că şirul numerelor naturale îl are pe 0 (zero) ca primul număr. Pentru orice două numere naturale n_1, n_2 există una din cele trei relaţii: $n_1 < n_2$ (n_1 este strict mai mic decât n_2), $n_1 = n_2$ (n_1 este egal cu n_2), $n_1 > n_2$ (n_1 este strict mai mare decât n_2). Dacă vrem să arătăm că n_1 este cel mult egal cu n_2 atunci scriem $n_1 \leq n_2$. Această relaţie, notată $\leq$, are următoarele proprietăţi:

O_1. **Relatia $\leq$ este reflexivă**, adică $a \leq a$, $\forall a \in \mathbb{N}$.

O_2. **Relaţia $\leq$ este antisimetrică**, adică dacă pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b$ şi $b \leq a$, rezultă $a = b$.

O_3. **Relaţia $\leq$ este tranzitivă**, adică dacă pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}$ pentru care $a \leq b$ şi $b \leq c$, rezultă $a \leq c$.

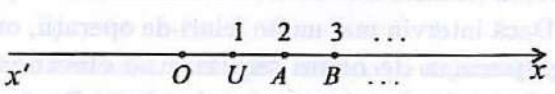
O relaţie, în cazul nostru $\leq$, care are proprietăţile O_1, O_2, O_3 se **numeşte relaţie de ordine.** Între operaţiile de adunare şi înmulţire definite pe $\mathbb{N}$ şi relaţia de ordine $\leq$ există legătura prezentată mai jos sub forma:

Monotonia adunării	dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$, $a, b, c \in \mathbb{N}$.
Monotonia înmulţirii	dacă $a < b$, atunci $ac < bc$, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Această legătură pusă în evidenţă între relaţia de ordine şi operaţiile de adunare şi înmulţire arată că inegalitatea numerelor naturale rămâne valabilă dacă adunăm sau înmulţim în amândouă părţile acelaşi număr.

Reprezentarea geometrică a lui $\mathbb{N}$

O dreaptă d pe care fixăm un punct O, **numit origine, un sens pozitiv** şi o **unitate de măsură** se numeşte **axă de coordonate.**



Sensul pozitiv este dat de săgeată, lungimea segmentului $[OU]$ este egală cu 1.

Numărului 0 îi asociem punctul O pe dreaptă. Numărului 1 îi asociem punctul U pe axă (se mai spune că 1 este coordonata sau abscisa punctului U şi scriem $U(1)$) pentru care $OU = 1$; numărului 2 îi asociem pe axă punctul A (2 este coordonata sau abscisa punctului A şi notăm $A(2)$) pentru care $OA = 2$ etc.
Să observăm că numerelor naturale le-am asociat puncte pe axa de coordonate situate la dreapta lui O (la dreapta originii O), deci aparţinând semidreptei $[Ox$ pe care din acest motiv o numim **semiaxa pozitivă.**

Necesitatea extinderii mulţimii $\mathbb{N}$

Dacă se dau două elemente a şi b din $\mathbb{N}$ se pot formula două probleme care impun extinderea mulţimii numerelor naturale:
1) Există un element $x \in \mathbb{N}$ pentru care $a + x = b$?
2) Există un element $y \in \mathbb{N}$ pentru care $ay = b$?
Se observă că după valorile atribuite lui a şi b aceste probleme admit sau nu soluţii. De aceea s-a impus crearea altor mulţimi de numere în care aceste probleme să posede întotdeauna cel puţin o soluţie (exceptând, pentru 2) cazul $a = 0$ şi $b \neq 0$).

1.2.2. Mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$

Fapte de natură matematică (printre altele rezolvarea ecuaţiei $a + x = b$, $a, b \in \mathbb{N}$, $b < a$) sau fizică (temperatura) au condus la extinderea mulţimii $\mathbb{N}$ la mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Numere opuse. Dacă $a \in \mathbb{N}^*$, atunci am numit opusul lui a în raport cu adunarea de pe $\mathbb{N}$, numărul notat $-a$, definit prin egalităţile $\quad a + (-a) = (-a) + a = 0$.
S-au creat astfel noi obiecte matematice, numerele întregi negative.

Structura algebrică a lui $\mathbb{Z}$

Este dată de un ansamblu de două operaţii, adunarea şi înmulţirea numerelor întregi, cărora le impunem să verifice condiţii similare celor satisfăcute de adunarea şi înmulţirea numerelor naturale, la care se adaugă şi altele ţinând cont de prezenţa pe lângă numerele naturale şi a opuselor acestora.
Acest principiu se va păstra şi la trecerea de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Q}$ sau de la $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{R}$.
Adunarea şi înmulţirea pe $\mathbb{Z}$ sunt două operaţii care asociază fiecărui cuplu (a, b) de numere întregi numerele întregi notate $a + b$ şi respectiv ab.

Proprietăţile operaţiilor pe $\mathbb{Z}$

Proprietăţile operaţiilor de adunare şi înmultire valabile pe $\mathbb{N}$ se păstrează şi pe $\mathbb{Z}$, la acestea adăugându-se

A_4. **Elemente opuse.** Pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, există elementul $(-x) \in \mathbb{Z}$, numit **opusul lui** x cu proprietatea: $\quad x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Alte proprietăţi studiate au fost:

P_1. Dacă $a = b$, atunci $\quad a + c = b + c, \quad ac = bc$.
Egalitatea este compatibilă cu adunarea şi înmulţirea.

P_2. Dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a + c = b + c$, atunci $a = b$ **(Reducerea a doi termeni asemenea).**
Dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $ac = bc$, $c \neq 0$, atunci $a = b$ **(Simplificarea printr-un număr nenul).**

P_3. **Regula semnelor la produs.** Dacă $a, b > 0$, atunci $ab > 0$; dacă $a, b < 0$, atunci $ab > 0$;
dacă $a > 0$, $b < 0$ sau $a < 0$, $b > 0$, atunci $ab < 0$;
dacă unul din factorii a, b este zero, atunci $ab = 0$.

În cazul lui $\mathbb{Z}$ diferența a două numere întregi este un număr întreg.
Ridicarea la putere a unui număr întreg se definește ca în cazul ridicării la putere a unui număr natural.
Notăm $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ mulțimea numerelor întregi negative, iar cu $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ mulțimea numerelor întregi nenegative.

Ordonarea numerelor întregi. Valoarea absolută a unui număr întreg

Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ definim **valoarea absolută** sau **modulul lui** a, numărul nenegativ

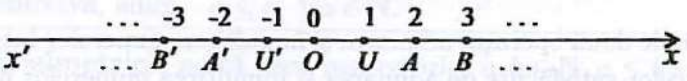
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geq 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0. \end{cases}$$

Dacă $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $n_1 \neq n_2$, atunci sunt de discutat trei cazuri:
1) $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ când s-a văzut cum se face ordonarea;
2) $n_1 \in \mathbb{Z}_-$, $n_2 \in \mathbb{Z}_+$ atunci $n_1 < n_2$;
3) $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_-$ când $n_1 < n_2$ dacă $|n_1| > |n_2|$.
Relația $\leq$ este o relație de ordine pe $\mathbb{Z}$, care păstrează monotonia adunării, iar pentru înmulțire regula se completează astfel:

dacă $a < b$, atunci $ac < bc$, dacă $c \in \mathbb{N}^*$;
dacă $a < b$, atunci $ac > bc$, dacă $c \in \mathbb{Z}_-$.

Reprezentarea geometrică a lui $\mathbb{Z}$

Am reprezentat pe axa de coordonate $x'x$ numerele naturale prin punctele O, U, A, B, ... situate pe semiaxa $[Ox$ pe care am numit-o semiaxa pozitivă.



Punctele U, A, B, ... sunt situate pe această axă la dreapta lui O.
Numărului negativ -1 îi asociem pe axă punctul U' situat la stânga lui O și pentru care $OU' = 1$. Spunem că punctul U' are coordonata -1 și scriem $U'(-1)$. Numărului -2 îi asociem pe axă punctul A' situat la stânga lui O, pentru care $OA' = 2$. Spunem că A' are coordonata -2 și scriem $A'(-2)$, etc.

1.2.3. Mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$. Necesitatea extinderii mulțimii $\mathbb{Z}$

Ecuația $5x = 3$ în $\mathbb{Z}$ nu are soluție. Se impune deci extinderea mulțimii $\mathbb{Z}$ la o altă mulțime în care ecuații de forma $ax = b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ să aibă soluție. Această mulțime o reprezintă mulțimea numerelor raționale notată cu $\mathbb{Q}$ și definită ca fiind egală cu $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$, unde $\frac{m}{n}$ se numește fracție (m = numărătorul care indică numărul de părți, iar n = numitorul care indică în câte părți a fost împărțit întregul).
Deci un număr rațional înseamnă o fracție $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. De asemenea, toate fracțiile $\left(\frac{mk}{nk}\right)_{k \in \mathbb{Z}^*}$ reprezintă același număr rațional $\frac{m}{n}$.
Două fracții $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ spunem că sunt echivalente dacă $mq = np$. Ori se constată imediat că $\frac{m}{n}$ este echivalentă cu orice fracție $\frac{mk}{nk}$.
Deci două fracții echivalente dau același număr rațional.

Exemple. Toate fracţiile $\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \dots\right)$ obţinute prin amplificare sau simplificare, care reprezintă aceeaşi cantitate, reprezintă **numărul raţional unic** $\frac{3}{5}$.

Fracţiile cu numitorul 1 şi cele obţinute prin amplificarea lor sunt conţinute tot în mulţimea numerelor raţionale. De exemplu: $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \dots$. Ele pot fi substituite una alteia. Numărul întreg 0 poate fi înlocuit cu orice fracţie cu numărătorul egal cu zero. **Numitorul zero este exclus.**

Probleme rezolvate

1. **Să se determine $n \in \mathbb{Z}$ pentru ca fracţiile $\frac{2+n}{6+2n}$ şi $\frac{3}{4}$ să fie echivalente.**

R. Trebuie să avem egalitatea $4(2+n) = 3(6+2n)$. De aici $n = -5$.

2. **Arătaţi că nu există numere raţionale $\frac{m}{n}$ astfel încât $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$.**

R. Presupunem că $(m,n) = 1$. Din $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$ rezultă $m^2 = 3n^2$, $(*)$. Cum $(m,n) = 1$ se obţine $3 \mid m^2 \Rightarrow 3 \mid m$. Fie $m = 3m_1$, $m_1 \in \mathbb{Z}$. Egalitatea $(*)$ devine $3m_1^2 = n^2$, $(**)$, iar de aici $3 \mid n^2$ şi deci $3 \mid n$, adică există $n_1 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n = 3n_1$. Am obţinut că $3 \mid m$, $3 \mid n$, adică $3 \mid (m,n) = 1$, contradicţie. Deci nu există $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ cu $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$.

3. **Să se determine $k \in \mathbb{Z}$ pentru care fracţia $\frac{5}{2k-1} \in \mathbb{Z}$.**

R. Fracţia este număr întreg dacă $2k-1$ divide 5, adică dacă $2k-1 \in \{-1, 1, -5, 5\}$. De aici $k \in \{0, 1, -2, 3\}$.

4. **Dacă $\frac{3}{7} = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, atunci precizaţi a_{2009}.**

R. Observăm că $\frac{3}{7} = 0,(42857)$ şi din $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 8$, $a_4 = 5$, $a_5 = 7$, iar $2009 = 401 \cdot 5 + 4$, deci $a_{2009} = a_4 = 5$.

Probleme propuse

1. **Găsiţi trei valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care fracţia $\frac{3n}{8}$ este reductibilă.**
2. **Determinaţi $k \in \mathbb{Z}$ pentru care fracţiile $\frac{2+k}{3}$ şi $\frac{4+k}{5}$ sunt echivalente.**
3. **Arătaţi că nu există numere raţionale $\frac{m}{n}$ astfel încât $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$.**
4. **Să se determine $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{3}{2k+1} \in \mathbb{Z}$.**
5. **Determinaţi trei valori ale lui $k \in \mathbb{Z}$ pentru care fracţia $\frac{10}{k+1}$ este reductibilă.**
6. **Determinaţi trei valori ale lui $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât fracţia $\frac{2k+1}{3k+2}$ să fie ireductibilă.**
7. **Dacă $\frac{2}{7} = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, să se precizeze a_{2010}.**
8. **Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, atunci să se arate că $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.**
9. **Dacă $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$, atunci să se arate că $\frac{a}{b} < \frac{a+c+e}{b+d+f} < \frac{e}{f}$.**
10*. **Dacă $a \in \mathbb{N}^*$ atunci $\frac{a}{a+1} < \frac{a+1}{a+2} < \frac{a+2}{a+3}$. Să se arate că $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{2005}{2006} \cdot \frac{2008}{2009} < \frac{1}{12}$.**

Indicaţie. Fie P produsul. Atunci $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}\cdot\frac{2008}{2009}=\frac{1}{2009}$, $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}<\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$, $\ldots$, $\frac{2005}{2006}<\frac{2006}{2007}<\frac{2007}{2008}\Rightarrow P^3<\frac{1}{2009}$; $\frac{2008}{2009}<1$.

Reprezentarea unui număr raţional

Un număr raţional se poate reprezenta sub două forme: 1) **sub formă de fracţie ordinară** $\left(\frac{m}{n}\right)$ sau 2) **sub formă de fracţie zecimală** (**finită** sau **infinită periodică**). Reamintim procedeul de trecere de la o formă la alta.

Cazuri particulare. Fie $q_1=\frac{1}{2}$, $q_2=\frac{1}{3}$, $q_3=\frac{19}{55}$.
Vom trece de la forma de fracţie ordinară la cea de fracţie zecimală aplicând algoritmul de împărţire şi obţinem

$q_1=0,5$, $\quad q_2=0,33\ldots3\ldots$, $\quad q_3=0,3454545\ldots$

sau scrise utilizând perioada astfel

$q_1=0,5$, $\quad q_2=0,(3)$, $\quad q_3=0,3(45)$.

Fracţiile zecimale obţinute în urma împărţirii se numesc **reprezentările zecimale** ale numerelor raţionale q_1, q_2 şi respectiv q_3.
Fracţia q_1 are reprezentarea zecimală finită, având după virgulă un număr finit de cifre semnificative, iar în rest zerouri. Fracţia q_2 are reprezentare zecimală periodică simplă, deoarece perioada (3) urmează imediat după virgulă, iar fracţia q_3 are reprezentarea zecimală periodică mixtă, deoarece perioada (45) nu urmează imediat după virgulă (are după virgulă o parte neperiodică – aici 3).
Acum pentru a trece de la fracţiile zecimale la cele ordinare se procedează aşa cum s-a văzut în gimnaziu astfel:

$$q_1=0,5=0+\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\qquad q_2=0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3},\qquad q_3=0,3(45)=\frac{345-3}{990}=\frac{342}{990}=\frac{19}{55}.$$

De fapt, ultimele scrieri au următoarea argumentaţie: $10q_2=3,(3)$ sau $10q_2-q_2=3\Leftrightarrow 9q_2=3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow q_2=1/3$ şi respectiv $10q_3=3,(45)$, unde notăm $x=3,(45)$ şi avem $100x=345,(45)$, iar de aici prin scădere $100x-x=342\Leftrightarrow 99x=342\Leftrightarrow q_3=\frac{19}{55}$.

Cazul general. O fracţie zecimală finită are forma:

$a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0,a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-p}$, unde $a_k,a_{k-1},\ldots,a_1,a_0,a_{-1},\ldots,a_{-p}$ sunt cifre şi este egală în baza zece cu:

$$a=a_k\cdot10^k+a_{k-1}\cdot10^{k-1}+\ldots+a_1\cdot10+a_0+\frac{a_{-1}}{10}+\frac{a_{-2}}{10^2}+\ldots+\frac{a_{-p}}{10^p}.$$

O fracţie zecimală infinită are forma:

$a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0,a_{-1}a_{-2}\ldots$, şi este egală în baza zece cu

$$a=a_k\cdot10^k+\cdot+a_1\cdot10+a_0+\frac{a_{-1}}{10}+\frac{a_{-2}}{10^2}+\ldots.$$

Observaţie. O fracţie zecimală finită poate fi considerată ca o fracţie zecimală infinită prin adăugare de zerouri.

O fracţie zecimală infinită periodică simplă are forma

$a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0,(a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-p})$, şi reprezintă numărul raţional

$$a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0+\frac{a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-p}}{\underbrace{99\ldots9}_{p}},$$ unde grupul de cifre $a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-p}$ se numeşte **perioadă.**

O fracţie zecimală infinită periodică mixtă are forma

$a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0,a_{-1}\ldots a_{-i}(b_1\ldots b_p)$, şi reprezintă numărul raţional

$$a = a_k \dots a_1 a_0 + \frac{a_{-1} \dots a_{-i} b_1 \dots b_p - a_{-1} \dots a_{-i}}{\underbrace{99\dots9}_{p}\underbrace{0\dots0}_{i}}.$$

Observaţie. Orice fracţie zecimală finită este periodică de perioadă zero.

Avem şi rezultatul reciproc sub forma:

Teorema. Orice număr raţional se reprezintă în mod unic sub forma unei fracţii zecimale finite sau fracţii zecimale infinite periodice cu perioada diferită de 9.

Observaţie. În teoremă apare restricţia ca fracţia zecimală infinită periodică să nu aibă perioada 9. Dacă prin absurd fracţia $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ ar avea perioada 9, atunci efectuând împărţirea cu rest a lui m cu n se ajunge la un rest r, care înmulţit cu 10 şi împărţit la n dă câtul 9 şi din nou restul r, adică $10r = 9n + r$. De aici $r = n$, în contradicţie cu cerinţa $r < n$.

Probleme rezolvate

1. **Să se determine cifrele a, b astfel încât $0, a(b) = \frac{a}{b}$.**

R. Egalitatea se rescrie $\frac{\overline{ab} - a}{90} = \frac{a}{b}$ sau $\frac{10a + b - a}{90} = \frac{a}{b}$ sau $b(9a + b) = 90a$. Găsim $a = 1$, $b = 6$.

2. **Fie $0, a_1 a_2 \dots$ scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{7}$. Să se calculeze a_{2009} şi suma $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2009}$.**

R. Avem $\frac{1}{7} = 0,(142857)$, $2009 = 6 \cdot 334 + 5$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$ .... De aici $a_{2009} = a_5$, iar $S = 334(1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7) + 1 + 4 + 2 + 8 + 5 = 9039$.

3. **Să se arate că $n + \frac{4}{10} < \sqrt{n^2 + n} < n + \frac{5}{10}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi apoi să se deducă prima zecimală a lui $\sqrt{n^2 + n}$.**

R. Inegalitatea se ridică la pătrat şi se oţine echivalent ($4 < 5n$ şi $0 < 1/4$) adevărate. Deci $n,4 < \sqrt{n^2 + n} < n,5$, adică prima zecimală a numărului $\sqrt{n^2 + n}$ este 4.

4. **Să se arate că: 1) fracţia $\frac{n^2 + n + 2}{n^2 - n + 4}$ este reductibilă $\forall n \in \mathbb{N}^*$;**

2) fracţia $\frac{2n + 1}{3n + 2}$ este ireductibilă $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

R. 1) O fracţie este reductibilă dacă atât numărătorul, cât şi numitorul se divid prin acelaşi număr $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$. Observăm că $n^2 + n + 2 = n(n + 1) + 2$, $n^2 - n + 4 = n(n - 1) + 4$ sunt numere pare, deoarece produsul a două numere naturale consecutive se divide prin 2, iar suma de numere pare este un număr par.

2) Procedăm prin reducere la absurd. Fie deci $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$, un divizor atât al numărătorului, cât şi al numitorului. Deci, $d \mid 2n + 1$, $d \mid 3n + 2$. De aici $d \mid 3(2n + 1) - 2(3n + 2) = 1 \Rightarrow d = 1$, contradicţie. Prin urmare, fracţia este ireductibilă.

5. **Să se arate că $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{5}{4}$.**

R. Să observăm că $(2k + 1)^2 > 2k(2k + 2)$ şi deci $\frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{2k(2k+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$. Adunând aceste inegalităţi pentru $k = \overline{1,n}$ rezultă

$$1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4(n+1)} < \frac{5}{4}.$$

Probleme propuse

1. Dacă $\frac{4}{7} = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, atunci să se calculeze a_{2012}.

2. Să se arate că: 1) fracţia $\frac{n^2-n-8}{n^2+n-2}$ este reductibilă $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$; 2) fracţia $\frac{n+3}{2n+5}$ este ireductibilă $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Să se determine $x, y \in \mathbb{Z}$ pentru care $xy + x + y = 3$.

Indicaţie. $(x+1)(y+1) = 4$.

4. Arătaţi că pentru oricare cinci numere întregi există cel puţin două care dau acelaşi rest la împărţirea cu 4.

Indicaţie. Resturile la împărţirea prin 4 sunt 0, 1, 2, 3.

5. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia $0, x(y) + 0, y(x) = 0, (3)$.

R. $(x, y) \in \{(1,2), (2,1)\}$.

Partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr

Definiţii. Fie $a \in \mathbb{Q}$. Se numeşte **partea întreagă a numărului** a, numărul, notat $[a]$, care reprezintă cel mai mare întreg mai mic sau egal cu a.

Deci $[a] \in \mathbb{Z}$, $[a] \leq a < [a] + 1$.

Se numeşte **partea fracţionară a numărului** a, numărul, notat $\{a\}$, care este egal cu diferenţa dintre a şi partea sa întreagă $[a]$.

Deci $\{a\} = a - [a]$.

Trebuie observat că există o infinitate de numere întregi mai mici sau egale cu a. Partea întreagă a lui a, $[a]$, este cel mai mare dintre toţi întregii mai mici sau egali cu a.

Din $[a] \leq a < [a] + 1$ rezultă $\{a\} = a - [a] \geq 0$ şi $\{a\} = a - [a] < 1$.

Deci partea fracţionară a lui a este un număr pozitiv subunitar, $0 \leq \{a\} < 1$.

Exemple. 1) $[3,76] = 3$, $\{3,76\} = 3,76 - [3,76] = 3,76 - 3 = 0,76$;

2) $[9] = 9$, $\{9\} = 9 - [9] = 9 - 9 = 0$;

3) $[-3,16] = -4$, $\{-3,16\} = -3,16 - [-3,16] = -3,16 + 4 = 4 - 3 - 0,16 = 1 - 0,16 = 0,84$;

4) $[-5] = -5$, $\{-5\} = -5 - [-5] = -5 + 5 = 0$.

Structura algebrică a lui $\mathbb{Q}$

Pe mulţimea $\mathbb{Q}$ s-au definit operaţiile de adunare şi înmulţire a fracţiilor ordinare astfel

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ şi $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

Cele două operaţii se bucură de proprietăţile prezentate la mulţimea $\mathbb{Z}$.

În plus pentru orice $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \neq 0$, există elementul (fracţia) $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ pentru care $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$, ceea ce înseamnă că orice fracţie nenulă $\frac{a}{b}$ are o inversă $\frac{b}{a}$.

Ordonarea numerelor raţionale

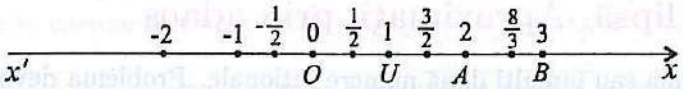
Dacă $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+^*$ $\left(= \left\{\frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{N}^*\right\} =\right.$ numerele raţionale pozitive nenule), $a, b, c, d > 0$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$.

Dacă $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_-^*$ $\left(= \left\{-\frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{N}^*\right\}\right.$ = numere raţionale negative nenule), $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+^*$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, iar dacă $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_-^*$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dacă $\left|\frac{a}{b}\right| > \left|\frac{c}{d}\right|$.

Observaţie. Între două numere raţionale distincte există o infinitate de numere raţionale. Fie $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$. Atunci $a < \frac{a+b}{2} < b$ şi se repetă procedeul pentru a, $\frac{a+b}{2}$ sau $\frac{a+b}{2}$, b.

Reprezentarea geometrică a lui $\mathbb{Q}$

Reprezentarea pe axa de coordonate a unui număr raţional se obţine prin reprezentarea unei singure fracţii din mulţimea care reprezintă numărul raţional.



Imaginile numerelor raţionale pozitive sunt situate pe axa de coordonate la dreapta lui O, iar imaginile numerelor raţionale negative sunt plasate pe axă la stânga lui O.

De exemplu pentru a reprezenta pe axă numărul raţional $\frac{8}{3}$ observăm că acesta se scrie sub forma $2 + \frac{2}{3} \in [2, 3]$. Unitatea cuprinsă între 2 şi 3 (pe figură segmentul AB) se divide în 3 părţi egale (cât indică numitorul fracţiei $\frac{2}{3}$) şi punctul căutat este al doilea punct al diviziunii (cât indică numărătorul fracţiei $\frac{2}{3}$).

Dacă numerele raţionale se prezintă sub formă de fracţii zecimale, acestea se vor transforma în fracţii ordinare şi imaginile lor pe axă se obţin aşa cum s-a văzut în cazul particular al fracţiei $\frac{8}{3}$.

1.2.4. Mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$. Necesitatea extinderii mulţimii $\mathbb{Q}$

Am prezentat succesiv mulţimile $\mathbb{Z}$ (a numerelor întregi), $\mathbb{Q}$ (a numerelor raţionale) ca fiind „îmbogăţiri" ale structurii $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, a cărei structură „săracă" a apărut în urma rezolvării ecuaţiilor de tipul $ax + b = c$. Această realizare nu este completă căci rămân destule lacune de completat.

De exemplu, ecuaţia $x^2 = 2$ nu are soluţii în $\mathbb{Q}$, ceea ce revine la a spune că $\sqrt{2}$ nu este raţional.

Într-adevăr, dacă prin absurd ar exista un număr raţional $x = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$ (altfel, se simplifică fracţia) pentru care $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ ar rezulta $m^2 = 2n^2$. De aici $2 \mid m^2$, adică $2 \mid m$. Deci $m = 2m_1$, $m_1 \in \mathbb{N}^*$. Din $m^2 = 2n^2$ şi $m = 2m_1$ rezultă $2m_1^2 = n^2$, adică $2 \mid n$. Aşadar există $n_1 \in \mathbb{N}^*$ pentru care $n = 2n_1$. Recapitulând: $m = 2m_1$, $n = 2n_1$, $m_1, n_1 \in \mathbb{N}^*$, ceea ce arată că $2 \mid m$, $2 \mid n$, în contradicţie cu $(m, n) = 1$. În concluzie, ecuaţia $x^2 = 2$ nu are soluţie raţională (pozitivă; analog se procedează pentru x raţional negativ).

Definiţia unui număr real. Reprezentarea unui număr real

Am văzut că un număr raţional se poate prezenta sub una din formele:

1) fracţie ordinară $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$;

2) fracţie zecimală finită sau infinită periodică (simplă sau mixtă).

Există însă numere care nu sunt raţionale:

1) $\sqrt{2}$ (s-a arătat mai sus), $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

2) $0,123456789101112\ldots$; $3,31323334\ldots$; $1,1010010001\ldots$

Numerele de la 1) nu pot fi puse sub formă de fracţie ordinară, iar cele de la 2) sunt fracţii zecimale

infinite neperiodice. Aceste numere le numim iraţionale. Deci

Un număr iraţional este o fracţie zecimală infinită şi neperiodică.

Mulţimea numerelor reale, notată $\mathbb{R}$, este reuniunea dintre mulţimea numerelor raţionale şi mulţimea numerelor iraţionale.

Un număr real este o fracţie zecimală finită sau infinită.

Mulţimea numerelor iraţionale este $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Se cunoaşte că raportul dintre lungimea cercului şi diametrul său este egal cu $\pi = 3,141592\ldots$ care este, de asemenea, un număr iraţional.

Aproximaţii prin lipsă. Aproximaţii prin adaos

Am văzut cum se pot aduna sau înmulţi două numere raţionale. Problema devine imposibilă dacă acceptăm reguli asemănătoare pentru numerele reale, dat fiind faptul că un număr real nu-l putem descrie în întregime prin toate zecimalele sale în cazul numerelor iraţionale.

În practică pentru determinarea unor elemente (din matematică, fizică, chimie etc.) se ajunge la valori egale cu $\sqrt{2}$ sau $\sqrt{3}$ etc. pe care însă, aşa cum s-a văzut în clasele anterioare, le aproximăm prin lipsă sau adaos. Aşa de pildă pentru $\sqrt{2}$ considerăm valoarea 1,4 sau 1,41; pentru $\sqrt{3}$ luăm 1,7 sau 1,73. În aceste cazuri scriem $\sqrt{2} \approx 1,4$ sau $\sqrt{2} \approx 1,41$ etc.

Definiţie. (Aproximare prin lipsă.) Numărul raţional rezultat prin eliminarea tuturor zecimalelor unui număr real pozitiv, începând de la o zecimală oarecare spre dreapta, se numeşte **aproximare prin lipsă** (sau **trunchiere**) a numărului.

Aproximare prin adaos. Numărul raţional rezultat dintr-o aproximare prin lipsă, căruia i se măreşte cu unu ultima cifră se numeşte **aproximare prin adaos** a numărului.

Pentru a obţine aproximările prin lipsă şi adaos ale unui număr negativ a, se determină aproximările prin lipsă şi prin adaos ale numărului $|a|$.

Fie acestea a_l şi respectiv a_a. Deci $a_l < |a| < a_a$. Prin urmare $a_l < -a < a_a$ (dacă $a < 0$) sau $-a_a < a < -a_l$, ceea ce arată că $-a_a$ este aproximarea prin lipsă a lui a, iar $-a_l$ devine aproximare prin adaos a lui a.

Exemple. 1) Fie $a = 10,5249$. Atunci:

– aproximările prin lipsă ale lui a sunt: 10; 10,5; 10,52; 10,524;

– aproximările prin adaos ale lui a sunt: 11; 10,6; 10,53; 10,525.

Să observăm că aceste aproximări conduc la o ordonare a lor faţă de numărul considerat

$$\underbrace{10 < 10,5 < 10,52 < 10,524}_{\text{aproximări prin lipsă}} < a < \underbrace{10,525 < 10,53 < 10,6 < 11}_{\text{aproximări prin adaos}}.$$

Observăm că aproximările (prin lipsă sau adaos) ale unui număr sunt mai apropiate de numărul aproximat, cu cât se consideră mai multe zecimale.

2) Fie $a = -3,45613$. În acest caz luăm $a = 3,45613$.

Avem mai jos aproximări pentru $|a|$

$$\underbrace{3 < 3,4 < 3,45 < 3,456}_{\text{aproximările prin lipsă}} < |a| < \underbrace{3,457 < 3,46 < 3,5 < 4}_{\text{aproximările prin adaos}},$$

iar de aici se obţin aproximări pentru a (înmulţind lanţul de inegalităţi cu -1):

$$\underbrace{-4 < -3,5 < -3,46 < -3,457}_{\text{aproximări prin lipsă}} < a < \underbrace{-3,456 < -3,45 < -3,4 < -3}_{\text{aproximări prin adaos}}.$$

Fie acum cazul general al unui număr real $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$.

Dacă din descrierea sub formă de fracţie zecimală infinită a unui număr reţinem n zecimale, atunci spunem că aproximarea (prin lipsă) este cu n zecimale exacte sau încă de ordin n. Deci $a_{l_n} = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$, caz în care aproximarea prin adaos de ordin n a numărului a este $a_{a_n} = a_{l_n} + 10^{-n}$.

Evident au loc inegalităţile:

$a_{l_1} < a_{l_2} < \ldots < a_{l_n} < \ldots < a < \ldots a_{a_n} < \ldots < a_{a_2} < a_{a_1}$.

De obicei atunci când facem aproximarea unui număr real a cu o valoare $\widetilde{a}$ ne interesează eroarea pe care o comitem. Mai precis cât de depărtat este $\widetilde{a}$ de a.

Pentru precizia calculelor în care se face această substituţie este necesar ca $\widetilde{a}$ să fie cât mai aproape de a.

Definiţie. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $\widetilde{a}$ o aproximare a lui a. Se numeşte **eroare absolută asociată aproximării** $\widetilde{a}$ numărul $\Delta_{\widetilde{a}} = |a - \widetilde{a}|$.

Cu cât eroarea absolută a unei aproximări $\widetilde{a}$ este mai mică, cu atât se spune că aproximarea este mai bună.

Exemplu. Dacă $a = \sqrt{2} = 1,4142\ldots$, iar $\widetilde{a} = 1,414$, atunci $\Delta_{\widetilde{a}} = a - \widetilde{a} = 0,0002\ldots$.

Legat de noţiunile de aproximare prin lipsă şi prin adaos pentru un număr este noţiunea de **rotunjire de un anumit ordin n a acelui număr.**

Dacă prima cifră eliminată este strict mai mică decât 5, atunci rotunjirea numărului este egală cu aproximarea prin lipsă. Dacă prima cifră eliminată este mai mare sau egală cu 5, atunci rotunjirea numărului este egală cu aproximarea prin adaos.

Exemplu. Fie $a = 3,65183$. Numărul 4 reprezintă o rotunjire a lui a la ordinul unităţilor. Numărul 3,7 reprezintă o rotunjire a lui a de ordinul zecimilor. Numărul 3,66 este o rotunjire a lui a la ordinul sutimilor, iar 3,652 este o rotunjire a lui a la ordinul miimilor.

Ordonarea numerelor reale

Definiţie. Egalitatea a două numere reale. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Spunem că numerele a, b **sunt egale** şi scriem $a = b$ dacă au acelaşi semn şi se reprezintă prin aceeaşi fracţie zecimală.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, numere reale pozitive

$a = a_1 a_2 \ldots a_n, a_{-1} a_{-2} \ldots, \quad b = b_1 b_2 \ldots b_m, b_{-1} b_{-2} \ldots,$

unde a_i, $i = \overline{1,n}$, b_j, $j = \overline{1,m}$, $a_{-1}, a_{-2}, \ldots, b_{-1}, b_{-2}, \ldots$ sunt cifre de la 0 la 9.

Spunem că numărul a **este strict mai mic decât** b şi scriem $a < b$ dacă:

$a_1 a_2 \ldots a_n < b_1 b_2 \ldots b_m$ sau $a_1 a_2 \ldots a_n = b_1 b_2 \ldots b_m$ şi există $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a_{-n} < b_{-n}$ şi $a_{-k} = b_{-k}$, pentru orice $k < n$.

Orice număr real negativ este strict mai mic decât orice număr real pozitiv.

Un număr real negativ a este strict mai mic decât un număr real negativ b dacă $|b| < |a|$.

Spunem că a este mai mic sau egal cu b şi scriem $a \leq b$ dacă $a < b$ sau $a = b$.

Exemple. 1) $3,591 < 9,111$ deoarece $3 < 9$;

2) $215,368 < 215,369$ deoarece

2	1	5	,	3	6	8
2	1	5	,	3	6	9

cifrele de pe aceleaşi poziţii sunt egale până la a treia zecimală.

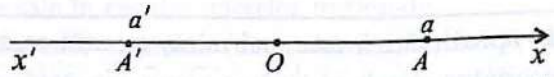
Mulţimea numerelor reale se bucură de o proprietate deosebit de importantă

> Între orice două numere reale există cel puţin un număr raţional şi cel puţin un număr iraţional.

Relaţia $\leq$ este o relaţie de ordine pe $\mathbb{R}$.

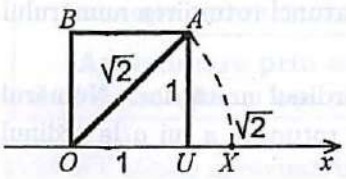
Reprezentarea geometrică a lui $\mathbb{R}$

Fiecărui număr real pozitiv a îi corespunde pe axa de coordonate un punct A situat la dreapta lui O astfel încât $OA = a$, iar fiecărui număr real negativ a' îi corespunde un punct A' situat la stânga lui O pentru care $OA' = |a'|$.



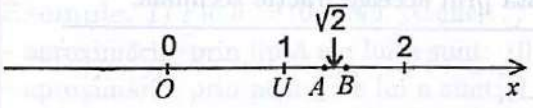
Această corespondenţă între $\mathbb{R}$ şi punctele axei de coordonate este de tipul „unu la unu". Din acest motiv axa de coordonate se numeşte şi **axa reală**.

Există modalităţi de construcţie cu rigla şi compasul a unor puncte pe axa reală cărora le corespund anumite numere reale. Vom ilustra aici construcţia punctului căruia îi corespunde $\sqrt{2}$.



Se construieşte pătratul de latură $[OU]$, $OUAB$, a cărui diagonală este egală cu $OA = \sqrt{OU^2 + UA^2} = \sqrt{2}$. Acum cu ajutorul compasului cu vârful în O şi deschiderea OA se descrie arcul de cerc ce intersectează axa reală în punctul X pentru care $OX = \sqrt{2}$. Dacă purtăm acest segment la dreapta lui X o dată, de două ori, etc se obţin puncte care corespund numerelor $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, etc. Analog purtând segmentul $[OX]$ la stânga lui O, o dată, de două ori, etc. se obţin puncte ce corespund numerelor $-\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$, etc.

Pentru a reprezenta pe axă un număr iraţional utilizăm aproximările sale zecimale. Aşa, de exemplu, pentru a reprezenta pe $\sqrt{2}$ pe axă utilizăm faptul că $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ şi deci lui îi va corespunde un punct pe axă situat între punctele $A(1,4)$ şi $B(1,5)$.



Se ştie că dacă $A(x_A)$ şi $B(x_B)$, atunci distanţa dintre A şi B sau lungimea segmentului $[AB]$ este egală cu $AB = |x_B - x_A|$.

Probleme rezolvate

1. **Să se arate că $\forall x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Când are loc egalitatea?**

R. Înmulţim cu $x > 0$ inegalitatea şi avem scrierea echivalentă $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, adevărat. Avem egalitate în inegalitate dacă $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

2. **Să se arate că $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$, $\forall a, b > 0$. Avem egalitate în inegalităţi dacă $a = b$.**

R. Pentru demonstrarea fiecărei inegalităţi se ridică la pătrat. Pentru prima avem $\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$, evident. Analog pentru celelalte inegalităţi.

3. **Să se arate că** $\frac{a^2}{a-1} \geq 4$, $\forall a > 1$ **şi să se deducă inegalitatea** $\frac{a^2}{a-1} + \frac{b^2}{b-1} \geq 8$, $\forall a, b > 1$.

R. Inegalitatea este echivalentă cu $a^2 \geq 4(a-1) \Leftrightarrow (a-2)^2 \geq 0$, evident. Avem egalitate dacă $a = 2$. Pentru a doua inegalitate se aplică cea demonstrată pentru fiecare fracţie şi apoi se adună. Egalitatea se realizează dacă $a = b = 2$.

4. **Arătaţi că** $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$, $\forall a, b > 0$ **şi apoi demonstraţi că** $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$, $\forall a, b, c > 0$.

R. Prima inegalitate se obţine din problema 2; avem egalitate dacă $a = b$. Pentru a doua inegalitate se aplică prima inegalitate pentru fiecare fracţie şi apoi se adună.

5. **Să se arate că** $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$, $\forall x \geq 0$, **cu egalitate în inegalitate dacă** $x = 1$. **Să se demonstreze inegalităţile:**

1) $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$, $\forall a, b \geq 1$; 2) $\sqrt{4a-1} + \sqrt{4b-1} \leq 2$, $\forall a, b \geq \frac{1}{4}$, $a + b = 1$.

R. Inegalitatea este echivalentă cu $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$, adevărată. Avem egalitate în inegalitate dacă $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

1) Conform inegalităţii demonstrate avem: $\sqrt{b-1} \leq \frac{b-1+1}{2} = \frac{b}{2}$, $\sqrt{a-1} \leq \frac{a}{2}$ şi deci membrul stâng se majorează cu $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab$. Avem egalitate dacă $a = b = 2$.

2) Pentru $x = 4a-1$ avem $\sqrt{4a-1} \leq \frac{4a-1+1}{2} = 2a$. Analog $\sqrt{4b-1} \leq 2b$. Deci $\sqrt{4a-1} + \sqrt{4b-1} \leq$ $\leq 2(a+b) = 2 \cdot 1 = 2$, cu egalitate în inegalitate dacă $4a - 1 = 1 = 4b - 1 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$.

Probleme propuse

1. **Dacă** $a, b \geq 0$, **atunci:** 1) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{(a+1)(b+1)}$; 2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$.

2. **Dacă** $a, b \in [0, 1]$ **sau** $a, b \in [1, \infty)$, **atunci:**
1) $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{(a+1)(b+1)}$; 2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{ab} + 1$.

3. **Dacă** $a, b \in \mathbb{R}$, **avem** $\sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{|a|+|b|}{\sqrt{2}}$. **Arătaţi că:**

1) $\sqrt{a^2+(1-a)^2} + \sqrt{b^2+(1-b)^2} + \sqrt{c^2+(1-c)^2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

2) $\sqrt{(1-a)^2+(1+b)^2} + \sqrt{(1-b)^2+(1+c)^2} + \sqrt{(1-c)^2+(1+a)^2} \geq 3\sqrt{2}$.

4. **Dacă** $x, y \geq 0$, **atunci** $\sqrt{x^2+xy+y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$ **şi deduceţi că dacă** $x, y, z \geq 0$, **atunci:**
$\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{z^2+zx+x^2} \geq \sqrt{3}(x+y+z)$.

5. **Dacă** $x, y > 0$, **iar** $a, b \in \mathbb{R}$, **atunci** $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$, **cu egalitate dacă** $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$. **Deduceţi inegalitatea** $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, **unde** $x, y, z > 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, **cu egalitate dacă** $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$. **Demonstraţi că dacă** $a, b, c > 0$, **atunci:** $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$.

6. **Arătaţi că dacă** $a, b > 0$, **atunci** $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$, **cu egalitate dacă** $a = b$ **şi apoi demonstraţi inegalităţile:** 1) $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq 1$, $\forall x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$;

2) $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} + \frac{b^4+c^4}{b^2+c^2} + \frac{c^4+a^4}{c^2+a^2} \geq ab + bc + ca$, $\forall a, b, c > 0$;

3) $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$, unde $a,b,c>0$, $abc=1$.

Indicaţie. $\frac{1}{a^3(b+c)}=\frac{b^2c^2}{ab+ac}$ şi se aplică 5.

7. **Dacă $x,y,z\geq 0$, atunci $x+y+z\leq\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$ şi deduceţi că dacă $a,b,c,d>0$, atunci au loc inegalităţile:**

1) $\sqrt{b^2+c^2+d^2}+\sqrt{a^2+c^2+d^2}+\sqrt{a^2+b^2+d^2}+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\geq\sqrt{3}(a+b+c+d)$.

2) $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{d}+\frac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{a}+\frac{\sqrt{c^2+d^2+a^2}}{b}+\frac{\sqrt{d^2+a^2+b^2}}{c}\geq 4\sqrt{3}$.

Indicaţie. Se înmulţeşte fiecare inegalitate cu $\sqrt{3}$.

8. 1) **Demonstraţi inegalitatea** $\frac{a^n}{b^m}\geq\frac{na^{n-m}-mb^{n-m}}{n-m}$, $n,m\in\mathbb{N}^*$, $n>m$, $a,b>0$, **pentru** $n=2$, $m=1$ **şi** $n=3$, $m=1$.

2) **Demonstraţi inegalitatea** $a^n+b^n\geq a^{n-k}b^k+a^kb^{n-k}$, $1\leq k\leq n$, $a,b>0$, **pentru** $n=2$, $k=1$ **şi pentru** $n=3$, $k=1$.

Operaţii cu numere reale

Adunarea

Demersurile făcute mai sus de a aproxima un număr real printr-un număr raţional scris sub forma unei fracţii zecimale finite ne vor permite să definim suma a două numere reale. Într-un fel acest demers este justificat deoarece $\mathbb{Q}$ este inclusă în $\mathbb{R}$ şi în cazul particular al sumei a două numere raţionale, ar trebui să regăsim suma lor aşa cum a fost descrisă la adunarea numerelor raţionale.
Pentru aceasta precizăm câteva elemente.

Definiţie. Se numeşte **sumă inferioară a două numere reale** suma a două aproximări prin lipsă a lor.
Se numeşte **sumă superioară a două numere reale** suma a două aproximări prin adaos a lor.

Exemplu. Fie $a=12,3(5)$, $b=1,4325$. Pentru aceste numere avem aproximările:
$12<12,3<12,35<12,355<\ldots<a<12,356<12,36<12,4<13$
$1<1,4<1,43<1,432<\ldots<b<1,433<1,44<1,5<2$.
Atunci sumele: $12+1$; $12+1,4;\ldots;12,3+1$; $12,3+1,4;\ldots$ sunt sume inferioare pentru $a+b$.
Sumele $13+2$; $13+1,5$; $12,4+1,5;\ldots$ sunt sume superioare pentru $a+b$.
Orice sumă inferioară a două numere este mai mică decât suma numerelor, iar orice sumă superioară a două numere este mai mare decât suma numerelor.
Se demonstrează că există un unic număr real, mai mare decât orice sumă inferioară şi mai mic decât orice sumă superioară a două numere reale.
Acum putem formula următoarea

Definiţie. Se numeşte **suma a două numere reale** a, b unicul număr real, notat $a+b$, mai mare sau egal decât orice sumă inferioară a numerelor şi mai mic decât orice sumă superioară a numerelor.

Exemplu. Pentru a defini suma numerelor $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$, utilizăm aproximările lor. Avem:

$1<\sqrt{2}<2$	$1<\sqrt{3}<2$
$1,4<\sqrt{2}<1,5$	$1,7<\sqrt{3}<1,8$
$1,41<\sqrt{2}<1,42$	$1,73<\sqrt{3}<1,74$
.....	.....

Prin definiţie suma numerelor reale $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ este unicul număr real, notat $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, caracterizat de inegalităţile cu sumele inferioare şi respectiv superioare ale celor două numere reale

$$2 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 4$$
$$3,1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,3$$
$$3,14 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,16$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Verificaţi că definiţia sumei coincide cu adunarea obişnuită a fracţiilor zecimale finite.

Observaţie. Suma dintre numărul real a şi numărul real $(-b)$, $a + (-b)$ o notăm prin $a - b$ şi defineşte **diferenţa numerelor** a, b.

Înmulţirea

Vom defini acum produsul a două numere reale pozitive utilizând aproximările prin lipsă şi prin adaos ale acestor numere. Avem următoarea:

Definiţie. Se numeşte **produs inferior a două numere reale pozitive**, produsul a două aproximări prin lipsă ale numerelor.
Se numeşte **produs superior a două numere reale pozitive**, produsul a două aproximări prin adaos ale numerelor.

Exemplu. Fie $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$. Produsele: $1 \cdot 1$; $1 \cdot 1,7$; $1,4 \cdot 1,7$; $1,41 \cdot 1,73$; ... sunt produse inferioare, iar produsele: $2 \cdot 2$; $2 \cdot 1,8$; $1,5 \cdot 1,8$; ... sunt produse superioare pentru numerele a, b.

Orice produs inferior a două numere reale pozitive este mai mic decât produsul celor două numere, iar orice produs superior a două numere reale pozitive este mai mare decât produsul celor două numere.
Se arată că există un unic număr real mai mare decât orice produs inferior şi mai mic decât orice produs superior a două numere reale pozitive.
Această ultimă remarcă permite să formulăm următoarea

Definiţie. Se numeşte **produsul a două numere reale pozitive** a, b, unicul număr real mai mare sau egal decât orice produs inferior al celor două numere şi mai mic decât orice produs superior al numerelor.

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci pentru efectuarea produsului dintre numerele a, b, notat $a \cdot b$, determinăm produsul valorilor absolute $|a|$ $|b|$, iar rezultatul va fi cu semnul plus dacă a, b au acelaşi semn, sau semnul minus dacă a, b au semne contrare.
Dacă unul din numere este egal cu zero, atunci produsul lor este zero.

Observaţie. Dacă $a \neq 0$, atunci numărul real $\frac{1}{a}$ cu proprietatea $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, se numeşte **inversul lui** a.

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, atunci produsul $a \cdot \frac{1}{b}$ notat $\frac{a}{b}$ reprezintă **câtul** dintre numerele reale a, b. A nu se confunda numărul raţional $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, cu împărţirea a două numere reale $\frac{a}{b}$. În general această ultimă fracţie nu reprezintă un număr raţional.

Proprietate. Adunarea şi înmulţirea numerelor reale se bucură de aceleaşi proprietăţi pe care aceste operaţii le au pe $\mathbb{Q}$.

Rămân valabile proprietăţile de compatibilitate ale operaţiilor de adunare şi înmulţire de pe $\mathbb{Q}$ cu relaţia de ordine $\leq$ (monotonia adunării şi înmulţirii) şi pe $\mathbb{R}$.

Formule de calcul prescurtat

Reamintim principalele formule de calcul prescurtat întâlnite în anul precedent, care facilitează calculul algebric. Acestea sunt $(a, b \in \mathbb{R})$:

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (binomul la pătrat);
2) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (diferenţa de pătrate);
3) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (suma cuburilor);
   $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (diferenţa cuburilor).

Exerciţiu propus. **Să se arate că** $(a, b, c \in \mathbb{R})$:

1) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$;
2) $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = \frac{1}{2}\left[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2\right]$;
   $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$;
3) $(a+b+c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a)$;
4) $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right) = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$.

Deduceţi de aici că $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow (a+b+c = 0$ **sau** $a = b = c)$.

5) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$ **şi apoi să se deducă inegalitatea** $(ax + by)^2 \leq$ $\leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$, $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, **cu egalitate dacă** $\exists t \in \mathbb{R}$ **astfel încât** $x = at$, $y = bt$.
Arătaţi că dacă $x, y \in \mathbb{R}$ **cu** $x^2 + y^2 = 1$, **atunci** $|x + y| \leq \sqrt{2}$.

6) $(ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 + (az-cx)^2 + (bz-cy)^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$, $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, **şi apoi deduceţi inegalitatea** $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$, **cu egalitate dacă există** $t \in \mathbb{R}$ **astfel încât** $x = at$, $y = bt$, $z = ct$.
Arătaţi că dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, **atunci** $|x + y + z| \leq \sqrt{3}$.

Probleme rezolvate

1. **Determinaţi numerele între care sunt cuprinse suma, diferenţa, produsul şi câtul numerelor** a, b **dacă** $2 < a < 3$, $4 < b < 5$.

R. Avem $2 + 4 < a + b < 3 + 5$, adică $6 < a + b < 8$. Pentru $a - b$ observăm că din $4 < b < 5$ rezultă $-5 < -b < -4$ şi deci $2 - 5 < a - b < 3 - 4$, adică $-3 < a - b < -1$.
Pentru a stabili cele două duble inegalităţi am aplicat monotonia adunării.
Utilizăm monotonia înmulţirii şi avem: $2 \cdot 4 < ab < 3 \cdot 5$, adică $8 < ab < 15$.
Câtul $\frac{a}{b}$ îl reducem la produsul $a \cdot \frac{1}{b}$. Pentru aceasta din $4 < b < 5$, avem: $\frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{4}$. Acum rezultă uşor $\frac{2}{5} < \frac{a}{b} < \frac{3}{4}$.

2. **Dacă** $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = 3$, $xy = 5$, **atunci calculaţi:** $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^4 + y^4$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$.

R. Avem: $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 9 - 10 = -1$, $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 3(-1 - 5) = -18$; $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 1 - 2 \cdot 25 = -49$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{3}{5}$; $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} = -\frac{1}{25}$.

3. **Să se arate că** $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ **şi apoi să se demonstreze că** $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2009^2} < 1$. **Din** $\frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ **deduceţi** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4}$.

R. Avem $k^2 > k(k-1)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ şi de aici $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Punând aici $k = 2, \ldots, 2009$

şi însumând inegalităţile rezultă: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2009^2}<1-\frac{1}{2009}<1$.

Valoarea absolută sau modulul unui număr real a are aceeaşi definiţie pe care am prezentat-o la ordonarea numerelor întregi, adică $|a|=\begin{cases} a, & a\geq 0 \\ -a, & a<0. \end{cases}$

Proprietăţi ale modulului

1) $|a|\geq 0, \forall a\in\mathbb{R}$, $|a|=0\Leftrightarrow a=0$; **2)** $|a|=\max(-a,a)$; **3)** $|-a|=|a|, \forall a\in\mathbb{R}$;

4) $|a|\leq\varepsilon, \varepsilon>0\Leftrightarrow -\varepsilon\leq a\leq\varepsilon$; **5)** $|a+b|\leq|a|+|b|, \forall a,b\in\mathbb{R}$; **6)** $|ab|=|a|\,|b|, \forall a,b\in\mathbb{R}$ (modulul produsului este egal cu produsul modulelor);

7) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}, \forall a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0$ (modulul câtului este egal cu câtul modulelor).

Demonstraţie. Vom prezenta demonstraţii pentru 5) şi 6).

5) Dacă $a,b\geq 0$, atunci $a+b\geq 0$ şi deci $|a+b|=a+b=|a|+|b|$;

dacă $a,b\leq 0$, atunci $a+b\leq 0$ şi deci $|a+b|=-a-b=|a|+|b|$.

Dacă $a>0$, $b\leq 0$, atunci $a+b\geq 0$ sau $a+b\leq 0$.

Dacă $a+b\geq 0$, atunci $|a+b|=a+b\leq a=|a|<|a|+|b|$.

Dacă $a+b\leq 0$, atunci $|a+b|=-a-b<-b=|b|<|a|+|b|$.

6) Se discută mai multe cazuri:

6.1) $a,b\geq 0\Rightarrow ab\geq 0$ când $|ab|=ab=|a|\,|b|$;

6.2) $a,b\leq 0\Rightarrow ab\geq 0$ când $|ab|=ab=(-a)(-b)=$ a$|\,|b|$;

6.3) $a\geq 0$, $b\leq 0\Rightarrow ab\leq 0$ şi deci $|ab|=-ab=a(-b)=|a|\,|b|$;

6.4) $a\leq 0$, $b\geq 0$, analog cu 6.3). uu

Observaţii. **1)** Avem $|a+b|=|a|+|b|\Leftrightarrow ab\geq 0$ (modulul sumei este egal cu suma modulelor dacă numerele au acelaşi semn).

2) Dacă pentru şirul (a_n), $|a_{n+1}-a_n|\leq 1, \forall n$, atunci $|a_n-a_m|\leq|n-m|, \forall n,m\in\mathbb{N}^*$.

3) Dacă $x,y,z\in\mathbb{R}$, atunci $|x|+|y|+|z|\leq|x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|$.

4) Dacă $|a-b|\geq|c|$, atunci $(a-b-c)(b-c-a)\leq 0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Dacă $|a-b|\geq|c|$, $|b-c|\geq|a|$, $|c-a|\geq|b|$, atunci unul din numere este egal cu suma celorlalte două.

5) Dacă $|a+b|+|a-b|\leq 2$, atunci $a^2+b^2\leq 2$.

Probleme rezolvate

1. Arătaţi că dacă $|x-y|<\varepsilon, \forall\varepsilon>0$, atunci $x=y$.

R. Prin reducere la absurd, dacă $x\neq y$, atunci alegem $\varepsilon=|x-y|/2$ şi avem $|x-y|<|x-y|/2$, adică $|x-y|<0$, fals. Deci, $x=y$.

2. Să se rezolve ecuaţia $|x|+|x-1|=1$.

R. Se explicitează modulele: $|x|=(x, x\geq 0; -x, x<0)$, $|x-1|=(x-1, x\geq 1; 1-x, x<1)$ şi se rezolvă ecuaţia după poziţia lui x faţă de valorile 0 şi 1 (din explicitarea mdulelor). Avem cazurile:

1) $x\in(-\infty,0)$ şi ecuaţia devine $-x+1-x=1\Leftrightarrow x=0$ care nu este soluţie deoarece $0\notin(-\infty,0)$.

2) $x\in[0,1)$ când ecuaţia se scrie $x+1-x=1\Leftrightarrow 1=1$, ceea ce arată că orice $x\in[0,1)$ este soluţie a ecuaţiei.

3) $x\in[1,\infty)$ şi ecuaţia devine $x+x-1=1\Leftrightarrow x=1$, valoare care este soluţie deoarece $1\in[1,\infty)$.

Reunind soluţiile găsite la 1), 2), 3) obţinem $S=[0,1)\cup\{1\}=[0,1]$.

3. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} |x-2|+|y-3|=4 \\ y=3+|x-2|. \end{cases}$

R. Din a doua ecuaţie $y \geq 3$ şi $|x-2|=y-3$, care înlocuit în prima ecuaţie dă $2(y-3)=4$, adică $y=5$. Din ecuaţia a doua $|x-2|=2$ sau $x-2=\pm 2$, adică $x \in \{0,4\}$. Soluţiile sistemului sunt $(0,5)$, $(4,5)$.

4. Să se arate că $\forall x \in \mathbb{R}$, avem inegalitatea $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{2}$.

R. Inegalitatea este echivalentă cu $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left((x+1)^2 \geq 0 \text{ şi } (x-1)^2 \geq 0\right)$, evident adevărate $\forall x \in \mathbb{R}$.

5. Să se rezolve inecuaţia $|x-1| \leq 3$.

R. Se explicitează modulul $|x-1|=(x-1,\ x \geq 1;\ 1-x,\ x<1)$ şi se rezolvă inecuaţia în cazurile:

1) $x \in (-\infty, 1)$. Inecuaţia devine $1-x \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x$. Cum $x<1$ rezultă $x \in (-\infty,1) \cap (-2,\infty) = (-2,1) = S_1$.

2) $x \in [1,\infty)$. Inecuaţia se scrie $x-1 \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 4$. Ţinând seama de ipoteza din 2) deducem $x \in [1,\infty) \cap (-\infty,4] = [1,4] = S_2$.

Din 1), 2) mulţimea soluţiilor inecuaţiei se obţine prin reuniunea soluţiilor S_1, S_2, adică $S = S_1 \cup S_2 = (-2,1] \cup [1,4] = (-2,4]$.

6. Dacă $x,y>0$, $|x-y|<2$, atunci $x+y \leq 2\sqrt{xy+1}$.

R. Avem $x^2-2xy+y^2<4 \Leftrightarrow (x+y)^2<4(1+xy)$.

Probleme propuse

1. Să se arate că $|x+y+z| \leq |x|+|y|+|z|$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

2. Să se calculeze: 1) $|1-\sqrt{2}|+\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$; 2) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}-3|\sqrt{3}-1,73|$; 3) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

3. Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:

1) $E_1=\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2-2a+1}$; 2) $E_2=\sqrt{4-4a+a^2}+\sqrt{4a^2-4a+1}$.

4. a) Să se arate că $a \in [2,3]$, atunci expresia $E(a)=\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2-6a+9}$ are valoare constantă.

2) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care expresia $E(a)=\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{a^2+2a+1}$ are valoare constantă.

5. 1) Să se rezolve ecuaţiile: 1) $|x+1|=-1$; 2) $|2x+1|=0$; 3) $|2x-4|+|x-2|=0$;

4) $|x-3|=2$; 5) $|x-1|=|x+3|$; 6) $x+|x|=4$; 7) $2|x|-|x-1|=3$; 8) $2|x|+|1-2x|=1$;

9) $|x|+|x+1|=5$; 10) $|x-3|+2|x+1|=4$. Găsiţi cea mai mică soluţie întreagă.

2) Să se rezolve inecuaţiile: 1) $|x+3| \leq 0$; 2) $|x-1|<-1$; 3) $|x-2| \leq 1$; 4) $|2x-1| \geq 1$;

5) $x+|x+1| \leq 2$; 6) $3x-1 \leq 2|x|$; 7) $|x+3|+|x-4| \leq 1$. Găsiţi cea mai mică soluţie.

8) $|x-1|+|2-x| \geq 3$. Găsiţi cea mai mică soluţie $x \in \mathbb{N}^*$.

9) $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{100}$, $n \in \mathbb{N}$. Găsiţi cea mai mică soluţie.

10) $\left|\frac{3n}{n+2}-3\right|>\frac{1}{100}$, $n \in \mathbb{N}$. Găsiţi cea mai mare soluţie.

6. Să se arate că: 1) $x \in (3,5) \Leftrightarrow |x-4|<1$; 2) dacă $x,y \in (3,5)$, atunci $xy-4(x+y)+20 \in (3,5)$.

7. Să se rezolve sistemele de ecuaţii: 1) $\begin{cases} |x|-2|y|=-5 \\ 3|x|+|y|=6 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2|x|-3|y|=-5 \\ 3|x|+7|y|=1 \end{cases}$

8. Dacă $x,y,z>0$, $|x-y|,|y-z|,|x-z|<2$, atunci $\sum x \leq \sum \sqrt{xy+1}$.

Partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr

Definiţie. Fie $a \in \mathbb{R}$. Se numeşte **partea întreagă a numărului** a, numărul notat $[a]$ (citim: partea întreagă a lui a), care reprezintă cel mai mare întreg mai mic sau egal cu a.

Deci, $[a] \in \mathbb{Z}$ şi $[a] \leq a < [a] + 1$.

Se numeşte **parte fracţionară a numărului** a, numărul notat $\{a\}$ (citim: parte fracţionară a lui a), care reprezintă diferenţa dintre a şi partea sa întregă, $[a]$.

Deci, $\{a\} = a - [a]$.

Trebuie observat că există o infinitate de numere întregi mai mici sau egale cu a. Partea întregă a lui a, $[a]$, este cel mai mare dintre toţi întregii mai mici sau egali cu a.

Din $[a] \leq a < [a] + 1$ rezultă $0 \leq \{a\} = a - [a] < 1$. Deci partea fracţionară a lui a este un număr pozitiv subunitar, $0 \leq \{a\} < 1$.

Exemple. 1) $[3{,}76] = 3, \{3{,}76\} = 3{,}76 - [3{,}76] = 3{,}76 - 3 = 0{,}76$;
2) $[5] = 5, \{5\} = 5 - [5] = 5 - 5 = 0$;
3) $[-3{,}16] = -4, \{-3{,}16\} = -3{,}16 - [-3{,}16] = -3{,}16 + 4 = 4 - 3 - 0{,}16 = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$;
4) $[-3] = -3, \{-3\} = -3 - [-3] = -3 + 3 = 0$.

Proprietăţi

Prezentăm câteva proprietăţi care rezultă din definiţie.

I_1. Pentru $m \in \mathbb{Z}$, $x \in [m, m+1) \Leftrightarrow [x] = m$ **(toate numerele reale cuprinse între două numere întregi consecutive au aceeaşi parte întreagă).**

Exemplu. Determinaţi $x \in \mathbb{R}$, pentru care $[2x] = 3$. Din definiţie, avem: $3 \leq 2x < 4$, iar de aici $\frac{3}{2} \leq x < 2$. Deci, $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$.

I_2. $x, y \in [m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [x] = [y]$ **(două numere reale cuprinse între doi întregi consecutivi au aceeaşi parte întreagă).**

Să observăm că intervalul $[m, m+1)$ este de lungime 1. Dacă însă două numere reale sunt la distanţă mai mică decât 1 nu rezultă că au aceeaşi parte întreagă! N-avem decât să luăm $x = 1{,}9$ şi $y = 2{,}1$ când $|y - x| = 0{,}2 < 1$ şi pentru care $[x] = 1$, $[y] = 2$.

I_3. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

I_4. $[m + x] = m + [x]$, $\{x + m\} = \{x\}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Cum $[x] \leq x < [x] + 1$, avem $[x] + m \leq x + m < [x] + m + 1$, ceea ce arată că numărul $x + m$ este cuprins între doi întregi consecutivi. Deci, $[m + x] = m + [x]$.
Avem: $\{x + m\} = x + m - [x + m] = x + m - [x] - m = x - [x] = \{x\}$. ■

Probleme rezolvate

1. a) **Arătaţi că** $[\sqrt{n(n+1)}] = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ **şi** $0{,}4 < \{\sqrt{n(n+1)}\} < 0{,}5$.
b) **Demonstraţi egalitatea:** $[\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] = 6$.

R. a) Avem inegalitatea imediată $n < \sqrt{n(n+1)} < n + 1$, din care se deduce egalitatea şi

$n+\frac{4}{10}<\sqrt{n(n+1)}<n+\frac{5}{10}$ dă dubla inegalitate.

b) Se aplică a) (pentru $n=1$, $n=2$ şi $n=3$) şi avem: $[\sqrt{1\cdot 2}]=1$, $[\sqrt{2\cdot 3}]=2$, $[\sqrt{3\cdot 4}]=3$.

2. **Să se rezolve ecuaţiile:** a) $\left[\frac{x+1}{3}\right]=x-2$; b) $[x-1]=\sqrt{3}[2x-3]$; c) $x+\{x\}=2[x]$.

R. a) Membrul stâng al ecuaţiei este număr întreg. Din egalitate se deduce $x-2\in\mathbb{Z}$, adică $x\in\mathbb{Z}$. Din definiţia părţii întregi avem inegalităţile: $\left[\frac{x+1}{3}\right]\le\frac{x+1}{3}<\left[\frac{x+1}{3}\right]+1$ sau $x-2\le\frac{x+1}{3}<x-2+1$ sau $3x-6\le x+1<3x-3$.

De aici deducem $x\in\left(2,\frac{7}{2}\right]$. Cum $x\in\mathbb{Z}$, reţinem $x=3$, soluţie a ecuaţiei date.

b) Să observăm că $[x-1],[2x-3]\in\mathbb{Z}$, iar $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$. Egalitatea are loc dacă $[x-1]=0$ şi $[2x-3]=0$, egalităţi care au loc dacă $0\le x-1<1$ şi $0\le 2x-3<1$. De aici, se obţine $x\in\left[\frac{3}{2},2\right)$.

c) Considerăm $x=[x]+\{x\}$ şi ecuaţia se rescrie sub forma $2\{x\}=[x]$. Să observăm că $x=0$ este soluţie a ecuaţiei. Cum $[x]\in\mathbb{Z}$ şi $\{x\}\in[0,1)$, deducem că $2\{x\}\in[0,2)\cap\mathbb{Z}$. De aici, $2\{x\}=1$ ($2\{x\}=0$, am văzut mai sus), adică $\{x\}=\frac{1}{2}$ şi $[x]=1$. Deci $x=[x]+\{x\}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Soluţiile ecuaţiei sunt $x_1=0$, $x_2=\frac{3}{2}$.

3 **a) Să se arate că are loc identitatea lui Hermite** $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{3x-1}{4}\right]+\left[\frac{3x+1}{4}\right]=1$.

R. a) Se demonstrează, mai general, identitatea lui Hermite

$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Se pune $[x]=k\in\mathbb{Z}$ şi deci $x\in[k,k+1)=\left[k,k+\frac{1}{n}\right)\cup\left[k+\frac{1}{n},k+\frac{2}{n}\right)\cup\ldots\cup\left[k+\frac{n-1}{n},k+\frac{n}{n}\right)$, deci $\exists i\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ cu $x\in\left[k+\frac{i}{n},k+\frac{i+1}{n}\right)$.

Deci $S=\sum_{p=0}^{n-1}\left[x+\frac{p}{n}\right]=\sum_{p=0}^{n-i-1}\left[x+\frac{p}{n}\right]+\sum_{p=n-i}^{n}\left[x+\frac{p}{n}\right]$, unde $\left[x+\frac{p}{n}\right]=k$, dacă $p=\overline{0,n-i-1}$ şi $\left[x+\frac{p}{n}\right]=k+1$, dacă $p=\overline{n-i,n}$. Deci $S=(n-i)k+i(k+1)=nk+i$, iar $[nx]=nk+i$.

b) Punem $\frac{3x-1}{4}=t$ şi $\frac{3x+1}{4}=t+\frac{1}{2}$, iar ecuaţia devine: $[2t]=1\Leftrightarrow 2t\in[1,2)\Leftrightarrow t\in\left[\frac{1}{2},1\right)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{3x-1}{4}\in\left[\frac{1}{2},1\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le\frac{3x-1}{4}<1\Leftrightarrow x\in[1,5/3)$.

4. **Să se rezolve sistemele:** a) $\begin{cases}[x]+\{y\}=1,5\\ [y]+\{y\}=3,3\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+[y]+\{z\}=1,1\\ y+[z]+\{x\}=2,2\\ z+[x]+\{y\}=3,3.\end{cases}$

R. a) Cum pentru $a\in\mathbb{R}$, $[a]\in\mathbb{Z}$ şi $\{a\}\in[0,1)$, din prima ecuaţie $[x]=1$, $\{y\}=0,5$, iar din a doua ecuaţie $[y]=3$, $\{x\}=0,3$. De aici $x=[x]+\{x\}=1,3$ şi $y=[y]+\{y\}=3,5$.

b) Se adună ecuaţiile şi rezultă $x+y+z=3,3$. Se adună primele două ecuaţii din care se scade relaţia precedentă şi avem $[y]+\{x\}=0$, iar de aici $[y]=\{x\}=0$. Prima ecuaţie devine $[x]+\{z\}=1,1$, adică $[x]=1$, $\{z\}=0,1$. Cu acestea a doua ecuaţie devine $\{y\}+[z]=2,2$ şi deci $[z]=2$, $\{y\}=0,2$. În final

$x = [x] + \{x\} = 1$, $y = 0,2$, $z = 2,1$.

5. **Să se calculeze sumele:** $S_1 = \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8}}\right]$ **(utilizaţi** $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$**),** $S_2 = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \ldots + [\sqrt{8}]$.

R. Avem $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8}} > 1 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{9} - \sqrt{9}) = 1 + 2(\sqrt{9} - \sqrt{2}) = 7 - 2\sqrt{2} > 7 - 3 = 4$, iar, pe de altă parte, $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8}} < 1 + 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{8} - \sqrt{7}) = 1 + 2(\sqrt{8} - 1) = -1 + 4\sqrt{2} < 5$, unde am utilizat pentru fiecare fracţie din sumă prima şi respectiv a doua inegalitate din enunţ. Deci, $S_1 = 4$.

Pentru a determina a doua sumă să observăm că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ cu $n^2 \leq k < (n+1)^2$ avem $[\sqrt{k}] = n$. Atunci avem $S_2 = ([\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]) + ([\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + [\sqrt{6}] + [\sqrt{7}] + [\sqrt{8}]) = (1+1+1) + (2+2+2+2+2) = 13$.

6. **Să se arate că** $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

R. Avem $x = [x] + \{x\}$, $y = [y] + \{y\}$ şi deci $[x+y] = [[x] + [y] + \{x\} + \{y\}] = [x] + [y] + [\{x\} + \{y\}]$. Dar $\{x\} + \{y\} \in [0,2)$ şi deci $[\{x\} + \{y\}] \in \{0,1\}$. Prin urmare $[x+y] \geq [x] + [y]$ şi $[x+y] \leq [x] + [y] + 1$.

7. **Să se rezolve ecuaţia:** $\left[\frac{x-2}{3}\right] = \frac{x+2}{4}$.

R. Notăm $\left[\frac{x-2}{3}\right] = k \in \mathbb{Z}$. Din $k = \frac{x+2}{4}$ se deduce $x = 4k - 2$. Aplicăm definiţia părţii întregi şi obţinem $k \leq \frac{x-2}{3} < k+1$, sau ţinând seama de exprimarea $x = 4k - 2$, dubla inegalitate se rescrie $k \leq \frac{4k-4}{3} < k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. De aici $k \in [4,7) \cap \mathbb{Z} = \{4,5,6\}$.

Pentru $k = 4$ rezultă $x_1 = 14$; pentru $k = 5$ avem $x_2 = 18$; pentru $k = 6$ se obţine $x_3 = 22$.

Deci soluţiile ecuaţiei date sunt $x_1 = 14$, $x_2 = 18$, $x_3 = 22$.

8. **Să se rezolve ecuaţia:** $\frac{1}{\{x\}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{[x]}$.

R. Ecuaţia există dacă $x \notin \mathbb{Z} \cup (0,1)$. Ecuaţia nu are soluţii $x < 0$ (membrul stâng pozitiv, membrul drept negativ). De asemenea dacă $x > 2$, atunci $[x] \geq 2$, iar $\frac{1}{x} + \frac{1}{[x]} < 1$, în timp ce $\frac{1}{\{x\}} > 1$. Rămâne $x \in (1,2)$, când $[x] = 1$. Ecuaţia este $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + 1$ cu $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ soluţie.

Probleme propuse

1. **Să se arate că:** $\left[\sqrt{n^2+3n+2}\right] = n+1$ **şi** $0,4 < \left\{\sqrt{n^2+3n+2}\right\} < 0,5$.

2. **Să se rezolve ecuaţiile:** a) $\left[\frac{x+2}{3}\right] = \frac{x+3}{4}$; b) $\left[\frac{3x+4}{5}\right] = \frac{4x+3}{5}$.

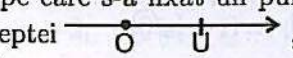
3. **Să se rezolve ecuaţia:** $[x] + \sqrt{x} = 2$.

4. **Să se arate că** $[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5. **Să se rezolve sistemele:**

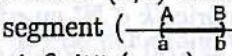
1) $\begin{cases} 3[x] + 4[y] = -6 \\ 2[x] - 3[y] = 13 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2\{x\} - 3\{y\} = -\frac{5}{6} \\ 3\{x\} - \{y\} = \frac{1}{2} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} [x] + \{y\} = 2,6 \\ [y] + \{x\} = 3,7 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x + [y] = 4,1 \\ y - [x] = 2,5 \end{cases}$

Intervale de numere reale

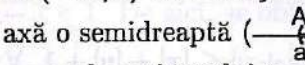
Aşa cum ştiţi din anii precedenţi, fiecărui număr real îi corespunde pe axa numerelor real un punct unic (Prin axă de numere aţi înţeles o dreaptă pe care s-a fixat un punct O – numit origine –, o unitate de măsură şi un sens pozitiv de parcurgere a dreptei 

, $OU = 1$) şi reciproc, fiecărui punct de pe axă îi corespunde un unic număr real. Asupra acestei corespondenţe între numerele reale şi mulţimea punctelor de pe axă vom reveni în ultimul paragraf al acestui capitol.

Intervalele de numere reale se reprezintă comod pe axa numerelor reale. Aceste intervale le numim **intervale numerice**. Dacă $a < b$, atunci prin **lungimea intervalului** $[a, b]$ ((a, b), $[a, b)$, $(a, b]$) înţelegem numărul $b - a$.

Un interval numeric de lungime finită (a, b) este mulţimea de numere situate între două numere date, având reprezentarea pe axă un segment (

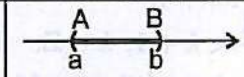
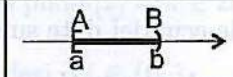
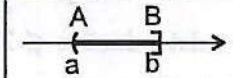
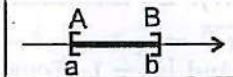
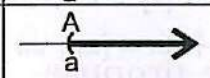
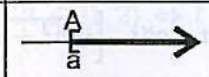
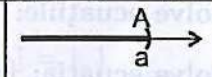
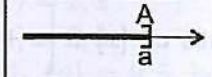
).

Un interval numeric de lungime infinită (a, ∞) sau $(-\infty, a)$ este mulţimea de numere mai mari sau mai mici decât un număr dat şi are reprezentarea pe axă o semidreaptă (

).

Dăm mai jos, descrierea principalelor intervale, pe care le veţi întâlni în studiul matematicii, cu ajutorul parantezelor şi inegalităţilor.

Fie a, b două numere reale, $a < b$. Mulţimea mai îngroşată pe axa reală reprezintă punctele corespunzătoare mulţimii descrise.

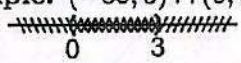
Denumirea mulţimii	Notaţia şi descrierea mulţimii	Reprezentarea mulţimii pe axa reală
1) Intervalul deschis a, b sau intervalul deschis de capete a, b	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
2) Intervalul închis la stânga şi deschis la dreapta	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
3) Intervalul deschis la stânga şi închis la dreapta	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
4) Intervalul închis a, b	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
5) Semidreaptă deschisă la stânga şi nemărginită la dreapta	$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
6) Semidreaptă închisă la stânga şi nemărginită la dreapta	$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
7) Semidreaptă deschisă la dreapta şi nemărginită la stânga	$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
8) Semidreaptă închisă la dreapta şi nemărginită la stânga	$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
9) Mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < \infty\}$	

Observăm că intervalele descrise la 1) – 4) sunt de lungime finită, în timp ce intervalele 5) – 9) au lungime infinită.

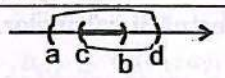
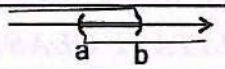
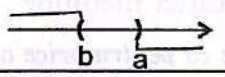
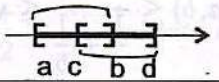
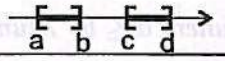
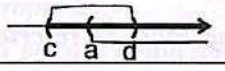
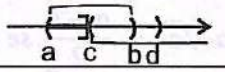
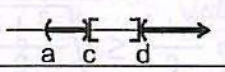
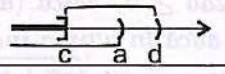
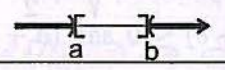
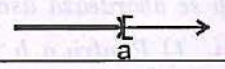
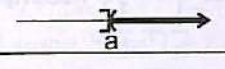
Operaţii cu intervale de numere reale

Deoarece intervalele sunt mulţimi, toate operaţiile studiate la mulţimi se regăsesc şi aici. Locul diagramei Venn-Euler este luat de segmente, semidrepte sau dreapta dată. De obicei, când se face intersecţia a două sau mai multe mulţimi pe axa reală, acestea se haşurează diferit.

Exemple. $(-\infty, 3) \cap (0, \infty) = (0, 3)$. Partea comună este (0,3), fiind de două ori haşurată.



În tabelul următor ilustrăm câteva situaţii în care sunt implicate operaţiile cu intervale, iar alăturat rezultatul operaţiei este figurat pe axa reală mai îngroşat.

Operaţia	Intervalele considerate	Rezultatul operaţiei	Reprezentarea rezultatului
Intersecţia	$(a,b), (c,d)$ $a < c < b < d$	(c,b)	
	(a,∞), $(-\infty,b)$ $a < b$	(a,b)	
Intersecţia	(a,∞), $(-\infty,b)$, $b < a$	$\emptyset$	
Reuniunea	$[a,b]$, $[c,d]$, $a < c < b < d$	$[a,d]$	
	$[a,b]$, $[c,d]$, $b < c$	$[a,b] \cup [c,d]$	
	(a,∞), (c,d), $c < a < d$	(c,∞)	
Diferenţa	(a,b), (c,d), $a < c < b < d$	$(a,c]$	
	(a,∞), $[c,d]$, $a < c < d$	$(a,c) \cup (d,\infty)$	
	$(-\infty,a)$, (c,d), $c < a < d$	$(-\infty,c]$	
Complementara în raport cu $\mathbb{R}$	$[a,b]$, $a < b$	$\complement[a,b] =$ $= (-\infty,a) \cup (b,\infty)$	
	$[a,\infty)$	$\complement[a,\infty) = (-\infty,a)$	
	$(-\infty,a]$	$\complement(-\infty,a] = (a,\infty)$	

Aplicaţie. Reprezentaţi pe axa reală, rezultatul operaţiei în fiecare din cazurile:

1) $[-3,5] \cap (0,6)$; 2) $(-\infty,3] \cap [0,4)$; 3) $(1,\infty) \cap [0,3]$; 4) $(-\infty,1) \cap (0,\infty)$; 5) $(-2,8) \cap (9,10)$;

6) $(-3,3)\cap(0,1)$; 7) $(0,3)\cup[2,4]$; 8) $(-5,1)\cup[-3,2]$; 9) $(-\infty,0]\cup(-3,1)$;
10) $(1,7)\cup[0,\infty)$; 11) $(-\infty,0]\cup[-1,\infty)$; 12) $[-1,5)-[0,2]$; 13) $[-3,0]-[1,2]$;
14) $(-1,1)-(-2,2)$; 15) $(-4,1)-(0,3)$; 16) $(-\infty,1)-(-3,5)$; 17) $\complement(-2,2)$;
18) $\complement[-1,\infty)$; 19) $\complement(1,\infty)$; 20) $\complement(-\infty,0]$.

Ordinea efectuării operaţiilor pe $\mathbb{R}$

Se efectuează mai întâi operaţiile de ordinul trei (ridicarea la putere), de ordinul doi (înmulţirile şi împărţirile) şi apoi cele de ordinul întâi (adunările şi scăderile), adică se păstrează ordinea efectuării operaţiilor de pe submulţimea $\mathbb{Q}$.

Dacă în exerciţiu figurează paranteze, atunci se efectuează: 1) calculele din parantezele rotunde; 2) calculele din parantezele drepte; 3) calculele din parantezele acolade cu respectarea, pentru fiecare paranteză, a ordinii efectuării calculelor.

Excursie matematică

INEGALITĂŢI CLASICE REMARCABILE

1. Inegalitatea mediilor

Să se arate că pentru orice $a,b>0$ au loc inegalităţile

$$\min(a,b)\le\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\le\max(a,b).$$

Avem egalitate în inegalităţi dacă $a=b$.

R. *Presupunem $a\le b$. Atunci prima inegalitate devine $a\le\frac{2ab}{a+b}$ sau $a(a+b)\le 2ab$ sau încă $a^2\le ab$ sau în fine $a(a-b)\le 0$, ceea ce este evident. Are loc egalitate $(a\neq 0)$ dacă $a-b=0$, adică pentru $a=b$. A doua inegalitate se rescrie $\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}$ sau încă $2\sqrt{ab}\le a+b$ sau $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$, adevărat, fiind pătratul unui număr real. Avem egalitate dacă $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, ceea ce dă $a=b$.*

Inegalitatea $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ se rescrie echivalent $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$, ceea ce este adevărat. Avem egalitate în inegalitate dacă $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, adică dacă $a=b$.

Inegalitatea $\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ prin ridicare la pătrat se rescrie echivalent $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$ sau încă $a^2+b^2-2ab\ge 0$, adică $(a-b)^2\ge 0$, evident, fiind pătratul unui număr real. Se obţine egalitate în inegalitate dacă în ultima inegalitate avem egalitate, adică dacă $a-b=0$ sau $a=b$.

În fine, inegalitatea $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\le b$ prin ridicare la pătrat se scrie echivalent $\frac{a^2+b^2}{2}\le b^2$ sau $a^2\le b^2$ sau $(a-b)(a+b)\le 0$ sau $(a+b>0)$ $a-b\le 0$, ceea ce este adevărat. Avem egalitate în inegalitate dacă $a=b$.

Cazul $a>b$ se abordează asemănător.

Observaţii. 1) Pentru $a,b>0$ se notează:

$H(a,b)=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, ***media armonică a numerelor*** a,b;

$G(a,b)=\sqrt{ab}$, ***media geometrică a numerelor*** a,b;

$A(a,b)=\frac{a+b}{2}$, ***media aritmetică a numerelor*** a,b;

$Q(a,b)=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, *media pătratică a numerelor* a,b;

Deci au loc inegalităţile $\min(a,b)\le H(a,b)\le G(a,b)\le A(a,b)\le Q(a,b)\le\max(a,b)$.

2) Analog se pot defini pentru n *numere strict pozitive* $a_1,a_2,\cdots,a_n$

media armonică a numerelor $a_1,a_2,\cdots,a_n$, $H(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$,

media geometrică a numerelor $a_1,a_2,\cdots,a_n$, $G(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$,

media aritmetică a numerelor $a_1,a_2,\cdots,a_n$, $A(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,

media pătratică a numerelor $a_1,a_2,\cdots,a_n$, $Q(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$.

Se demonstrează că au loc inegalităţile

$\min(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le H(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le G(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le A(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le Q(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le$
$\le\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

Avem egalitate în inegalităţi dacă $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Aplicaţii

1. ***Să se arate că dacă*** $a,b,c\ge0$, ***atunci*** $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$.

R. *Se aplică inegalitatea între media geometrică şi cea aritmetică (cunoscută şi sub denumirea de inegalitaea lui Cauchy) şi avem* $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$, *cu egalitate dacă* $a=b$; $\sqrt{bc}\le\dfrac{b+c}{2}$, *cu egalitate dacă* $b=c$; $\sqrt{ac}\le\dfrac{a+c}{2}$, *cu egalitate dacă* $a=c$.

Adunând, membru cu membru, aceste inegalităţi obţinem

$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\le\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b+c}{2}+\dfrac{a+c}{2}=a+b+c$, *adică inegalitatea propusă.*

Avem egalitate în inegalitatea dată dacă are loc egalitate în cele trei inegalităţi pe care le-am adunat, adică dacă $a=b=c$.

2. ***Arătaţi că dacă*** $a,b,c,d\ge0$, ***atunci*** $\dfrac{a+b+c+d}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}$.

R. *Cum* $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ *şi* $\dfrac{c+d}{2}\ge\sqrt{cd}$, *atunci* $\dfrac{a+b+c+d}{4}=\dfrac{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}}{2}\ge\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}\ge$
$\ge\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}$, *cu egalitate dacă* $a=b$, $c=d$ *şi* $\sqrt{ab}=\sqrt{cd}$, *ceea ce dă* $a=b=c=d$.

3. ***Dacă*** $x,y,z\ge0$, ***atunci*** $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(x+y+z)\ge9\sqrt{xyz}$.

R. *Inegalităţile între mediile aritmetică şi geometrică ne permit să scriem*

$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge3\sqrt[3]{\sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{z}}=3\sqrt[6]{xyz}$; $\quad x+y+z\ge3\sqrt[3]{xyz}$.

Se face produsul acestor inegalităţi şi rezultă $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(x+y+z)\ge9\sqrt[6]{(xyz)^3}=9\sqrt{xyz}$.

Avem egalitate în inegalitate dacă $x=y=z$.

4. ***Să se arate că:*** $\sqrt[n]{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}<\dfrac{n+1}{2}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge2$.

R. *Se aplică inegalitatea între media geometrică şi cea aritmetică pentru numerele diferite* $1,2,\cdots,n$ *şi avem* $\sqrt[n]{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n}<\dfrac{1+2+\cdots+n}{n}=\dfrac{n(n+1)}{2n}=\dfrac{n+1}{2}$, *unde am utilizat suma* $S_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. *(Pentru deducerea ei se scrie* S_n *în două moduri:* $S_n=1+2+\cdots+n$, $S_n=n+(n-1)+\cdots+1$ *şi se adună obţinând* $2S_n=n(n+1)$.*) Inegalitatea este strictă deoarece numerele* $1,2,\ldots,n$ *sunt diferite.*

5. *Dacă* $a, b > 0$, *atunci* $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.

R. *Aplicăm inegalitatea între media aritmetică şi cea geometrică şi rezultă*

$$\sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{(\sqrt{a})^2(\sqrt[3]{b})^3} = 5\sqrt[5]{ab}.$$

Avem egalitate dacă $\sqrt{a} = \sqrt[3]{b}$, *adică dacă* $a^3 = b^2$.

Observaţii. 1) *Analog se poate arăta că pentru orice* k *numere pozitive* $a_1, a_2, ..., a_k$ *şi numerele naturale* $p_1, p_2, ..., p_k$ *cu suma* $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = p$ *avem* $p_1 \sqrt[p_1]{a_1} + p_2 \sqrt[p_2]{a_2} + \cdots + p_k \sqrt[p_k]{a_k} \geq p\sqrt[p]{a_1 a_2 \cdots a_k}$.

2) *Dacă se scrie inegalitatea sub forma (am pus* $a = y^5$, $b = x^5$) $\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} \geq xy$, *se obţine un caz particular al* **inegalităţii lui Young**:

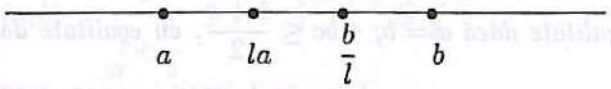
Pentru $x, y, \alpha, \beta > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ *şi* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, *atunci* $\frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{y^\beta}{\beta} \geq xy$.

6. ***Se dau*** n ***numere pozitive*** $a_1, a_2, ..., a_n$ ***astfel încât*** $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$.
Să se demonstreze că $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n$.

R. *Se aplică inegalitatea mediilor şi avem* $1 + a_k \geq 2\sqrt{a_k}$, $k = \overline{1, n}$, *cu egalitate dacă* $a_k = 1$.
Se face produsul acestor inegalităţi şi se ţine seamă de $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ *când avem:*

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = 2^n.$$

Observaţii. 1) *Produsul din membrul stâng sugerează să considerăm produsul* $(1 + a)(1 + b)$, $a, b > 0$ *pentru care* $ab =$ *constant.*



Vom înlocui numerele a, b *cu altele mai „apropiate", la,* $\frac{b}{l}$, *unde* $1 < l < \frac{b}{a}$, *pentru care produsul numerelor* la, $\frac{b}{l}$ *nu se schimbă* $la \cdot \frac{b}{l} = ab$. *Să vedem ce se întâmplă cu produsul* $(1 + la)\left(1 + \frac{b}{l}\right)$ *comparativ cu* $(1 + a)(1 + b)$. *Avem:* $(1 + la)\left(1 + \frac{b}{l}\right) - (1 + a)(1 + b) = (l - 1)\left(a - \frac{b}{l}\right) < 0$.

Aceasta arată că „apropiind" numerele a, b, *adică înlocuindu-le cu altele* la, $\frac{b}{l}$ *pentru care produsul* $la \cdot \frac{b}{l} = ab$ *rămâne acelaşi, produsul* $(1 + a)(1 + b)$ *descreşte.*

Dacă în setul de numere $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *există două diferite de* 1 *să spunem* $a_1 \leq 1 \leq a_2$, *atunci se înlocuiesc cu* 1 *şi* $a_1 a_2$, *obţinând setul de numere* $1, a_1 a_2, a_3, \cdots, a_n$. *Să observăm că aceste numere au aceeaşi proprietate ca şi numerele iniţiale* $1 \cdot (a_1 a_2) a_3 \cdots a_n = 1$. *Pentru acest set de numere produsul* $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$ *scade.*

Dar în acest set de numere unul dintre ele este egal cu 1. Dacă în noul set există două diferite de 1 se repetă raţionamentul de mai sus.

De fiecare dată, pentru fiecare nou set de n *numere valoarea produsului* $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$ *scade, atingând valoarea minimă pentru situaţia în care toate numerele sunt egale cu 1, adică* $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ *când* $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq (1 + 1)(1 + 1) \cdots (1 + 1) = 2^n$.

Metoda descrisă aici pentru a proba inegalitatea se numeşte **metoda lui Sturm**.

2) Inegalitatea dată se poate obţine ca un caz particular al **inegalităţii lui Hugens**:
Dacă $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, *atunci* $(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geq (1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n})^n$, *punând* $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$.

7. ***Fie*** $a, b, c \in \mathbb{R}$ ***pentru care*** $a + b + c = 1$. ***Să se arate că*** $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

R. *Punem* $a = \frac{1}{3} + x$, $b = \frac{1}{3} + y$, $c = \frac{1}{3} + z$. *Din* $a + b + c = 1$ *rezultă* $x + y + z = 0$.

Avem: $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(x+y+z)+x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}+x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$.

Avem egalitate în inegalitate dacă $x=y=z=0$, *adică* $a=b=c=\frac{1}{3}$.

8. *Fie* $z_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}},\ \}^n\ n\geq 2$. *Să se arate că* $\frac{2-z_n}{2-z_{n-1}}>\frac{1}{4}$.

R. *Este uşor de văzut că* $z_n<2$. *De asemenea* $z_n=\sqrt{2+z_{n-1}}$. *Avem succesiv:*

$$\frac{2-z_n}{2-z_{n-1}}=\frac{2-\sqrt{z_{n-1}+2}}{2-z_{n-1}}=\frac{(\sqrt{z_{n-1}+2}-2)(\sqrt{z_{n-1}+2}+2)}{(z_{n-1}-2)(\sqrt{z_{n-1}+2}+2)}=\frac{(z_{n-1}+2)-4}{(z_{n-1}-2)(\sqrt{z_{n-1}+2}+2)}=\frac{1}{z_n+2}.$$

Cum $z_n<2$, *atunci* $\frac{2-z_n}{2-z_{n-1}}=\frac{1}{z_n+2}>\frac{1}{4}$.

9. *Dacă* $x_i>0$, $i=\overline{1,n}$ *şi* $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}=1$, *atunci* $\prod_{i=1}^{n}x_i\geq(n-1)^n$.

R. *Punem* $\frac{1}{1+x_i}=y_i\in(0,1)$ *şi avem* $\left(x_i=\frac{1-y_i}{y_i}\right)$:

$$\prod x_i=\prod\frac{1-y_i}{y_i}=\prod\frac{y_1+\ldots+y_{i-1}+y_{i+1}+\ldots+y_n}{y_i}\geq\frac{1}{\prod y_i}\prod(n-1)(y_1\cdot\ldots\cdot y_{i-1}y_{i+1}\cdot\ldots\cdot y_n)^{\frac{1}{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{\prod y_i}(n-1)^n\prod y_i=(n-1)^n.$$

2. Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz *(C.B.S.)*

Fie a_1,a_2,x_1,x_2 *numere reale. Să se arate că:* $(x_1a_1+x_2a_2)^2\leq(x_1^2+x_2^2)(a_1^2+a_2^2)$.
Avem egalitate în inegalitate dacă $x_1a_2=a_1x_2$.

R. *Se arată uşor (prin calcul) că are loc următoarea egalitate (Lagrange)*
$(x_1^2+x_2^2)(a_1^2+a_2^2)=(x_1a_1+x_2a_2)^2+(x_1a_2-a_1x_2)^2$.
Dacă în memebrul drept se renunţă la ultimul termen pozitiv se obţine inegalitatea dorită. Avem egalitate în inegalitate dacă termenul la care s-a renunţat este nul, adică dacă $x_1a_2-a_1x_2=0$.
Dacă $a_1,a_2\neq 0$, *de aici rezultă* $\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}$.

Observaţie. *Dacă* a_i, x_i, $i=\overline{1,n}$ *sunt numere reale, atunci are loc inegalitatea C.B.S.*
$\left(\sum_{i=1}^{n}x_ia_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)$, *cu egalitate dacă* $x_ia_j=x_ja_i$, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$.

Aplicaţii. 1. ***Să se determine cea mai mică şi cea mai mare valoare a expresiei*** $A=x_1y_1+x_2y_2$ ***dacă se ştie că*** $x_1^2+x_2^2\leq 2$ ***şi*** $y_2^2+y_2^2\leq 4$.

R. *Aplicăm inegalitatea C.B.S. şi avem* $A^2=(x_1y_1+x_2y_2)^2\leq(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)\leq 8$.
De aici $|A|\leq 2\sqrt{2}$. *Pentru* $x_1=x_2=1$ *şi* $y_1=y_2=\sqrt{2}$ *expresia A ia cea mai mare valoare egală cu* $2\sqrt{2}$, *iar pentru* $x_1=x_2=-1$ *şi* $y_1=y_2=\sqrt{2}$, *A ia cea mai mică valoare egală cu* $-2\sqrt{2}$.

2. ***Să se arate că dacă*** $x,y,z\in\mathbb{R}$, ***atunci*** $(x+y+z)^2\leq 3(x^2+y^2+z^2)$.

R. *Inegalitatea C.B.S. ne dă* $(1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z)^2\leq(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)$ *sau*
$(x+y+z)^2\leq 3(x^2+y^2+z^2)$, *cu egalitate dacă* $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

3. ***Să se arate că inegalitatea*** $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a}\leq 12$, ***are loc pentru toate valorile lui a pentru care există radicalii.***

R. *Utilizăm inegalitatea din problema precedentă în care* $x=\sqrt{a+1}$, $y=\sqrt{2a-3}$, $z=\sqrt{50-3a}$.

3. Inegalitatea lui Bernoulli

Să se arate că dacă $\alpha > 0$ şi $r > 1$, $r \in \mathbb{Q}$, atunci $(1+\alpha)^r > 1 + r\alpha$.

R. *Fie $r = \frac{p}{q} > 1$. Se aplică inegalitatea între media geometrică şi cea aritmetică pentru numerele $\underbrace{(1+r\alpha), (1+r\alpha), ..., (1+r\alpha)}_{q}, \underbrace{1, 1, ..., 1}_{(p-q)}$, când avem: $\sqrt[p]{(1+r\alpha)^q} < 1 + \frac{qr\alpha}{p} = 1 + \alpha$.*

De aici rezultă $1 + r\alpha < (1+\alpha)^{\frac{p}{q}}$, adică $(1+\alpha)^r > 1 + r\alpha$.

Aplicaţii. 1. ***Să se arate că dacă $n > 999.000$, atunci $1,001^n > 1000$.***

R. *Avem $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^n > 1 + \frac{n}{1000}$ (cf. ineg. Bernoulli) $> 1 + 999 = 1000$.*

2. ***Să se arate că $6^{90} > 5^{94}$.***

R. *Avem $6^{90} > 5^{94} \Leftrightarrow 6^{45} > 5^{47} \Leftrightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^{45} > 5^2$. Dar $\left(\frac{6}{5}\right)^5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 > 1 + 5 \cdot \frac{1}{5} = 2$, unde în inegalitate s-a aplicat Bernoulli. Deci $\left(\frac{6}{5}\right)^{45} > 2^9 > 25$.*

3. ***Să se arate că primele 1000 de zecimale după virgulă ale numărului $\sqrt[10^{1000}]{2}$ sunt egale cu zero.***

R. *Avem $(n = 10^{1000})$ $\sqrt[n]{2} - 1 < \frac{1}{n} \Leftrightarrow 2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, adevărat conform inegalităţii lui Bernoulli.*

4. Inegalitatea lui Cebâşev.

1) Dacă $a_1 \le a_2$ şi $b_1 \le b_2$ sau $a_1 \ge a_2$ şi $b_1 \ge b_2$, atunci $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \le 2(a_1b_1 + a_2b_2)$.

2) Dacă $a_1 \le a_2$ şi $b_1 \ge b_2$ sau $a_1 \ge a_2$ şi $b_1 \le b_2$, atunci $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \ge 2(a_1b_1 + a_2b_2)$.

R. *1) Efectuăm calculele şi grupăm convenabil când obţinem $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \ge 0$, ceea ce este evident.*

2) Analog lui 1).

Observaţie. *Inegalitatea lui Cebâşev se extinde la două n- upluri de numere $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ şi $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ sau $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ şi $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$ (spunem că cele două n- upluri au aceeaşi monotonie) când avem $(a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n) \le n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)$.*

Dacă $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ şi $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$ sau $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ şi $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ (n- uplurile au monotonii diferite), atunci $(a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n) \ge n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)$.

Aplicaţii. 1. ***Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC, iar A, B, C sunt măsurile în radiani ale unghiurilor triunghiului, atunci $\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \ge \frac{\pi}{3}$.***

R. *Din enunţ $A + B + C = \pi$. Dacă $a \le b \le c$, atunci $A \le B \le C$ (laturii mai mari într-un triunghi i se opune unghiul mai mare).*

Deci, conform inegalităţii Cebâşev, $(a+b+c)(A+B+C) \le 3(aA+bB+cC)$ sau $\frac{\pi}{3} \le \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$.

2.* ***Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea $(m_a^2+m_b^2+m_c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2) \ge 27S^2$,*** *unde m_a este lungimea medianei din A, h_a este lungimea înălţimii din A, iar S este aria triunghiului ABC.*

R. *Avem $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$, iar de aici $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$, iar inegalitatea devine $(a^2 + b^2 + c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \ge 36S^2$.*

Dacă $a \le b \le c$, atunci $h_a \ge h_b \ge h_c$ şi $a^2 \le b^2 \le c^2$, $h_a^2 \ge h_b^2 \ge h_c^2$.

Ultimelor două triplete li se aplică Cebaşev şi rezultă

$(a^2 + b^2 + c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \ge 3(a^2h_a^2 + b^2h_b^2 + c^2h_c^2) = 36S^2$ (deoarece $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$). Avem egalitate în inegalitate dacă $a = b = c$.

4'. Inegalităţi de tip Cebâşev

Dacă $a_1 \le a_2$ *şi* $b_1 \le b_2$ *sau* $a_1 \ge a_2$ *şi* $b_1 \ge b_2$, a_i, b_i $(i = 1, 2)$ *numere reale, atunci cuplurile de numere* (a_1, a_2), (b_1, b_2) *se spune că au aceeaşi monotonie.*

Propoziţie. *Fie* (a_1, a_2), (b_1, b_2) *cupluri de aceeaşi monotonie. Atunci* $a_1b_1 + a_2b_2 \ge a_1b_2 + a_2b_1$.

Demonstraţie. *Relaţia de demonstrat se scrie echivalent* $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \ge 0$, *ceea ce este adevărat, deoarece* $a_1 - a_2$, $b_1 - b_2$ *au acelaşi semn. Avem egalitate în inegalitate dacă* $a_1 = a_2$ *sau* $b_1 = b_2$. ■

Observaţie. *Dacă* (a_1, a_2), (b_1, b_2) *au monotonii diferite, atunci are loc inegalitatea* $a_1b_1 + a_2b_2 \le a_1b_2 + a_2b_1$.

Problemă rezolvată. ***Dacă*** $a, b > 0$, ***atunci să se arate că*** $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$.

R. *Se consideră cuplurile de aceeaşi monotonie* $(a, b), (a^2, b^2)$. *Conform propoziţiei are loc inegalitatea* $a \cdot a^2 + b \cdot b^2 \ge ab^2 + a^2b$, *care este inegalitatea de demonstrat.*

În mod asemănător spunem că tripletele de numere reale strict pozitive (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) *au aceeaşi monotonie dacă* $(a_1 \le a_2 \le a_3$ *şi* $b_1 \le b_2 \le b_3)$ *sau* $(a_1 \ge a_2 \ge a_3$ *şi* $b_1 \ge b_2 \ge b_3)$. *Spunem că tripletul* (b_1', b_2', b_3') *se obţine din tripletul* (b_1, b_2, b_3) *printr-o permutare a elementelor acestuia dacă* $\{b_1', b_2', b_3'\} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

Propoziţie. *Fie* (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) *triplete de aceeaşi monotonie, iar* (b_1', b_2', b_3') *se obţine din* (b_1, b_2, b_3) *printr-o permutare. Atunci* $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \ge a_1b_1' + a_2b_2' + a_3b_3'$.

Problemă rezolvată. ***Dacă*** $a, b, c > 0$, ***atunci*** $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$. **R.** *Acestei probleme i s-a dat o soluţie în prima parte a acestui capitol. Vom prezenta o soluţie pentru această problemă utilizând rezultatul de mai sus. Presupunem că* $a \le b \le c$. *Atunci* $a + b \le a + c \le b + c$ *şi de aici* $\dfrac{1}{b+c} \le \dfrac{1}{a+c} \le \dfrac{1}{a+b}$. *Prin urmare tripletele* (a, b, c), $\left(\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{a+b}\right)$ *au aceeaşi monotonie. Vom considera permutări ale tripletului* $\left(\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{a+b}\right)$: $\left(\dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{a+b}, \dfrac{1}{b+c}\right)$ *şi* $\left(\dfrac{1}{a+b}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{b+c}\right)$ *şi aplicăm propoziţia de două ori. Avem*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \ge a\frac{1}{a+c} + b\frac{1}{a+b} + c\frac{1}{b+c} \text{ şi}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \ge a\frac{1}{a+b} + c\frac{1}{a+c} + b\frac{1}{b+c}.$$

Adunând, membru cu membru, ultimele două inegalităţi rezultă:

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \ge \frac{a+b}{a+b} + \frac{a+c}{a+c} + \frac{b+c}{b+c} = 3.$$

De aici rezultă imediat inegalitatea dorită.

5. Inegalitatea lui Minkowski

Dacă $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, *atunci* $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

R. *Inegalitatea este echivalentă cu cea obţinută prin ridicare la pătrat. Avem:* $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \le$ $\le a_1^2 + a_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} + b_1^2 + b_2^2$ *sau după unele calcule* $-a_1b_1 - a_2b_2 \le \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$. *Dacă membrul stâng este negativ, atunci inegalitatea are loc deoarece membrul drept este pozitiv. Dacă*

membrul stâng este pozitiv, atunci prin ridicare la pătrat obţinem
$(a_1b_1)^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + (a_2b_2)^2 \le (a_1b_1)^2 + (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2 + (a_2b_2)^2$ *sau*
$0 \le (a_1b_2 - a_2b_1)^2$, *ceea ce este adevărat. Avem egalitate dacă* $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, $b_1, b_2 \neq 0$.

Observaţii. 1) *Dacă* $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ *sunt două puncte în plan, atunci lungimea segmentului* $[AB]$ *este egală cu* $AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$, *iar* $OA = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $OB = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. *Inegalitatea dată se traduce în una geometrică: în triunghiul* OAB, *o latură* $[AB]$ *este mai mică decât suma celorlalte două.*

2) *Inegalitatea se extinde la numerele reale* a_i, b_i, $i = \overline{1,n}$ *când* $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$.

3) *Dacă* $A(c, a)$, $B(b, d)$ *sunt două puncte în plan* $(a, b, c, d > 0)$, $x \in [0, c]$, $y \in [0, d]$, $M(x, 0)$, $N(0, y)$, *atunci se arată că* $AM + MN + NB$ *este minimă dacă* $\frac{x}{y} = \frac{b+c}{a+d}$.

6. ***Dacă*** $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, ***atunci*** $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \le |a_1| + |a_2|$.

R. *Inegalitatea este echivalentă cu cea obţinută prin ridicare la pătrat. Avem:* $a_1^2 + a_2^2 \le a_1^2 + 2|a_1|\,|a_2| + a_2^2$ *sau* $0 \le 2|a_1|\,|a_2|$, *adevărat.*

Avem egalitate dacă $a_1 = 0$ *sau* $a_2 = 0$.

Observaţii. 1) *Acestei inegalităţi i se poate da următoarea interpretare geometrică: dacă* $|a_1|$, $|a_2|$ *sunt lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic, atunci* $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ *este lungimea ipotenuzei care este mai mică decât suma lungimilor catetelor.*

2) *Pentru oricare numere reale* $a_1, a_2, ..., a_n$ *are loc inegalitatea*
$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \le |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$.

7. ***Dacă*** $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, ***atunci*** $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \le |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$ ***şi*** $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \ge |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$. *Interpretaţi geometric a doua inegalitate.*

8. ***Fie fracţiile ireductibile pozitive*** $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, ..., \frac{a_n}{b_n}$. ***Să se arate că***
$\min\limits_{1 \le i \le n} \frac{a_i}{b_i} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \le \max\limits_{1 \le i \le n} \frac{a_i}{b_i}$.

R. *Notăm* $m = \min\limits_{1 \le i \le n} \frac{a_i}{b_i}$, $M = \max\limits_{1 \le i \le n} \frac{a_i}{b_i}$. *Atunci*

$mb_1 \le a_1 \le Mb_1$

$mb_2 \le a_2 \le Mb_2$

.....

$mb_n \le a_n \le Mb_n$.

Adunând aceste inegalităţi, membru cu membru, rezultă

$m(b_1 + b_2 + ... + b_n) \le a_1 + a_2 + ... + a_n \le M(b_1 + b_2 + ... + b_n)$,

iar de aici $m \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \le M$.

Observaţii. 1) *În particular pentru* $k_1, k_2, ..., k_n > 0$, *are loc inegalitatea*
$\min\limits_{1 \le i \le n} a_i \le \frac{k_1a_1 + k_2a_2 + ... + k_na_n}{k_1 + k_2 + ... + k_n} \le \max\limits_{1 \le i \le n} a_i$.

2) *Dacă în 1) se pune* $k_1 = k_2 = ... = k_n = 1$ *rezultă* $\min\limits_{1 \le i \le n} a_i \le A(a_1, a_2, ..., a_n) \le \max\limits_{1 \le i \le n} a_i$.

Aplicaţii ale inegalităţilor la determinarea celei mai mari şi a celei mai mici valori

Din inegalitatea între media aritmetică şi cea geometrică a două numere pozitive a, b ($\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$) rezultă următoarele:

1) Dacă suma numerelor pozitive a, b este egală cu s, $a+b=s$, atunci produsul acestor numere ia valoarea cea mai mare (deci cu egalitate în inegalitate) dacă $a=b=\frac{s}{2}$ (deci dacă cele două numere sunt egale) când cea mai mare valoare este $ab=\left(\frac{s}{2}\right)^2$.

2) Dacă produsul numerelor pozitive a, b este egal cu p, $ab=p$, atunci suma lor ia cea mai mică valoare pentru $a=b=\sqrt{p}$, când cea mai mică valoare este egală cu $2\sqrt{p}$.

Consideraţii similare se pot face pentru n numere pozitive.

Aplicaţii

1. ***Să se determine cea mai mică valoare a funcţiei*** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{a}{x}$, $a>0$.

R. *Să observăm că produsul numerelor pozitive x, $\frac{a}{x}$, este constant $x\cdot\frac{a}{x}=a$. Conform cu 2) suma $x+\frac{a}{x}$ au valoarea cea mai mică dacă $x=\frac{a}{x}$, adică $x=\sqrt{a}$, când $\min\limits_{x>0} f(x)=2\sqrt{a}$.*

2. ***Să se determine cea mai mică valoare a funcţiei*** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3+x+2}{x}$.

R. *Să observăm că are loc scrierea $f(x)=x^2+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$, iar produsul $x^2\cdot 1\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=1$ (constant). Prin urmare suma $f(x)=x^2+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$ este minimă dacă numerele sunt egale $x^2=1=\frac{1}{x}$. De aici $x=1$, când $\min\limits_{x>0} f(x)=f(1)=4$.*

3. ***Să se determine cea mai mare valoare a funcţiei:***

a) $f:\left(-\frac{1}{3},1\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-x)^3(1+3x)$. *b)* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{4x^2+9}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1})$.

R. *a) Scriem funcţia sub forma $f(x)=(1-x)(1-x)(1-x)(1+3x)$, cu factorii $1-x$, $1+3x$ pozitivi (deoarece $-\frac{1}{3}<x<1$) şi în plus $(1-x)+(1-x)+(1-x)+(1+3x)=4$ (=constant). Atunci cea mai mare valoare a produsului $f(x)$ are loc pentru $1-x=1+3x$, adică pentru $x=0$. Găsim $\max\limits_{-\frac{1}{3}<x<1} f(x)=f(0)=1$.*

b) Avem $f(x)=\sqrt{4x^2+9}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}}\le 3$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2\ge 0$ (după două ridicări la pătrat). Pentru $x=0$ rezultă $f(0)=3$.

4. ***Dacă numerele*** x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 ***sunt nenegative şi*** $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1$, ***atunci determinaţi cea mai mare valoare pentru*** $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5$.

R. *Se verifică prin calcul inegalitatea $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5\le(x_1+x_3+x_5)(x_2+x_4)$ (în membrul drept găsindu-se termenii din membrul stâng şi alti termeni pozitivi). Aplicăm inegalitatea mediilor şi avem:* $(x_1+x_3+x_5)(x_2+x_4)\le\left(\dfrac{x_1+x_3+x_5+x_2+x_4}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

Valoarea maximă căutată este $\frac{1}{4}$ şi se atinge, de exemplu, pentru $x_1=x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=x_4=x_5=0$.

5. ***Să se rezolve în numere pozitive sistemul:*** $\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=3 \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}=3. \end{cases}$

R. *Adunăm ecuaţiile, membru cu membru, şi obţinem:* $\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)+...+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)=6.$

Dar $x+\frac{1}{x}\geq 2$, *dacă* $x>0$, *cu egalitate dacă* $x=1$. *Deci* $n\leq 3$.

Dacă $n=3$, *atunci* $x_1=x_2=x_3=1$. *Pentru* $n=1$ *relaţiile n-au loc, iar dacă* $n=2$ *rezultă* $x_1=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{3\mp\sqrt{5}}{2}$. *Pentru* $n\geq 4$ *sistemul nu are soluţii.*

6. ***Să se rezolve sistemul:*** $\frac{2x_1^2}{1+x_1^2}=x_2,\ \frac{2x_2^2}{1+x_2^2}=x_3,...,\frac{2x_n^2}{1+x_n^2}=x_1.$

R. *Utilizând inegalitatea mediilor* $\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}$, $a,b>0$, *cu egalitate dacă* $a=b$, *din ultima ecuaţie a sistemului avem:* $x_1=\frac{2x_n^2}{1+x_n^2}\leq x_n$, *cu egalitate dacă* $x_1=x_n=1$.

Să observăm că $x_1,x_2,...,x_n>0$. *Din prima ecuaţie deducem asemănător* $x_2\leq x_1$. *Procedând analog cu celelalte ecuaţii rezultă* $x_n\leq x_{n-1}\leq...\leq x_2\leq x_1\leq x_n$.

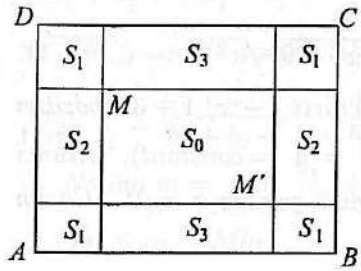
De aici avem egalitate peste tot (primul şi ultimul termen fiind egali).

Deci $x_1=x_2=...=x_n=1$.

7*. ***Se dă dreptunghiul ABCD şi în interiorul său se consideră punctul M prin care se duc paralele la laturile dreptunghiului. Ele împart dreptunghiul în patru dreptunghiuri. Să se arate că unul din cele două dreptunghiuri care conţin vârfurile A şi C are aria egală cu cel mult*** $\frac{1}{4}$ ***din aria dreptunghiului.***

R. *Se consideră axele de simetrie ale dreptunghiului care îl împart în patru sferturi. Dacă punctul se alege în unul din cele două sferturi care conţin punctele A şi C atunci afirmaţia este evidentă.*

Să considerăm punctul ales în unul din cele două sferturi rămase (vezi figura).



Fie M' *simetricul lui* M *în raport cu centrul dreptunghiului. Prin acest punct se duc paralele la laturile dreptunghiului. S-au pus în evidenţă 9 dreptunghiuri: patru de arie* S_1, *două de arie* S_2, *două de arie* S_3 *şi unul de arie* S_0. *Trebuie să arătăm că* S_1+S_2 *sau* S_1+S_3 *nu depăşesc* $\frac{S}{4}$, *unde* S *este aria dreptunghiului* $ABCD$. *Cum* $4S_1+2S_2+2S_3=S-S_0<S$ *şi deci* $2S_1+S_2+S_3<\frac{S}{2}$ *sau* $(S_1+S_2)+(S_1+S_3)<\frac{S}{2}$.

De aici unul din numerele S_1+S_2, S_1+S_3 *este mai mic decât* $\frac{S}{4}$ *(în caz contrar, adică dacă* S_1+S_2, $S_1+S_3>\frac{S}{4}$ *ar implica* $S_1+S_2+S_1+S_3>\frac{S}{2}$, *fals).*

8*. ***Să se afle cea mai mică valoare a expresiei:*** $ax^n+\frac{b}{x^m}$, $x>0$, $a,b>0$, $m,n\in\mathbb{N}^*$.

R. *Avem:* $ax^n+\frac{b}{x^m}=\underbrace{\frac{a}{m}x^n+...+\frac{a}{m}x^n}_{m}+\underbrace{\frac{b}{nx^m}+...+\frac{b}{nx^m}}_{n}\geq(m+n)\sqrt[m+n]{\left(\frac{a}{m}x^n\right)^m\left(\frac{b}{nx^m}\right)^n}=$

$=(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^mb^n}{m^mn^n}}$, *care reprezintă cea mai mică valoare pentru expresia din enunţul problemei şi se obţine pentru* $\frac{a}{m}x^n=\frac{b}{nx^m}$, *adică pentru* $x=\left(\frac{bm}{an}\right)^{\frac{1}{m+n}}$.

9*. ***Dacă suma*** $x_1+x_2+...+x_n=k$, $x_i>0$, ***atunci*** $x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$, $k_i\in\mathbb{N}^*$ ***este maxim dacă*** $\frac{x_1}{k_1}=\frac{x_2}{k_2}=...=\frac{x_n}{k_n}$.

R. *Avem:*

$$\underbrace{\frac{x_1}{k_1}\cdot\ldots\cdot\frac{x_1}{k_1}}_{k_1}\cdot\underbrace{\frac{x_2}{k_2}\cdot\ldots\cdot\frac{x_2}{k_2}}_{k_2}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{x_n}{k_n}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{k_n}}_{k_n}\le\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{k_1+k_2+...+k_n}\right)^{k_1+k_2+...+k_n}=\left(\frac{k}{k_1+...+k_n}\right)^{k_1+...+k_n}.$$

Deci produsul cerut este maxim dacă $\frac{x_1}{k_1}=\frac{x_2}{k_2}=...=\frac{x_n}{k_n}$.

PRINCIPIUL EXTREMAL

În rezolvarea multor probleme se cere determinarea unui element extremal, „de frontieră", adică un element pentru care o mărime oarecare ia cea mai mare sau cea mai mică valoare, de exemplu, cea mai mare sau cea mai mică latură a triunghiului, cel mai mare sau cel mai mic unghi, etc. Proprietatea corespunzătoare elementului extremal poate conduce la rezolvarea problemei.

Vom ilustra cele spuse mai sus prin următoarele

Probleme rezolvate

1. ***Să se arate că cercurile construite pe laturile unui patrulater convex ca diametre, acoperă întregul patrulater.***

R. *Fie M, un punct arbitrar din interiorul patrulaterului. Avem $\widehat{AMB}+\widehat{BMC}+\widehat{CMD}+\widehat{DMA}=360°$ (prin $\widehat{AMB}$ înţelegem măsura unghiului $\widehat{AMB}$ în grade sexagesimale). Atunci cel mai mare dintre aceste unghiuri este mai mare sau egal cu $90°$. Fie acesta $\widehat{AMB}$. Prin urmare punctul M se află în interiorul cercului de diametru $[AB]$.*

2. ***În interiorul cercului de rază 1 se află 8 puncte. Să se arate că distanţa între două dintre cele opt puncte este mai mică decât 1.***

R. *Există cel puţin şapte puncte, diferite de centrul O al cercului. Cel mai mic dintre unghiurile $\widehat{A_iOA_j}$, unde A_i, A_j sunt punctele date, nu depăşeşte $\frac{360}{7}<60°$. Dacă A şi B sunt punctele care corespund unghiului cel mai mic, atunci $AB<1$, deoarece $AO<1$, $BO<1$, iar unghiul $\widehat{AOB}$ nu poate fi cel mai mare unghi al triunghiului AOB.*

3. ***În plan se consideră $n\ge3$ puncte, nu toate situate pe aceeaşi dreaptă. Arătaţi că există un cerc care trece prin cel puţin trei din punctele date şi care nu conţine în interior nici unul din punctele rămase.***

R. *Fie A şi B, două din punctele date pentru care distanţa dintre ele este cea mai mică dintre toate distanţele realizate cu oricare două din punctele date. Fie C acel punct dintre cele rămase pentru care unghiul $\widehat{ACB}$ are măsura cea mai mare. Atunci în interiorul cercului care trece prin A, B, C nu se mai află alte puncte (Pentru argumentare se utilizează măsura unghiului cu vârful pe cerc, în interiorul sau în exteriorul cercului). Dacă mai este şi alt punct D pentru care $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}$, atunci şi punctul D se află pe cercul de mai sus.*

PRINCIPIUL INVARIANTULUI

Există o categorie de probleme în care se dă un anumit obiect (sau mai multe) asupra căruia se efectuează anumite transformări.

Se cere să se demonstreze că în urma acestor transformări obiectul nu poate fi adus la o anumită formă. Aceasta se poate face alegând caracteristica obiectului care nu se schimbă prin aceste transformări. O astfel de caracteristică se numeşte **invariantul transformării.**

Dacă obiectul final al problemei nu posedă această caracteristică, atunci el nu poate fi obţinut în urma transformărilor descrise.

1. ***Se dau trei numere*** $2, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$. ***a) După un pas este permisă scrierea a noi trei numere, înlocuind fiecare din numerele date prin semisuma celorlalte numere. Se poate, efectuând de câteva ori această operaţie, să se obţină tripletul*** $1, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$ ***? b) După un pas este permis ca oricare două numere să se înlocuiască cu suma lor împărţită prin*** $\sqrt{2}$ ***şi diferenţa împărţită prin*** $\sqrt{2}$***, lăsându-se al treilea număr neschimbat. Se poate, efectuând de câteva ori această operaţie, să se obţină tripletul*** $1, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ ***?***

R. *a) Dacă* a, b, c *sunt numerele date, atunci ele se înlocuiesc, după un pas, cu* $\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+a}{2}$. *Să observăm că în acest caz elementul care rămâne* ***invariant este suma numerelor:*** $\frac{b+c}{2}+\frac{a+c}{2}+\frac{b+a}{2}=a+b+c$.

În cazul nostru suma numerelor iniţiale este $2+1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=4$, *iar suma numerelor finale este* $1+2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=5$.

Deci plecând de la numerele considerate $1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$ *nu se poate ajunge în final la numerele* $1, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$.

b) Dacă a, b, c *sunt numerele iniţiale, atunci după un pas ele se înlocuiesc cu* $\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}, c$.

În acest caz **invariantul este suma pătratelor numerelor:** $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2+c^2=a^2+b^2+c^2$.

În cazul nostru $a^2+b^2+c^2=2^2+(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2=10$ *în timp ce suma pătratelor numerelor finale este:* $1^2+\sqrt{2}^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{7}{2}$. *Cum* $10\neq\frac{7}{2}$, *răspunsul este negativ.*

2. ***Dintr-o tablă de şah*** 8×8 ***se decupează două pătrate: cel de sus stânga şi cel de jos dreapta. Se poate acoperi cu pietre de domino (o piatră de domino acoperă două pătrate de pe tabla de şah), fără suprapunere, partea rămasă din tabla de şah ?***

R. *În problemele de acest fel la găsirea invariantului ne ajută o colorare cât mai bună a tablei. Observăm că fiecare piatră de domino acoperă o pătrăţică albă şi una neagră de pe tabla de şah. Dar din tablă au fost scoase două pătrate de aceeaşi culoare.*

Deci nu se poate acoperi.

Probleme propuse

1. ***Să se demonstreze inegalităţile:*** 1) $(|a|+|b|)(|b|+|c|)(|c|+|a|)\geq 8|abc|$; 2) $a^6+b^6+1\geq 3a^2b^2$ 3) $\frac{a^6+b^6}{2}\geq 3a^2b^2-4$; 4) $\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$, $a, b\geq 0$; 5) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\leq |a|+|b|+|c|$; 6) $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)<n^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

2. ***Să se arate că pentru orice*** $a, b, c>0$ ***au loc inegalităţile:*** 1) $ca+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{ab}$; 2) $\frac{a+bc^4}{2c^2}\geq\sqrt{ab}$; 3) $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\geq 6abc$; 4) $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$; 5) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3$; 6) $\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\geq\frac{9}{a+b+c}$; 7) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\geq 6$; 8) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 9) $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$; 10) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq a+b+c$.

3. *Să se arate că:*

1) *dacă* $|a|<1$, $|b|<1$, *atunci* $|a+b|<|1+ab|$;

2) *dacă* $a^2+b^2=1$, *atunci* $|a+b|\leq\sqrt{2}$;

3) *dacă* $a>0$, $b>0$ *şi* $ab=1$, *atunci* $(1+a)(1+b)\geq 4$;

4) *dacă* $a+b+c\geq 3$, *atunci* $a^2+b^2+c^2\geq 3$;

5) *dacă* $a+b\geq c\geq 0$, *atunci* $a^2+b^2\geq\frac{c^2}{2}$, $a^4+b^4\geq\frac{c^4}{8}$, $a^8+b^8\geq\frac{c^8}{128}$;

6) *dacă* $a+b=1$, $a>0$, $b>0$, *atunci* $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}\leq 5$;

7) *dacă* a,b,c *sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci* $(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)\leq abc$;

8) *dacă* $a,b>0$, $a+b>2$, *atunci* $a^2+b^2>2$;

9) *dacă* $x,y>0$, $x+y=1$, *atunci* $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})\geq 9$;

10) *dacă* $a_i>0$, $i=\overline{1,5}$, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$, *atunci*
$(\frac{1}{a_1}-1)(\frac{1}{a_2}-1)(\frac{1}{a_3}-1)(\frac{1}{a_4}-1)(\frac{1}{a_5}-1)\geq 1024$;

11) *dacă* $a_1=0$, $|a_2|=|a_1+1|$, $|a_3|=|a_2+1|$, *atunci* $\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geq-\frac{1}{2}$.

4. *Să se arate că:*

1) $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(a+b)(b+c)(c+a)$ *şi apoi să se deducă inegalitatea* $(a+b+c)^3\geq a^3+b^3+c^3$ *pentru* $a,b,c\geq 0$.

2) $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$ *şi apoi să se deducă inegalitatea* $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$ *dacă* $a,b,c\geq 0$.

5. *Arătaţi că: a)* $2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}<\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$, $k\in\mathbb{N}^*$.

b) $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$, $n\in\mathbb{N}^*$.

6. *Arătaţi că dacă* $a>b>0$, *atunci* $\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$.

7.* *Să se arate că sistemele de ecuaţii*

1) $\begin{cases} x^5y^3=81 \\ 10x+6y=27 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x^4+y^4+z^4=1 \\ x^2+y^2+2z^2=\sqrt{7} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x^3y=9 \\ 3x+y=6 \end{cases}$

nu admit soluţii reale.

8.* *Dacă* a,b,c,a',b',c' *sunt lungimile laturilor triunghiurilor* ABC *şi* $A'B'C'$ *şi dacă* $\sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}=\sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$, *atunci triunghiurile sunt asemenea.*

9.* *Dacă* $a_i>0$, $i=\overline{1,n}$ *şi* $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$, *atunci* $\prod_{i=1}^{n}a_i(1-a_i)\leq\frac{(n-1)^n}{n^{2n}}$.

10.* *Aplicând inegalitatea mediilor demonstraţi inegalităţile:*

1) $1\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n^n}<\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$; 2) $1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n<\left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$;

3) $\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}$,
$a_i,b_i>0$, $i=\overline{1,n}$;

4) $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\frac{3}{a_1+a_2+a_3}<2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)$, $a_1,a_2,a_3>0$;

5) $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}-1\leq\frac{a^3+b^3+c^3}{6}$, $a,b,c>0$.

11.* *Aplicând inegalitatea lui Bernoulli să se arate că* $7^{85} > 6^{90}$.

12.* *Dacă* $x, y, z \geq 0$ *şi* $x+y+z=1$, *atunci* $\frac{(x+1)^2}{y+1} + \frac{(y+1)^2}{z+1} + \frac{(z+1)^2}{x+1} \geq 4$.
(Inegalitate de tip Cebaşev cu $x+1=x_1$, $y+1=y_1$, $z+1=z_1$*).*

1.3. ELEMENTE DE CALCULUL PROPOZIŢIILOR

Chestiuni generale de logică matematică

Logica matematică are ca obiect **investigarea gândirii formale** prin metode matematice caracteristice (de exemplu ale algebrei). Dar acest scop, care îşi are originea în filzofie, nu este unicul deziderat al logicii matematice; astăzi logica matematică conţine o multitudine de probleme şi aplicaţii în cele mai diverse domenii ca ştiinţele naturii, algebra circuitelor, teoria sistemelor, lingvistică şi în unele ramuri ale ştiinţelor sociale ca filozofia, dreptul şi etica.

Un impuls decisiv pentru dezvoltarea logicii matematice l-a dat situaţia creată la sfârşitul secolului al XIX-lea. Până atunci, matematica a acumulat o mare cantitate de rezultate şi a atins un înalt nivel de abstractizare fără ca să atingă însă o claritate corespunzătoare în ceea ce priveşte conţinutul conceptelor fundamentale (ca de exemplu noţiunea de mulţime) care erau folosite într-o manieră mai degrabă intuitivă. În afară de necesitatea unei aprofundări a conceptului de mulţime, pentru prima dată s-a impus necesitatea aprofundării sensului logicii şi a deducţiei logice.

Vom numi **propoziţii** anumite formaţii lingvistice care servesc la descrierea sau comunicarea faptelor. **Logica** (propoziţiilor) **clasică** porneşte de la două principii. Potrivit **principiului celor două valori**, orice propoziţie este ori adevărată, ori falsă. Conceptul de adevăr folosit aici este datorat lui Aristotel, care consideră o propoziţie adevărată dacă afirmaţia exprimată prin ea corespunde unui fapt. Principiul celor două valori înseamnă în realitate două principii:

1) **principiul terţului exclus** conform căruia orice propoziţie este adevărată sau falsă şi

2) **principiul non-contradicţiei**, în conformitate cu care o propoziţie nu poate fi în acelaşi timp adevărată şi falsă. De aceea clasa tuturor propoziţiilor se descompune în două clase disjuncte care se notează cu simbolurile 1 (sau a – **adevărat**) şi 0 (sau f – **fals**) şi se numesc **valori de adevăr**. Cu ajutorul cuvintelor „nu", „şi", „sau" etc. propoziţiile date se pot combina în propoziţii mai complicate. În conformitate cu al doilea principiu fundamental, **principiul extensionalităţii**, valoarea de adevăr a unei propoziţii compuse este determinată exclusiv de valorile de adevăr ale componentelor şi nu depinde de sensul lor.

Vom vedea că definiţiile propoziţiilor construite cu ajutorul cuvintelor „nu", „şi", „sau", nu se potrivesc exact cu sensul în care aceste conjuncţii sunt folosite în vorbirea curentă. Prin acest capitol se doreşte să se fundamenteze limbajul şi raţionamentul matematic.

Enunţ

Logica matematică studiază propoziţiile din alt punct de vedere decât cel realizat de gramatică, aşa cum s-a prezentat în partea introductivă.

Definiţii. Se numeşte **alfabet** o mulţime de semne.

Se numeşte **enunţ** orice succesiune de semne dintr-un alfabet.

Exemple. 1) „$1+9=10$"; 2) „$3 \geq 8$"; 3) „$\frac{10}{2} + 4 \cdot 5 = 25$"; 4) „$1 < 10$"; 5) „3 divide 9";
6) $1 \in \{-1; 0; 1\}$; 7) $\{-1; 0\} = \{0; -1; 1\}$; 8) „$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$"; 9) „$\pi \in \mathbb{Q}$"; 10) „$x+1 \leq 3$, $x \in \mathbb{R}$";
11) „$|x+1| = 1$, $x \in \mathbb{R}$"; 12) „2 divide x, $x \in \mathbb{Z}$"; 13) „x divide y, $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$";

14) „$x^2 + y^2 = z^2,\ x, y, z \in \mathbb{Z}$“; 15) „$x^n + y^n = z^n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 3,\ x, y, z \in \mathbb{Z}^*$“;
16) „Diagonalele paralelogramului se înjumătăţesc“;

17) „Aria unui triunghi este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi şi lungimea înălţimii corespunzătoare laturii“;

18) „Suma unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°“;
19) „Printr-un punct exterior unei drepte se duce o singură paralelă la acea dreaptă“;
20) Şterge praful !; 21) Fii ordonat !

Propoziţie

Logica matematică studiază acele enunţuri care sunt fie adevărate, fie false. Un enunţ care corespunde unei realităţi se numeşte **adevărat**; un enunţ care nu este adevărat se numeşte **fals**.

Definiţie. Se numeşte **propoziţie** (a logicii clasice a propoziţiilor) un enunţ, care, într-un context dat, este fie adevărat, fie fals.

Propoziţiile le notăm cu litere mici $p, q, r, \ldots$ sau cu litere mici indexate $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$.
De exemplu p : „$1 + 9 = 10$“.
Dintre enunţurile descrise mai sus sunt propoziţii: 1) – 9), 15) – 19). Enunţurile 10)–14) depind de una sau mai multe variabile, care iau valori în anumite mulţimi. Se constată că pentru anumite valori date acestor variabile se obţin enunţuri adevărate sau false, adică propoziţii. Enunţurile 20), 21) nu pot fi propoziţii, ele fiind poruncă şi respectiv un îndemn despre care nu putem spune că sunt adevărate sau false.

Valoarea de adevăr a unei propoziţii

Definiţie. Se numeşte **valoare de adevăr** a unei propoziţii proprietatea acesteia de a fi **adevărată sau falsă**.

Valoarea de adevăr a unei propoziţii p se notează $v(p)$,

$$v(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p \text{ este adevărată} \\ 0, & \text{dacă } p \text{ este falsă.} \end{cases}$$

Uneori în loc de 1 se pune a (de la adevărat), iar în loc de 0 se pune f (de la fals).

Logica clasică a propoziţiilor este în concordanţă cu următoarele trei principii:
1) **principiul terţului exclus** – o propoziţie nu poate lua o altă valoare decât 1 sau 0.
2) **principiul noncontradicţiei** – o propoziţie nu poate lua în acelaşi timp cele două valori 1 şi 0.
3) **principiul identităţii** – o propoziţie îşi păstrează valoarea sa de adevăr.
Logica matematică studiază propoziţiile doar din punct de vedere al valorii lor de adevăr.

Exemple. Propoziţiile 1), 3) – 6), 8), 16), 17), 18), 19) sunt adevărate, deci au valoarea de adevăr 1 (sau a), iar propoziţiile 2), 7), 9) sunt false. Enunţul 11) pentru $x = 0$ sau $x = -2$ devine o propoziţie adevărată, iar pentru $x \in \mathbb{R} - \{0; -2\}$ este o propoziţie falsă.
Enunţul 15) are un caracter mai special. Este celebra teoremă a lui Fermat „Pentru orice $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$ nu există numere întregi nenule x, y, z astfel încât $x^n + y^n = z^n$.“ Până în 1992 nu s-a putut infirma sau demonstra aserţiunea. Un astfel de enunţ se numeşte **conjectură**. În 1992 matematicianul Wiles a reuşit să demonstreze valabilitatea enunţului. În acest fel 15) devine o propoziţie adevărată.
Teoremele din matematică constituie propoziţii adevărate (16), 17), 18)).

Predicat

Definiţie. Se numeşte **predicat** (sau **propoziţie cu variabile**), un enunţ care conţine una sau mai multe variabile, cărora atribuindu-le „valori" obţinem propoziţii adevărate sau false.

La definirea predicatului trebuie indicate mulţimile în care iau „valori" variabilele.
Mulţimea elementelor pentru care obţinem propoziţii adevărate se numeşte **mulţimea de adevăr** a predicatului.

Dacă predicatul conţine $1, 2, 3, \ldots, n$ variabile, atunci acesta se numeşte unar, binar, ternar, ..., n-ar şi se notează

$p(x)$, $q(x,y)$, $r(x,y,z)$, ..., $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Dacă domeniile variabilelor nu sunt precizate se alege domeniul maxim.

De exemplu pentru predicatul unar $p(x)$: „$\dfrac{x^2}{x+1} = 1$", se alege $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

Exemple. 1) Considerăm enunţul „$x + 1 \leq 3$, $x \in \mathbb{R}$". Pentru $x = 0$ se obţine o propoziţie adevărată „$0+1 \leq 3$", iar pentru $x = 4$ se obţine o propoziţie falsă „$4+1 \leq 3$". Dacă se pune în locul lui x un număr real, atunci se obţine fie o propoziţie adevărată, fie o propoziţie falsă. Prin urmare enunţul considerat este un predicat unar notat $p_1(x)$: „$x + 1 \leq 3$, $x \in \mathbb{R}$".

2) Enunţul „x divide y, $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$" devine pentru $x = 2$, $y = 4$ o propoziţie adevărată „2 divide 4", iar pentru $x = 5$, $y = 9$ se obţine propoziţia falsă „5 divide 9". Dând lui x şi y valori întregi $x \neq 0$ se obţin propoziţii adevărate sau false. Acest enunţ este un predicat care depinde de două variabile (deci un predicat binar) şi îl notăm:

$p_2(x,y)$: „x divide y, $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$".

3) Enunţul „$x^2 + y^2 = z^2$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$" pentru $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ devine o propoziţie adevărată: „$3^2 + 4^2 = 5^2$", iar pentru $x = 0$, $y = 1$, $z = -2$ se obţine o propoziţie falsă „$0^2 + 1^2 = (-2)^2$".

Punând în locul literelor x, y, z numere întregi se obţin propoziţii adevărate sau false. Acest enunţ depinde de trei variabile (deci este un predicat ternar) şi-l notăm:

$p_3(x,y,z)$: „$x^2 + y^2 = z^2$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$".

Ecuaţiile, inecuaţiile, identităţile sunt predicate.
Mulţimile de adevăr pentru aceste predicate reprezintă mulţimile de soluţii pentru ecuaţii, inecuaţii şi respectiv identităţi.

Cuantificatorul existenţial. Propoziţia existenţială

Un alt mod de a transforma predicatele în propoziţii este cel furnizat de utilizarea **cuantificatorilor**.
Fie $p(x)$ un predicat unar, x aparţinând unei mulţimi $X \neq \emptyset$.

Definiţie. Propoziţia „**există cel puţin un x astfel încât $p(x)$**", se numeşte **propoziţie existenţială** asociată predicatului $p(x)$.

Notaţie. $(\exists x)p(x)$ (citim: există x din X astfel încât $p(x)$).
Simbolul „$\exists$" se citeşte: **există** şi se numeşte **cuantificator existenţial**.

Valoare de adevăr. Propoziţia $(\exists x)p(x)$ este adevărată dacă există cel puţin un x_0 din X astfel încât propoziţia $p(x_0)$ să fie advărată.
Propoziţia $(\exists x)p(x)$ este **falsă** dacă nu există nici un x_0 din X astfel încât $p(x_0)$ să fie adevărată.

Exemple. 1) Fie predicatul unar $p(x)$: „$|x+1|=1,\ x\in\mathbb{R}$". Propoziţia $(\exists x)(|x+1|=1)$ este adevărată pentru că dacă $x=0$, atunci propoziţia $p(0)$: „$|0+1|=1$" este adevărată.

2) Considerăm predicatul unar $q(x)$: „$x^2-3=0,\ x\in\mathbb{Q}$". Propoziţia $(\exists x)(x^2-3=0)$ este falsă, deoarece nu există nici un număr x_0 raţional pentru care $x_0^2-3=0$.

Observaţii. **1)** Dacă $X=\{a,b,c\}$, atunci propoziţia $(\exists x)p(x)$ este adevărată dacă una din propoziţiile $p(a)$, $p(b)$, $p(c)$ este adevărată. În caz contrar propoziţia este falsă.

2) Dacă predicatul are mai multe variabile, atunci se pot forma propoziţii prin utilizarea cuantificatorului „$\exists$" pentru fiecare variabilă. Fie predicatul $p(x,y)$: „$x+y=3,\ x,y\in\mathbb{Z}$". Formăm propoziţia $(\exists x)(\exists y)(x+y=3)$ (care se citeşte: există $x\in\mathbb{Z}$, există $y\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x+y=3$), care este adevărată deoarece pentru $x=5$, $y=-2$ se obţine propoziţia adevărată $p(5,-2)$: „$5-2=3$".

Cuantificatorul universal. Propoziţia universală.

Fie $p(x)$ un predicat unar, x aparţinând unei mulţimi $X\neq\emptyset$.

Definiţie. Propoziţia „**oricare ar fi x din X are loc $p(x)$**", se numeşte **propoziţie universală** asociată predicatului $p(x)$.

Notaţie. $(\forall x)p(x)$ (citim: oricare ar fi x din X are loc $p(x)$). Simbolul „$\forall$" se citeşte: **oricare ar fi** şi se numeşte **cuantificator universal**.

Valoarea de adevăr. Propoziţia $(\forall x)p(x)$ este **adevărată** dacă pentru orice x_0 din X, propoziţia $p(x_0)$ este adevărată.
Propoziţia $(\forall x)p(x)$ este **falsă** dacă există cel puţin un x_0 din X pentru care $p(x_0)$ este falsă.

Exemple. 1) Fie predicatul unar $p(x)$: „$x^2+1>0,\ x\in\mathbb{R}$". Propoziţia $(\forall x)(x^2+1>0)$ este adevărată deoarece pentru orice $x_0\in\mathbb{R}$, propoziţia $p(x_0)$: „$x_0^2+1>0$" este adevărată.

2) Fie predicatul $p(x)$: „$x^2-3<0,\ x\in\mathbb{Z}$". Propoziţia $(\forall x)(x^2-3<0)$ este falsă deoarece există $x_0=5$ pentru care propoziţia $p(5)$: „$5^2-3<0$" este falsă.

Observaţii. **1)** Dacă $X=\{a,b,c\}$, atunci propoziţia $(\forall x)p(x)$ este o propoziţie adevărată dacă fiecare din propoziţiile $p(a)$, $p(b)$, $p(c)$ este adevărată. În caz contrar ea este o propoziţie falsă.

2) Dacă predicatul are mai multe variabile, atunci se pot forma propoziţii utilizând cuantificatorul „$\forall$" pentru fiecare variabilă sau în combinaţie cu cuantificatorul „$\exists$".
Fie predicatul binar $p(x,y)$: „$x+y\geq 1,\ x,y\in\mathbb{Z}$."
Propoziţia $(\forall x)(\forall y)(x+y\geq 1)$ (citim: oricare ar fi x din $\mathbb{Z}$ şi oricare ar fi y din $\mathbb{Z}$ are loc $x+y\geq 1$) este falsă deoarece pentru $x=-1$, $y=0$ se obţine propoziţia falsă $p(-1,0)$: „$-1+0\geq 1$".
Propoziţia $(\forall x)(\exists y)(x+y\geq 1)$ (citim: oricare ar fi x din $\mathbb{Z}$, există y din $\mathbb{Z}$ astfel încât $x+y\geq 1$) este adevărată deoarece pentru un x din $\mathbb{Z}$ luând $y\geq 1-x$, y din $\mathbb{Z}$ avem $x+y\geq 1$.
Prin particularizarea unei variabile se obţin alte predicate:
$p(3,y)$: „$3+y\geq 1,\ y\in\mathbb{Z}$", $p(x,-1)$: „$x-1\geq 1,\ x\in\mathbb{Z}$",
iar de aici prin utilizarea cuantificatorilor se obţin propoziţii.
De exemplu $(\exists y)p(3,y)$ (adică există y din $\mathbb{Z}$ astfel încât $3+y\geq 1$) care este o propoziţie adevărată deoarece pentru $y=0$ propoziţia $p(3,0)$: „$3+0\geq 1$" este adevărată.
Propoziţia $(\forall y)p(3,y)$ (citim: pentru orice y din $\mathbb{Z}$, „$3+y\geq 1$" este o propoziţie falsă deoarece pentru $y=-5$, propoziţia $p(3,-5)$: „$3-5\geq 1$" este falsă.
De asemenea, este importantă ordinea în care apar cei doi cuantificatori. Propoziţia $(\exists x)(\forall y)p(x,y)$ nu

are aceeaşi valoare de adevăr cu propoziţia $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$. Fie $p(x,y)$: „$x-2y=1,\ x,y\in\mathbb{N}$". Atunci $(\exists x)(\forall y)(x-2y=1)$ are valoarea de adevăr 1 deoarece pentru orice $y\in\mathbb{N}$, numărul $x=2y+1\in\mathbb{N}$. Considerând propoziţia $(\forall x)(\exists y)(x-2y=1)$ pentru $x=2$, rezultă $y=\frac{1}{2}$ care nu aparţine lui $\mathbb{N}$. Pentru $x=2$, propoziţia $(\exists y)p(2,y)$ are valoarea de adevăr 0.

1.4. OPERAŢII LOGICE ELEMENTARE

Reamintim că în cadrul logicii propoziţiilor **vom studia propoziţiile numai din punct de vedere al calităţii lor de a fi adevărate sau false, altfel spus din punct de vedere al valorii lor de adevăr.** Plecând de la o propoziţie (sau predicat) sau mai multe propoziţii (predicate) vom genera noi propoziţii (predicate) cu ajutorul **operaţiilor logice (operatorilor logici): negaţia, conjuncţia, disjuncţia, implicaţia şi echivalenţa.**

Considerăm o propoziţie. O **operaţie unară** (sau **monară**) îi face să-i corespundă o propoziţie compusă a cărei valoare de adevăr nu depinde decât de propoziţia considerată. Cea mai importantă operaţie unară este

Negaţia

Definiţie. Fie p o propoziţie oarecare. **Negaţia propoziţiei** p este propoziţia notată „non p" care este **adevărată** când p este falsă şi este **falsă** când p este adevărată.

Notaţie. Pentru propoziţia „non p" utilizăm scrierea $\neg p$ sau $\overline{p}$.

Valoarea de adevăr a propoziţiei $\overline{p}$ este dată în tabelul alăturat:

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Exemple

Propoziţia p	$v(p)$	Propoziţia $\overline{p}$	$v(\overline{p})$
„$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$"	0	„$\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$"	1
„10 este multiplu de 5	1	„10 **nu** este multiplu de 5	0
„Triunghiul echilateral are toate laturile congruente"	1	„Triunghiul echilateral **nu** are toate laturile congruente"	0
„Oraşul Bucureşti **nu** este capitala României"	0	„Oraşul Bucureşti este este capitala României"	1

Negaţia predicatelor

Definiţie. Fie $p(x)$ un predicat. Negaţia predicatului $p(x)$ este predicatul notat $\overline{p(x)}$ care **este adevărat** pentru acele valori ale lui x pentru care $p(x)$ este fals şi **este fals** pentru acele valori ale lui x pentru care $p(x)$ este adevărat.

Analog definim negaţia unui predicat de mai multe variabile.

Exemple.

Predicatul p	Predicatul $\overline{p}$
$p(x)$: „$x > 0,\ x \in \mathbb{R}$“	$\overline{p(x)}$: „$x \leq 0,\ x \in \mathbb{R}$“
$p(x)$: „$x = 0$“	$\overline{p(x)}$: „$x \neq 0$“
$p(x,y)$: „$xy \geq 0,\ x,y \in \mathbb{R}$“	$\overline{p(x,y)}$: „$xy < 0,\ x,y \in \mathbb{R}$“
$p(x,y,z)$: „$x+y+z = 1,$ $x,y,z \in \mathbb{R}$“	$\overline{p(x,y,z)}$: „$x+y+z \neq 1,$ $x,y,z \in \mathbb{R}$“

Observaţie. Dacă mulţimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este A, atunci mulţimea de adevăr a predicatului $\overline{p(x)}$ este $\complement_X A$.

Negaţia şi complementara unei mulţimi

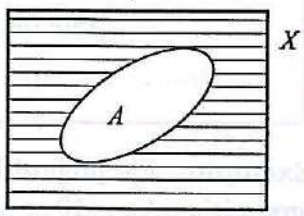
În cele ce urmează, pe parcursul prezentării celorlalţi operatori logici, vom evidenţia un paralelism între algebra operaţiilor cu mulţimi şi algebra operaţiilor cu propoziţii.
Fie $X \neq \emptyset$ o mulţime, numită **mulţime referenţială** şi $A \neq \emptyset$ o submulţime a sa.

Definiţie. Se numeşte **predicat asociat mulţimii** A predicatul
$p_A(x)$: „$x \in A$“ (citim: x aparţine mulţimii A)

Negaţia predicatului $p_A(x)$ este predicatul $\overline{p_A(x)}$: „$x \notin A$“ (citim: x nu aparţine mulţimii A)

Complementara mulţimii A în raport cu X se obţine printr-o **negaţie.**
Mai precis $\complement_X A = \{x \in X \mid x \notin A\}$ sau $\complement_X A = \{x \in X \mid \overline{p_A(x)}\}$.

Aşadar complementara mulţimii A în raport cu X, $\complement_X A$ este formată din acele elemente care nu sunt în A (şi sunt în X).
Să reţinem deci: **complementara unei mulţimi se exprimă printr-o negaţie.** În diagrama Venn a acestor mulţimi, complementara lui A în raport cu X este reprezentată prin domeniul haşurat.



Negaţia propoziţiilor care conţin cuantificatori

Negaţia unei propoziţii universale

Considerăm propoziţia adevărată p : „$(\forall x)(x^2+1 > 0),\ x \in \mathbb{R}$“. A nega această propoziţie revine la a afirma că există cel puţin un $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $x^2+1 \leq 0$, ceea ce evident este fals. Prin urmare, negaţia propoziţiei p este propoziţia $\overline{p}$: „$(\exists x)(x^2+1 \leq 0),\ x \in \mathbb{R}$“.
Deci

Dacă p este **propoziţia universală** a unui predicat $p(x)$, atunci $\overline{p}$ este **propoziţia existenţială** a predicatului $\overline{p(x)}$.

$\overline{p}$ se obţine din p înlocuind: 1) cuantificatorul universal „$\forall$“ prin cuantificatorul existenţial „$\exists$“.
2) predicatul $p(x)$ prin predicatul $\overline{p(x)}$.

Observaţie. Prin negaţia enunţului $(\forall x)p(x)$ se obţine enunţul $(\exists x)\overline{p(x)}$ şi spunem că x este un **contraexemplu** pentru predicatul $p(x)$. De exemplu negaţia propoziţiei „$(\forall x)(x^2-1 > 0),\ x \in \mathbb{R}$“ este propoziţia „$(\exists x)(x^2-1 \leq 0),\ x \in \mathbb{R}$“. Pentru $x = 0$ avem $0^2-1 \leq 0$, adevărat. Spunem că $x = 0$ este un contraexemplu pentru predicatul $p(x)$: „$x^2-1 > 0,\ x \in \mathbb{R}$“.

Negaţia unei propoziţii existenţiale

Fie propoziţia falsă p : „$(\exists x)(x^2+1=0)$, $x \in \mathbb{R}$“. Negaţia acestei propoziţii este propoziţia $\overline{p}$: „$(\forall x)(x^2+1 \neq 0)$, $x \in \mathbb{R}$“, care este adevărată. Deci

Dacă p este **propoziţia existenţială** a unui predicat $p(x)$, atunci negaţia sa $\overline{p}$ este **propoziţia universală** a predicatului $\overline{p(x)}$.

$\overline{p}$ se obţine din p înlocuind: 1) cuantificatorul existenţial „$\exists$“ prin cuantificatorul universal „$\forall$“.
2) predicatul $p(x)$ prin predicatul $\overline{p(x)}$.

Conjuncţia propoziţiilor

Următoarele operaţii logice antrenează două propoziţii (sau predicate) şi din acest motiv ele se numesc şi **operaţii binare**. Printr-o operaţie binară la două propoziţii se asociază o altă propoziţie (numită **compusă** sau **formulă**) a cărei valoare de adevăr nu depinde decât de cele două propoziţii considerate (de valorile lor de adevăr).

Definiţie. Conjuncţia propoziţiilor p, q este propoziţia notată $p \wedge q$ (citim: p şi q) care este **adevărată** dacă şi numai dacă p şi q sunt adevărate şi **falsă** în celelalte cazuri.

Valoarea de adevăr a propoziţiei $p \wedge q$ este dată în tabelul alăturat:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemplu. Fie propoziţiile p : „10 se divide prin 5“, q : „$3 > 1$“. Conjuncţia propoziţiilor p, q este propoziţia $p \wedge q$: „10 se divide prin 5 şi $3 > 1$“, care este adevărată deoarece atât p cât şi q sunt propoziţii adevărate.

Conjuncţia predicatelor

Definiţie. Fie $p(x)$ şi $q(x)$ două predicate unare. **Conjuncţia predicatelor** $p(x)$, $q(x)$ este predicatul $p(x) \wedge q(x)$ pentru care propoziţia $p(x) \wedge q(x)$ este **adevărată** pentru acele valori ale lui x pentru care atât $p(x)$ cât şi $q(x)$ sunt adevărate şi **falsă** în celelalte cazuri.

Analog se defineşte conjuncţia predicatelor de mai multe variabile.

Exemple. 1) Fie predicatele $p(x)$: „$x \in \{-1,0,1,2,3\}$, $x \in \mathbb{Z}$“, $q(x)$: „$x \in \{-2,0,1,3,5\}$, $x \in \mathbb{Z}$“. Atunci $p(x) \wedge q(x)$: „$x \in \{-1,0,1,2,3\}$, $x \in \mathbb{Z}$ şi $x \in \{-2,0,1,3,5\}$, $x \in \mathbb{Z}$“, adică
$p(x) \wedge q(x)$: „$x \in \{0,1,3\}$, $x \in \mathbb{Z}$“ (care corespunde intersecţiei celor două mulţimi).

2) Fie $p(x,y)$: „$x+y=1$, $x,y \in \mathbb{R}$“ şi $q(x,y)$: „$x-y=3$, $x,y \in \mathbb{R}$“ două predicate binare. Atunci conjuncţia acestor predicate este predicatul: $p(x,y) \wedge q(x,y)$: „$x+y=1$ şi $x-y=3$“ care devine o propoziţie adevărată pentru acele perechi (x,y) de numere reale care verifică ecuaţiile $x+y=1$, $x-y=3$. Găsim $x=2$, $y=-1$. Aşadar propoziţia $p(x,y) \wedge q(x,y)$ este adevărată pentru $x=2$, $y=-1$. Aceste valori reprezintă soluţia sistemului format de cele două ecuaţii.

Conjuncţia şi intersecţia mulţimilor

Fie A, B două mulţimi nevide. Predicatele asociate celor două mulţimi sunt: $p_A(x)$: „$x \in A$“, $p_B(x)$: „$x \in B$“. Atunci conjuncţia acestor predicate este predicatul $p_A(x) \wedge p_B(x)$: „$x \in A$ şi $x \in B$“, ceea ce este tot una cu $p_A(x) \wedge p_B(x)$: „$x \in A \cap B$.“

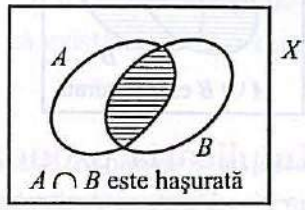
Dar pentru mulţimea $A \cap B$ avem predicatul $p_{A\cap B}(x)$: „$x \in A \cap B$“.

Prin urmare cele două predicate $p_A \wedge p_B$, $p_{A\cap B}$ se identifică.

Intersecţia mulţimilor A, B se descrie astfel:

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$

adică intersecţia a două mulţimi A, B este formată din acele elemente care se află atât în A cât şi în B. Formularea se poate extinde la mai mult de două mulţimi.



Să reţinem că: **intersecţia a două mulţimi se exprimă printr-o conjuncţie.**

Dacă A şi B sunt două submulţimi ale aceleiaşi mulţimi X, atunci într-o diagramă Venn intersecţia mulţimilor A şi B este reprezentată prin partea comună haşurată.

Disjuncţia propoziţiilor

Definiţie. Se numeşte **disjuncţia propoziţiilor** p, q propoziţia notată $p \vee q$ (citim: p sau q) care este **adevărată** dacă şi numai dacă cel puţin una din propoziţiile p, q este adevărată şi **falsă** în caz contrar.

Valoarea de adevăr a propoziţiei $p \vee q$ este dată în tabelul alăturat:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemple. 1) Fie p : „100 se divide prin 5“, q : „peştele înoată în apă“ două propoziţii adevărate. Atunci propoziţia $p \vee q$: „100 se divide prin 5 sau peştele înoată în apă“ este adevărată.

2) Fie propoziţiile p: „$10 < 3$„q: „$2+3 \neq 5$“ ambele false. Atunci propoziţia $p \vee q$: „$10 < 3$ sau $2+3 \neq 5$“ este falsă.

Disjuncţia predicatelor

Definiţie. Fie $p(x)$ şi $q(x)$ două predicate unare. **Disjuncţia predicatelor** $p(x)$, $q(x)$ este predicatul notat $p(x) \vee q(x)$ pentru care propoziţia $p(x) \vee q(x)$ este **adevărată** pentru acele valori ale lui x pentru care cel puţin una din propoziţiile $p(x)$, $q(x)$ este adevărată şi **falsă** în celelalte cazuri.

Analog se defineşte disjuncţia predicatelor de mai multe variabile.

Exemple.

1) Fie predicatele: $p(x)$: „$x \in \{-5, 0, 3, 4\}$, $x \in \mathbb{Z}$, $q(x)$: „$x \in \{-3, 0, 3, 5\}$, $x \in \mathbb{Z}$“.

Atunci predicatul $p(x) \vee q(x)$ are exprimarea

$p(x) \vee q(x)$: $x \in \{-5, 0, 3, 4\}$ sau $x \in \{-5, 0, 3, 5\}$“ adică $p(x) \vee q(x)$: $x \in \{-5, 0, 3, 4, 5\}$“.

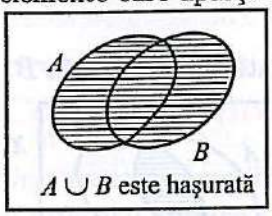
2) Fie predicatele: $p(x, y)$: „$x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$“, $q(x, y)$: „$x = y$, $x, y \in \mathbb{R}$“.

Atunci disjuncţia acestor predicate este predicatul:

$p(x, y) \vee q(x, y)$: „$x < y$ sau $x = y$, $x, y \in \mathbb{R}$“ ceea ce se notează „$x \leq y$, $x, y \in \mathbb{R}$“.

Disjuncţia şi reuniunea mulţimilor

Dacă A, B sunt două mulţimi nevide, iar $p_A(x)$: „$x \in A$“, $p_B(x)$: „$x \in B$“ predicatele asociate acestor mulţimi. Atunci $p_A(x) \vee p_B(x)$: „$x \in A$ sau $x \in B$“ sau acelaşi lucru $p_A(x) \vee p_B(x)$: „$x \in A \cup B$“.
Pentru mulţimea $A \cup B$ avem predicatul: $p_{A\cup B}(x)$: „$x \in A \cup B$“.
Deci predicatele $p_A(x) \vee p_B(x)$, $p_{A\cup B}(x)$ se identifică.
În final $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$, adică reuniunea a două mulţimi A, B este formată din acele elemente care aparţin cel puţin uneia din ele.



$A \cup B$ este haşurată

Formularea se poate extinde pentru mai mult de două mulţimi.
Să reţinem că: **reuniunea a două mulţimi se exprimă printr-o disjuncţie.**

Pentru A, B, submulţimi ale lui X, într-o diagramă Venn a acestor mulţimi, reuniunea lui A cu B este reprezentată prin domeniul haşurat.

Implicaţia propoziţiilor

Definiţie. Se numeşte **implicaţia propoziţiilor** p, q în această ordine, propoziţia notată $p \to q$ (citim: „p implică q“ sau „dacă p, atunci q“) care este **falsă** dacă şi numai dacă p este adevărată şi q este falsă, şi **adevărată** în rest.

Propoziţia p se numeşte **premisă** sau **ipoteză**, iar propoziţia q se numeşte **concluzie.**

Valoarea de adevăr a propoziţiei $p \to q$ este dată în tabelul alăturat:

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Observaţii. **1)** Noţiunea de implicaţie joacă un rol important în matematică.
Observăm din tabel că dacă p (ipoteza) este adevărată şi $p \to q$ este de asemenea adevărată, atunci q (concluzia) este neapărat adevărată, ceea ce înseamnă că în orice demonstraţie plecând de la o ipoteză adevărată şi efectuând un raţionament corect (implicaţia adevărată) se ajunge la concluzie adevărată.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$	$p \to q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

2) Tot din tabel se deduce că dacă ipoteza este falsă, atunci propoziţia $p \to q$ este adevărată oricare ar fi valoarea de adevăr a propoziţiei q. Se spune că „falsul implică orice“.
3) Implicaţia propoziţiilor p, q este propoziţia $\overline{p} \vee q$. Într-adevăr avem tabelul de valori:

Exemple. 1) Fie propoziţiile false p : „$1 = 3$“, q : „Crocodilul zboară“.
Atunci propoziţia $p \to q$: „dacă $1 = 3$, atunci Crocodilul zboară“ este adevărată.
2) Fie propoziţiile p: „$3 + 2 = 5$“ (adevărată), q : „Într-un triunghi echilateral înălţimile sunt congruente“ (adevărată).
Propoziţia $p \to q$: „dacă $3 + 2 = 5$, atunci într-un triunghi echilateral înălţimile sunt congruente“ este adevărată.
3) Fie propoziţiile p: „$2 \cdot 3 = 6$“ (adevărată), q: „$1 > 3$‘ (falsă). Atunci propoziţia $p \to q$: „dacă $2 \cdot 3 = 6$, atunci $1 > 3$“ este falsă.

Implicaţia predicatelor (Consecinţa logică)

Definiţie. Fie $p(x)$, $q(x)$ două predicate. Se numeşte **implicaţia predicatelor** $p(x)$, $q(x)$ în această ordine, predicatul notat $p(x) \Rightarrow q(x)$ (citim: dacă $p(x)$, atunci $q(x)$ sau încă $q(x)$ este consecinţă logică a lui $p(x)$), pentru care propoziţia $(\forall x)(p(x) \to q(x))$ este adevărată.

Analog se defineşte implicaţia predicatelor cu mai multe variabile.
Semnul „ $\to$" îl utilizăm pentru propoziţii fără variabile, iar semnul „ $\Rightarrow$ " pentru propoziţii cu variabile.

Exemple. 1) Fie predicatele $p(x)$: „$x > 1$, $x \in \mathbb{R}$", $q(x)$: „$x^2 > 1$, $x \in \mathbb{R}$". Avem $p(x) \Rightarrow q(x)$, adică: „dacă $x > 1$, atunci $x^2 > 1$" este adevărată, deoarece dacă $x > 1$, atunci $x^2 > 1$ (este adevărat) şi deci propoziţia $p(x) \to q(x)$ este adevărată. Implicaţia $q(x) \Rightarrow p(x)$ nu are loc pentru că există $x = -2$ pentru care $(-2)^2 > 1$, adevărat, dar $-2 > 1$ este fals.

2) Fie predicatele $p(x)$: „$x - 2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$", „$q(x)$: „$x^2 - 4 = 0$, $x \in \mathbb{R}$".
Predicatul $p(x) \Rightarrow q(x)$, adică „dacă $x - 2 = 0$, atunci $x^2 - 4 = 0$" este adevărată, deoarece $p(x)$ este adevărat pentru $x = 2$ şi $q(2)$: „$2^2 - 4 = 0$" este adevărată, deoarece $p(x)$ este adevărat pentru $x = 2$ şi $q(2)$: „$2^2 - 4 = 0$" este adevărată (dacă p este falsă, atunci implicaţia este adevărată; din acest motiv am determinat valoarea care face propoziţiile p, q adevărate).

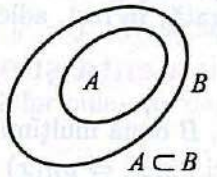
3) Fie predicatele $p(x)$: „$x \in \{-1, 0, 1\}$, $x \in \mathbb{Z}$", $q(x)$: „$x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $x \in \mathbb{Z}$".
Implicaţia $p(x) \Rightarrow q(x)$ se traduce prin „dacă $x \in \{-1, 0, 1\}$, atunci $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$" care este adevărată şi exprimă faptul că mulţimea $\{-1, 0, 1\}$ este inclusă în mulţimea $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

4) Fie predicatele $p(x, y)$: „$x = y$, $x, y \in \mathbb{R}$", $q(x, y)$: „$x^2 = y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$". Atunci $p(x, y) \Rightarrow q(x, y)$ deoarece din $x = y$ rezultă $x^2 = y^2$, dar $q(x, y) \Rightarrow p(x, y)$ nu are loc deoarece din $x^2 = y^2$ poate rezulta şi $x = -y$. Altfel spus nu pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ este adevărată. De exemplu pentru $x = -3$, $y = 3$ are loc $x^2 = y^2$, dar $-3 \neq 3$.

Implicaţia şi incluziunea mulţimilor

Fie A, B două mulţimi nevide, iar $p_A(x)$: „$x \in A$", $p_B(x)$: „$x \in B$" predicatele asociate acestor mulţimi. Atunci $p_A(x) \Rightarrow p_B(x)$ are formularea: „dacă $x \in A$, atunci $x \in B$", adică $A \subset B$.

Deci: **incluziunea de mulţimi se exprimă printr-o implicaţie.**
Într-o diagramă Venn, vom reprezenta faptul că mulţime A este inclusă în mulţimea B, desenând domeniul care reprezintă pe A în interiorul celui care figurează pe B.



Echivalenţa propoziţiilor

Definiţie. Se numeşte **echivalenţa propoziţiilor** p, q, propoziţia notată $p \leftrightarrow q$ (citim: „p echivalent cu q" sau „p dacă şi numai dacă q") care este **adevărată** dacă şi numai dacă ambele propoziţii au aceeaşi valoare de adevăr.

Valoarea de adevăr a propoziţiei $p \leftrightarrow q$ este dată în tabelul alăturat:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Observaţie. Propoziţia $p \leftrightarrow q$ se arată uşor că se identifică cu propoziţia $(p \to q) \wedge (q \to p)$. Această afirmaţie se probează cu ajutorul tabelului de adevăr

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Exemple. 1) Fie propoziţiile p : „$10 : 2 = 5$“, q : „$3 > 1$“.
Propoziţia $p \leftrightarrow q$: „$10 : 2 = 5$ dacă şi numai dacă $3 > 1$“ este adevărată deoarece p, q sunt propoziţii adevărate.
2) Fie propoziţiile p : „3 divide 7“, q: „$-5 > 10$“. Propoziţia $p \leftrightarrow q$: „3 divide 7 dacă şi numai dacă $-5 > 10$“ este de asemenea adevărată, deoarece p, q sunt false.

Echivalenţa predicatelor

Definiţie. Fie $p(x)$, $q(x)$ două predicate unare. Predicatele $p(x)$ şi $q(x)$ se numesc **echivalente** şi scriem $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ dacă propoziţia $(\forall x)(p(x) \leftrightarrow q(x))$ este adevărată.

Analog se defineşte echivalenţa predicatelor cu mai multe variabile.

Observaţii. 1) Semnul „$\leftrightarrow$“ îl utilizăm pentru echivalenţa propoziţiilor fără variabile, iar semnul „$\Leftrightarrow$“ pentru echivalenţa propoziţiilor cu variabile (deci pentru predicate).
2) Avem $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ dacă pentru orice valoare x_0 a variabilei x propoziţiile $p(x_0)$ şi $q(x_0)$ au aceeaşi valoare de adevăr.

Exemple. 1) Fie predicatele $p(x)$: „$x - 1 = 0$, $x \in \mathbb{N}$“, $q(x)$: „$x^2 - 1 = 0$, $x \in \mathbb{N}$“. Să observăm că predicatul $p(x)$ este o propoziţie adevărată pentru $x = 1 \in \mathbb{N}$, iar predicatul $q(x)$ este, de asemenea, o propoziţie adevărată pentru $x = 1 \in \mathbb{N}$, în rest pentru $x \in \mathbb{N}$, $x \neq 1$, propoziţiile $p(x)$ şi $q(x)$ sunt false. Prin urmare $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.

2) Fie predicatele $p(x)$: „$x \in \{-1, 0, 1\}$, $x \in \mathbb{R}$“, $q(x)$: „$x(x-1)(x+1) = 0$, $x \in \mathbb{R}$“. Predicatul $q(x)$ este o propoziţie adevărată pentru $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Pentru aceste valori şi $p(x)$ este o propoziţie adevărată. În rest, adică pentru $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ propoziţiile $p(x)$ şi $q(x)$ sunt false. Deci $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.

Echivalenţa şi egalitatea mulţimilor

Fie A, B două mulţimi nevide şi predicatele asociate acestora, $p_A(x)$: „$x \in A$“, $p_B(x)$: „$x \in B$“.
Atunci $p_A(x) \Leftrightarrow p_B(x)$ are formularea „$x \in A$ dacă şi numai dacă $x \in B$“, ceea ce este totuna cu $A = B$.
Pe de altă parte $p_A(x) \Leftrightarrow p_B(x)$ se exprimă prin $(p_A(x) \Rightarrow p_B(x)) \wedge (p_B(x) \Rightarrow p_A(x))$ sau $A \subset B$ şi $B \subset A$.
Deci $A = B \Leftrightarrow (A \subset B$ şi $B \subset A)$ şi spunem că demonstrăm egalitatea mulţimilor A, B prin dubla incluziune.
Deci: **egalitatea a două mulţimi se exprimă prin echivalenţă.**

Formule de calcul propoziţional

Utilizând operaţiile logice elementare (conectorii logici) se pot construi propoziţii complexe ale logicii propoziţiilor. De fiecare dată ne interesează valoarea de adevăr (adevărat sau fals) a acestor propoziţii. Pentru a determina valoarea de adevăr a acestor propoziţii se utilizează tabelele de adevăr în care sunt trecute valorile de adevăr ale propoziţiilor componente (toate combinaţiile posibile de valori de adevăr pentru două variabile avem $2 \cdot 2 = 4$ combinaţii; pentru trei variabile sunt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ combinaţii) şi apoi

se ţine seama de definiţiile operaţiilor logice.

Definiţie. Se numeşte **formulă a calculului propoziţional** orice expresie logică obţinută din propoziţii simple cu ajutorul conectorilor logici $(^{-}, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$.

Notaţie. Vom nota formulele calculului propoziţional cu literele $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ sau $\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n), \ldots$ pentru a marca prezenţa propoziţiilor $p_1, p_2, \ldots, p_n$ în structura formulei α.

Exemple. $\alpha = \alpha(p) = p \vee \overline{p}$; $\beta = \beta(p,q) = p \wedge (q \vee \overline{q})$, $\gamma = \gamma(p,q,r) = p \wedge (q \vee r)$. Fie $\alpha = \alpha(p,q,r\ldots)$ o formulă. Dacă înlocuim literele $p, q, r \ldots$ cu propoziţii se obţine o nouă propoziţie (adevărată sau falsă) care se numeşte **valoarea formulei** α pentru propoziţiile $p, q, r \ldots$ date.

Definiţie. Formula $\alpha = \alpha(p,q,r\ldots)$ se numeşte **formulă identic adevărată** sau **tautologie** dacă are valoarea de adevăr 1, indiferent de propoziţiile care o compun.

Două formule $\alpha(p,q,r,\ldots)$, $\beta(p,q,r,\ldots)$ se numesc **echivalente** şi scriem $\alpha \equiv \beta$ sau $\alpha \Leftrightarrow \beta$ (citim: α echivalent cu β) dacă şi numai dacă pentru orice înlocuire a literelor $p, q, r, \ldots$ cu diverse propoziţii, valorile celor două formule sunt propoziţii care au aceeaşi valoare de adevăr.

Exemple. 1) Să se arate că $\alpha(p) = p \vee \overline{p}$ **(legea terţului exclus)** este o tautologie.

p	$\overline{p}$	$\alpha = p \vee \overline{p}$
1	0	1
0	1	1

R. Pentru aceasta construim tabelul de adevăr alăturat. Se constată că formula α are doar valoarea de adevăr 1 pentru orice valoare de adevăr a propoziţiei p. Deci α este o tautologie.

Observaţie. Propoziţia „p sau $\overline{p}$" este o propoziţie întotdeauna adevărată şi constituie „principiul terţului exclus". Acest tip de raţionament este utilizat atunci când o problemă impune analiza ei pe cazuri (un caz şi negaţia lui).

2) Fie $\alpha(p) = \overline{(\overline{p})}$, $\beta = p$. Să se arate că $\alpha \equiv \beta$ **(legea dublei negaţii).**

$\beta = p$	$\overline{p}$	$\alpha = \overline{\overline{p}}$
1	0	1
0	1	0

R. Tabla de adevăr pentru cele două formule este:

Observaţie. Negarea negaţiei unei propoziţii este echivalentă cu propoziţia.

p	q	$\alpha = p \rightarrow q$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\beta = \overline{q} \rightarrow \overline{p}$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1

3) Fie $\alpha(p,q) = p \rightarrow q$ şi $\beta(p,q) = \overline{q} \rightarrow \overline{p}$. Să se arate că $\alpha \equiv \beta$ **(metoda reducerii la absurd).**

R. Tabla de adevăr pentru cele două formule este dată alăturat.

Observaţie. Asupra acestei metode vom reveni la tipuri de raţionament.

4) (Formulele lui De Morgan.) Să se arate că oricare ar fi propoziţiile p, q avem:

1) $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$; 2) $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$;

1) Negaţia disjuncţiei este conjuncţia negaţiilor. 2) Negaţia conjuncţiei este disjuncţia negaţiilor.

R. Fie $\alpha = \alpha(p,q) = \overline{p \vee q}$, $\beta = \beta(p,q) = \overline{p} \wedge \overline{q}$. Să arătăm că $\alpha \equiv \beta$.
Pentru a arăta că cele două formule sunt echivalente realizăm tabelul cu valorile de adevăr.

p	q	$p \vee q$	$\alpha = \overline{p \vee q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\beta = \overline{q} \wedge \overline{p}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Urmărind coloanele cu valorile de adevăr pentru α şi β în funcţie de valorile de adevăr ale propoziţiilor p, q constatăm că sunt identice, ceea ce arată echivalenţa formulelor α şi β.

Observaţie. Dacă $A, B \subseteq X$ sunt mulţimi, atunci formulele lui De Morgan sunt:
1') $\complement_X(A \cup B) = \complement_X A \cap \complement_X B$ şi
2') $\complement_X(A \cap B) = \complement_X A \cup \complement_X B$, ceea ce înseamnă:
1') Complementara reuniunii este egală cu intersecţia complementarelor.
2') Complementara intersecţiei este egală cu reuniunea complementarelor.

Condiţie suficientă, condiţie necesară

Condiţie suficientă

Dacă p, q sunt propoziţii, atunci p este o **condiţie suficientă** pentru q dacă $p \Rightarrow q$. Se mai spune că propoziţia p este mai „tare" decât q sau că q este mai „slabă" decât p.

Exemple. 1) Dacă patrulaterul $ABCD$ este romb, atunci diagonalele lui sunt perpendiculare. În acest caz propoziţia p : „patrulaterul $ABCD$ este romb" este condiţia suficientă pentru propoziţia q : „diagonalele sunt perpendiculare".

2) Fie propoziţiile p : „n este divizibil prin 10", q : „n este divizibil prin 2". Atunci propoziţia $p \Rightarrow q$ exprimă o condiţie suficientă ca n să fie divizibil prin 2 dacă n este divizibil prin 10.

Condiţie necesară

Dacă p, q sunt două propoziţii, atunci p este o condiţie necesară pentru q dacă $q \Rightarrow p$.

Exemplu. Fie propoziţiile p : „Un număr este divizibil prin 5", q : „un număr este divizibil prin 10". Atunci p este o condiţie necesară pentru q (dar nu suficientă).

Condiţie necesară şi suficientă

Fiind date două propoziţii p, q se spune că p este o condiţie **suficientă şi necesară** pentru q (sau „p dacă şi numai dacă q" sau „p atunci şi numai atunci q") dacă $p \Leftrightarrow q$.

Exemple. 1) Mediana într-un triunghi este egală cu jumătate din latura pe care o intersectează în părţi egale dacă şi numai dacă unghiul din care pleacă mediana este unghi drept.
2) Într-un triunghi dreptunghic o catetă este jumătate din lungimea ipotenuzei dacă şi numai dacă unghiul opus acestei catete are măsura egală cu 30°.,
3) Un patrulater este dreptunghic atunci şi numai atunci când diagonalele sale sunt congruente.
4) Suma a două numere întregi este număr par dacă şi numai dacă cele două numere au aceeaşi paritate.

1.5. MULŢIMI FINITE, INFINITE, MĂRGINITE. PROBLEME DE NUMĂRARE

Atunci când numărăm elementele unei mulţimi spunem: „1, 2, 3, ...", oprindu-ne atunci când am epuizat toate elementele mulţimii. În acest caz spunem că mulţimea dată este finită. Din perspectivă matematică, ceea ce facem este să stabilim un anume tip de corespondenţă între mulţimea dată şi o parte a mulţimii numerelor naturale. Dacă mulţimea este astfel încât numărătoarea nu se termină, asemănător mulţimii numerelor naturale, atunci spunem că mulţimea este infinită.
Forma sub care prezentăm aceste mulţimi (finite şi infinite), este una primitivă, o abordare riguroasă necesitând noţiunea de funcţie bijectivă şi cunoaşterea metodei inducţiei matematice.

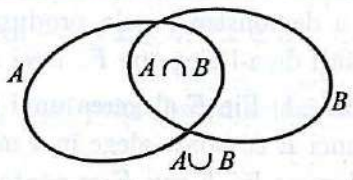
Definiţie. O mulţime se numeşte **finită**, dacă are n elemente, $n \in \mathbb{N}$.
O mulţime se numeşte **infinită**, dacă nu este finită.

Exemple. 1) Mulţimea literelor alfabetului este o mulţime finită.
2) Mulţimea numerelor naturale este o mulţime infinită.
Pentru o mulţime finită A, notăm prin $n(A)$ (uneori notat $\text{card}(A)$ sau $|A|$) numărul de elemente ale mulţimii A.
Prezentăm câteva rezultate imediate pentru mulţimile finite şi infinite.

Lemă. Dacă A şi B sunt mulţimi finite şi disjuncte (adică $A \cap B = \emptyset$), atunci $A \cup B$ este mulţime finită şi în plus $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.
Această relaţie este cunoscută sub numele de **regula sumei**.

Demonstraţie. Pentru a număra elementele lui $A \cup B$, vom începe prin a le număra pe cele ale mulţimii A care sunt $n(A)$. Celelalte elemente din $A \cup B$ sunt numai ale lui B, care nu se află (nici unul) în A şi sunt în total $n(B)$. Deci, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. ■

Teoremă. Dacă A şi B sunt mulţimi finite, atunci $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ sunt mulţimi finite şi, mai mult $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.



Formula se numeşte **principiul includerii şi excluderii**.

Demonstraţie. Începem rezolvarea prin a observa că în $A \cup B$ se află elemente care aparţin atât lui A cât şi lui B (deci, comune celor două mulţimi). Deci, în $n(A) + n(B)$ intră de două ori elementele comune ale lui A şi B, iar în $n(A \cup B)$ o singură dată. De aceea, în membrul drept se scade numărul acestor elemente comune. ■

Altfel. Mulţimea A este reuniunea mulţimilor disjuncte $A - B$, $A \cap B$ şi $B - A$. Deci,
$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) = [n(A - B) + n(A \cap B)] + [n(B - A) + n(A \cap B)] - n(A \cap B) =$
$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. ■

Observaţii. **1)** Formula din teoremă se numeşte **principiul** (sau **formula**) **includerii şi excluderii**, deoarece unele elemente se includ şi într-o mulţime şi în alta, iar altele se elimină.
2) Formula rămâne adevărată şi dacă se înlocuieşte $\cup$ cu $\cap$ şi $\cap$ cu $\cup$, când se obţine, de asemenea, **formula includerii şi excluderii**:

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B).$$

3) Dacă A, B, C sunt trei mulţimi finite, atunci

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Teoremă. 1) Fie B o mulţime finită. Dacă $A \subset B$, atunci A este o mulţime finită şi
$n(B - A) = n(B) - n(A)$.
2) Fie A o mulţime infinită şi $A \subset B$. Atunci B este, de asemenea, o mulţime infinită.

Demonstraţie. 1) Din $B = (B - A) \cup (A \cap B)$ şi $(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$, via rezultatul din lemă, se deduce $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$. Dar $A \cap B = A$ şi deci $n(A \cap B) = n(A)$. ■
O altă regulă de bază în probleme de numărare, pe lângă regula sumei, este dată de următoarea

Lemă. Dacă A şi B sunt mulţimi finite, iar $A \times B = \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$ este produsul cartezian al mulţimii A cu mulţimea B, atunci $n(A \times B) = n(A)n(B)$.

Această relaţie se numeşte **regula produsului.**

Aceste două reguli, după cum se poate vedea, au fost prezentate în limbaj de teoria mulţimilor. În limbajul obişnuit, ele au următoarele formulări:

1) (Regula sumei). Dacă un anumit obiect E se poate alege în m moduri şi un al doilea obiect F se poate alege în n moduri, în plus, nici o alegere a lui E nu coincide cu nici o alegere a lui F, atunci „alegerea lui E sau F" poate fi realizată în $(m+n)$ moduri.

2) (Regula produsului). Dacă un obiect E se poate alege în m moduri şi dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect F se poate alege în n moduri, atunci alegerea perechii (E,F) poate fi realizată în $m \cdot n$ moduri.

Aceste reguli se extind uşor la cazul a n obiecte şi asupra lor vom reveni atunci când vom discuta probleme de combinatorică.

Pentru a demonstra regula produsului, este de ajuns să vedem că, pentru o alegere a lui E, avem n posibilităţi de a-l alege pe F. Deci numărul total de perechi (E,F) este $m \cdot n$.

Exemple. 1) Fie E alegerea unui număr prim între 10 şi 20, iar F alegerea unui număr par între 10 şi 20. Atunci E se poate alege în 4 moduri $\{11,13,17,19\}$, iar F poate fi ales în 4 moduri $\{12,14,16,18\}$. Deci, alegerea lui E sau F se poate face în 4+4=8 moduri.

2) Considerăm E alegerea unui număr mai mic decât 10, iar F alegerea unui număr par, mai mic decât 10. Atunci E se realizează în 4 moduri $\{2,3,5,7\}$, iar F se realizează în 4 moduri $\{2,4,6,8\}$. Totuşi, alegerea lui E sau F nu se realizează în 4+4=8 moduri, deoarece elementul 2 a fost numărat de două ori. Prin urmare, numărul corect de alegeri ale lui „E sau F" este $4+4-1=7$.

3) Numerele de înmatriculare ale unei maşini într-un judeţ, au structura $AB|**|***$ pentru judeţul Alba, de exemplu. Primele două locuri, marcate cu steluţe, se pot completa cu orice cifră de la 0 la 9, iar următoarele trei locuri, cu litere ale alfabetului românesc, de la A la Z (în total 28). Să determinăm câte maşini pot fi înmatriculate, după această schemă, în judeţul Alba. Conform regulii produsului, acest număr este egal cu $10 \cdot 10 \cdot 28 \cdot 28 \cdot 28 = 2195200$.

4) Numărul de meciuri pe care îl dispută un jucător de tenis este dat de formula $f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$, pentru că un jucător poate disputa, jucând cu oricare din ceilalţi, $n-1$ partide. Deci numărul de partide este $\frac{n(n-1)}{2}$, deoarece se numără o singură dată o partidă dintre oricare doi jucători.

Multe rezultate în analiza combinatorică vin de la un principiu simplu, cunoscut sub numele de

Principiul cutiei (Principiul lui Dirichlet). Dacă n cutii sunt ocupate de $n+1$ iepuri, atunci în cel puţin o cutie se află cel puţin doi iepuri.

Mai general, dacă repartizăm $(nk+1)$ iepuri în k cutii, atunci în cel puţin o cutie se află cel puţin $(n+1)$ iepuri.

După cum se constată, acest principiu pune în evidenţă un număr minim de iepuri într-o anumită cutie. Prin urmare, este un **principiu de existenţă.** Demonstraţia apelează la metoda reducerii la absurd (a se vedea 1.6).

Exemplu. Într-o sală de spectacol se află n persoane ($n \geq 2$). Să se arate că printre ele se găsesc doi

oameni care au acelaşi număr de cunoştinţe (se presupune că dacă A este cunoscut al lui B, atunci şi B este cunoscut al lui A; nimeni nu este considerat ca fiind cunoscut al lui însuşi).

R. Se vor lăsa la o parte persoanele care nu au nici un cunoscut în sală. Fie k numărul persoanelor care au cel puţin o cunoştinţă în sală. Fiecare din cele k persoane poate avea $1, 2, \ldots, (k-1)$ cunoscuţi (numărul de cunoscuţi sunt „cutiile", iar persoanele sunt „iepurii"). Conform principiului cutiei, vor exista cel puţin două persoane care au acelaşi număr de cunoscuţi.

Definiţie. O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte **mărginită**, dacă există două numere reale m, M pentru care $m \leq x \leq M$, $\forall x \in A$.

Numărul m se numeşte **minorant** pentru mulţimea A, iar M se numeşte **majorant** pentru mulţimea A. Cele două numere m, M nu sunt unice. Orice număr $m' \leq m$ este, de asemenea, un minorant al lui A, iar orice număr $M' \geq M$ reprezintă un majorant pentru A.

Exemple. 1) $A = \{-2, 1, 3, 5\}$ este mărginită deoarece luăm, de exemplu, $m = -2$, $M = 5$ când avem $-2 \leq x \leq 5$, $\forall x \in A$. Drept m poate fi orice număr mai mic decât -2, iar în rolul lui M se poate pune orice număr mai mare ca 5.

Să observăm că **orice mulţime finită este mărginită.**

2) $B = [-5, 6]$ este mărginită, deoarece pentru $m = -5$ şi $M = 6$ avem $-5 \leq x \leq 6$, $\forall x \in B$.

Să observăm că B este mărginită, fără a fi finită.

3) $\mathbb{N}$ nu este mărginită, deoarece nu admite majoranţi. (Într-adevăr, dacă prin absurd ar exista $M \in \mathbb{R}$ un majorant pentru $\mathbb{N}$, atunci numărul natural $[M] + 1 > M$!).

Exemple importante de mulţimi mărginite

Fie $a < b$. Atunci:

1) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ = intervalul închis la ambele capete;

2) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ = intervalul deschis la ambele capete;

3) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ = intervalul închis la stânga şi deschis la dreapta;

4) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ = intervalul deschis la stânga şi închis la dreapta.

Dacă mulţimea A admite un majorant care aparţine acesteia, atunci spunem că A are un cel mai mare element, pe care îl notăm $\max(A)$.

Dacă mulţimea A are un minorant care este situat în A, atunci acesta este cel mai mic element şi se notează cu $\min(A)$.

Exemple. 1) Mulţimea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este mărginită şi, în plus, există $\min(A)$ şi $\max(A)$.

2) $A = [-1, 1]$. În acest caz, $m = \min(A) = -1$, $M = \max(A) = 1$.

3) $A = (-1, 0)$, $m = -1$, $M = 1$, dar nu există $\min(A)$ şi $\max(A)$.

4) $A = [1, \infty)$, $m = 1 = \min(A)$. Mulţimea nu are majoranţi.

5) $A = \{-1\} \cup [0, 1] \cup \{2\}$, $m = -1 = \min(A)$, $M = 2 = \max(A)$.

6) Să arătăm că mulţimea $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ nu are $\min(A)$. Este clar că mulţimea este majorată şi, în plus, are un cel mai mare element $\max(A) = 1$.

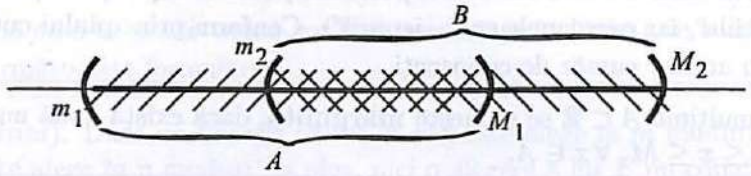
Presupunem, prin absurd, că A ar avea $\min(A)$. Deci există $k \in \mathbb{N}^*$, pentru care $\min(A) = \frac{1}{k}$. Dar $\frac{1}{k+1} \in A$ şi $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$, contradicţie.

7) Să probăm că $A = \left\{\frac{n+1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$ este mărginită.

Să observăm că elementul $x_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ este situat în intervalul $(1, 2]$.

Pentru $n = 1$ se obţine $x_1 = 2 \in (1, 2]$, iar $x_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $\max(A) = 2$ şi nu există $\min(A)$ (vezi şi 6)).

8) Dacă $A, B \subset \mathbb{R}$ sunt mulţimi mărginite, atunci $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ sunt, de asemenea, mulţimi mărginite.



Fie m_1, m_2 şi respectiv M_1, M_2 doi minoranţi şi doi majoranţi pentru A şi B. Atunci $m = \min(m_1, m_2)$, $M = \max(M_1, M_2)$, unde $\min(m_1, m_2)$ reprezintă cel mai mic număr dintre cele două numere m_1, m_2, iar $\max(M_1, M_2)$ este cel mai mare dintre cele două numere M_1, M_2.

Atunci, evident, $m \leq x \leq M$, $\forall x \in A \cup B$, deoarece dacă $x \in A$, atunci $m \leq m_1 \leq x \leq M_2 \leq M$, iar dacă $x \in B$, atunci $m \leq m_2 \leq x \leq M_2 \leq M$. Cum $A \cap B \subset A$, iar A este mărginită, atunci şi o submulţime a sa are aceeaşi proprietate. Analog, $A - B \subset A$.

9) În cazul particular al unei mulţimi cu două numere reale x, y, definim:

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq y \\ y, & \text{dacă } y > x \end{cases} \qquad \min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq y \\ y, & \text{dacă } y < x \end{cases}$$

(cel mai mare număr dintre x, y), (cel mai mic număr dintre x, y).

Se verifică uşor următoarele egalităţi:

1) $\max(x, y) = \max(y, x)$, $\min(x, y) = \min(y, x)$;

2) $\max(-x, -y) = -\min(x, y)$, $\max(x, -x) = |x|$;

3) $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$;

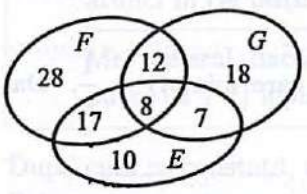
4) $\max(x, y) = \min(x, y) \Leftrightarrow x = y$;

5) $\max(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$, $\min(x, y) = \dfrac{x + y - |x - y|}{2}$.

Problemă rezolvată

Cei 120 de elevi din clasa a IX-a ai unui liceu, studiază limbile străine franceza, germana şi engleza astfel: 65 studiază franceza, 45 studiază germana, 42 studiază engleza, 20 studiază franceza şi germana, 25 studiază franceza şi engleza, 15 studiază germana şi engleza, iar 8 studiază toate cele trei limbi. Notăm prin F, G, E mulţimile de elevi care studiază franceza, germana şi respectiv engleza. Să se determine numărul de elevi care studiază cel puţin una din cele trei limbi şi să se precizeze numărul de elevi din fiecare din cele 8 regiuni ale diagramei Venn, de mai jos.

R. Observaţie. Când am spus că 65 de elevi studiază franceza, trebuie înţeles că pe lângă această limbă ei mai pot studia şi alte limbi. Dar numărându-i după această caracteristică, limba franceză, sunt 65 de elevi.



Conform consecinţei de la teorema de mai sus, rezultă:

$$n(F \cup G \cup E) = n(F) + n(G) + n(E) - n(F \cap G) - n(F \cap G) - n(F \cap E) - \\ - n(G \cap E) + n(F \cap G \cap E) = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 = 100.$$

Deci $n(F \cup G \cup E) = 100$ reprezintă numărul de elevi care studiază cel puţin una din limbi. Utilizând acest rezultat, să completăm diagrama Venn din figură.

Avem 8 elevi care studiază toate limbile.

$20 - 8 = 12$ care studiază franceza şi germana, dar nu studiază engleza;

$25 - 8 = 17$ care studiază franceza şi engleza, dar nu studiază germana;

$15 - 8 = 7$ care studiază germana şi engleza, dar nu studiază franceza;

$65 - 12 - 8 - 17 = 28$ studiază numai franceza;
$42 - 17 - 8 - 7 = 10$ studiază numai engleza;
$120 - 100 = 20$ nu studiază nici o limbă.

1.6. TIPURI DE RAŢIONAMENTE LOGICE

Prin **raţionament** se înţelege acea operaţie a gândirii cu ajutorul căreia, din două sau mai multe propoziţii numite **premise** se obţine o propoziţie nouă, numită **concluzie**. Raţionamentul cu două premise se numeşte **silogism**. Un silogism se scrie, de obicei, printr-o schemă în care se trec cele două premise, una după alta, după care se trage o linie orizontală sub care se precizează concluzia.

Exemple. 1) În orice paralelogram, diagonalele se taie în părţi egale.
Orice dreptunghi este paralelogram.

În orice dreptunghi, diagonalele se taie în părţi egale.

2) Orice număr întreg care are suma cifrelor divizibilă cu 9, se divide prin 9.
Numărul 189 are suma cifrelor divizibile prin 9.

Numărul 189 se divide prin 9.

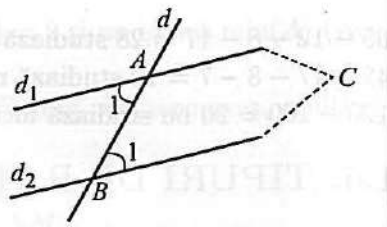
De obicei, pentru a demonstra o teoremă, realizăm mai multe raţionamente. Demonstraţia este un proces al gândirii prin care, pe baza unor propoziţii despre care ştim că sunt adevărate, dovedim că o anumită propoziţie este adevărată sau falsă. Într-o demonstraţie, deosebim:
1) Propoziţia despre care trebuie să dovedim că este adevărată sau falsă şi care se numeşte *teză*.
2) Propoziţiile pe care ne bazăm în demonstraţie; acestea sunt axiome sau propoziţii demonstrate anterior.
3) Raţionamentul prin care dovedim adevărul sau falsitatea tezei.
Dintre demonstraţiile cele mai uzitate în matematică sunt:
a) **demonstraţia prin reducere la absurd** şi
b) **demonstraţia prin inducţie matematică.**
Le vom aborda, pe rând, cele două tipuri de raţionament.

Metoda reducerii la absurd (opţional)

Demonstraţia prin reducere la absurd este o demonstraţie indirectă, în sensul că ne ocupăm întâi de o altă propoziţie (contrară reciprocei) şi numai după aceea tragem concluzii despre propoziţia iniţială. Deosebim trei tipuri de demonstraţie prin reducere la absurd. Tipurile de demonstraţie se deosebesc după raţionamentul prin care se arată că negaţia propoziţiei de demonstrat implică o propoziţie falsă.
În primul tip de demonstraţie, raţionamentul pleacă de la negaţia concluziei şi se ajunge la negaţia ipotezei,
În al doilea tip, raţionamentul pleacă de la negaţia concluziei şi de la o parte din ipoteză (negată) şi se ajunge la negaţia celeilalte părţi din ipoteză.
În al treilea tip, raţionamentul pleacă de la negaţia concluziei şi de la întreaga ipoteză (negată) şi ajunge la o propoziţie în contradicţie cu o propoziţie adevărată.
Noi vom ilustra aici, doar primul tip de raţionament.

Exemple. 1) Două drepte, care formează cu o secantă unghiuri alterne-interne egale, sunt paralele.
R. Vom face demonstraţia prin reducerea la absurd, utilizând primul tip de raţionament. Fie d_1, d_2, cele două drepte tăiate de secanta d în A şi B şi $m(\widehat{A_1}) = m(\widehat{B_1})$.

Presupunem că dreptele d_1, d_2 s-ar intersecta în punctul C. Atunci $\widehat{A_1}$ este unghi exterior triunghiului ABC şi deci $m(\widehat{A_1}) = m(\widehat{B_1}) + m(\widehat{C}) > m(\widehat{B_1})$, în contradicţie cu ipoteza.



2) Să se arate că $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Demonstraţie (prin reducere la absurd). Presupunem, prin absurd, că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Deci există $m, n \in \mathbb{Z}$ $n \neq 0$ astfel încât $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ şi $(m, n) = 1$. Din $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ rezultă $2n^2 = m^2$, $(*)$ adică m^2 se divide prin 2, iar de aici m se divide prin 2. Deci $m = 2m_1$, $m_1 \in \mathbb{Z}$. Înlocuind pe m în $(*)$ rezultă $n^2 = 2m_1^2$. De aici 2 divide pe n. Cum 2 divide şi pe m, am ajuns la o contradicţie cu faptul (presupus la început) că numerele m, n sunt prime între ele. Contradicţia a provenit din presupunerea că $\sqrt{2}$ ar fi raţional.

3) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale pozitive sistemul:

$$\begin{cases} x_1 - \sqrt{x_2} = 2 \\ x_2 - \sqrt{x_3} = 2 \\ x_3 - \sqrt{x_1} = 2. \end{cases}$$

R. Se observă că $x_1 = x_2 = x_3 = 4$ este soluţie pentru sistem. Arătăm că este unica soluţie. Presupunem prin absurd, că ar exista o soluţie având componente diferite. Fie $x_1 < x_2$. Scăzând primele două relaţii rezultă $x_1 - x_2 = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} < 0$, ceea ce dă $x_2 < x_3$. Analog, scăzând ecuaţiile doi şi trei rezultă $x_3 < x_1$ adică în final $x_1 < x_2 < x_3 < x_1$, contradicţie. Analog se ajunge la contradicţie dacă $x_1 > x_2$. Deci în final $x_1 = x_2 = x_3$, iar din prima ecuaţie $x_1 = 4$.

4) (Principiul lui Dirichlet sau principiul cutiilor). Sub forma populară acest principiu poate fi formulat astfel: Dacă în n cutii se află m iepuri, cu $m > n$, atunci există o cutie în care se află cel puţin doi iepuri.

Demonstraţie. Prin metoda reducerii la absurd. Dacă în fiecare cutie se află cel mult un iepure, atunci în cele n cutii se află cel mult n iepuri, $n < m$, în contradicţie cu ipoteza.

Ilustrăm acest principiu prin câteva probleme de algebră şi geometrie.

1. Să se arate că printre oricare 11 numere naturale există două a căror diferenţă se divide la 10.

R. Resturile celor 11 numere naturale la împărţirea prin 10 pot fi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Acestea ar reprezenta „cutiile" (în număr de 10). Cum avem 11 numere („iepurii"), într-o cutie vor fi cel puţin două (conform principiului lui Dirichlet), ceea ce înseamnă că două dintre ele a, b (să spunem) dau acelaşi rest la împărţirea prin 10. Deci $a = 10a_1 + r$, $b = 10b_1 + r$, $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, adică diferenţa $a - b = 10(a_1 - b_1)$ se divide prin 10.

2. Să se arate că printre $n + 1$ numere naturale diferite mai mici decât $2n$ se găsesc trei numere cu proprietatea că unul dintre ele este egal cu suma celorlalte două.

R. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ cele $n + 1$ numere naturale cu proprietatea $a_i \leq 2n$, $i = \overline{1, n+1}$. Să presupunem că $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$. Atunci $a_{n+1} - a_1$, $a_{n+1} - a_2, \ldots, a_{n+1} - a_n$ sunt încă n numere naturale mai mici decât $2n$. În total (cu cele iniţiale) avem $(n + 1) + n = 2n + 1$ numere. Cum ele sunt mai mici decât $2n$ („cutiile"), conform principiului lui Dirichlet, există două numere ce vor coincide $a_i = a_{n+1} - a_j$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\})$. De aici $a_{n+1} = a_i + a_j$.

3. Se consideră în plan n puncte distincte. Câte două puncte determină un segment. Să se arate că există două puncte din care pleacă acelaşi număr de segmente.

R. Dintr-un punct pleacă maxim $n-1$ segmente şi minim 1 (numărul $n-1$ reprezintă numărul de „cutii"). Cum avem n puncte („iepuri"), conform principiului lui Dirichlet, vor exista două puncte din care pleacă acelaşi număr de segmente.

Mai riguros, acest tip de raţionament are la bază echivalenţa $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$, adică, altfel spus teorema directă $p \Rightarrow q$ este echivalentă logic cu teorema contrară a reciprocei $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

Utilizăm această metodă atunci când contrara reciprocei este mai uşor de demonstrat decât teorema directă.

Precizăm că prin **teoremă**, înţelegem o propoziţie importantă, cu o semnificaţie specială. O consecinţă imediată a unei propoziţii o vom numi **corolar**. O propoziţie care este utilizată în demonstraţia unei propoziţii mai dificile se numeşte **lemă**.

4. Să se arate că fracţia $\frac{2n+3}{3n+4}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este ireductibilă.

R. Presupunem, prin absurd, că există $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, astfel încât $d \mid 2n+3$, $d \mid 3n+4$. Deci, $d \mid 3(2n+3) - 2(3n+4) = 1$, adică $d = 1$, fals. Deci fracţia este ireductibilă.

5. Dacă a este o cifră, $1 \leq a \leq 9$, atunci fracţia zecimală $0,a0a00a000a0000a\ldots$ reprezintă un număr iraţional.

R. Presupunem, prin absurd, că fracţia zecimală este periodică, perioada de lungime k, în care este inclusă cifra a. Deci, numărul de zerouri din perioadă este cel mult $k-1$, fals, deoarece după a k-a apariţie a lui a avem k zerouri în scrierea fracţiei zecimale.

Metoda inducţiei matematice

În multe probleme de matematică suntem conduşi la a demonstra afirmaţii de forma „$(\forall n)p(n)$, $n \in \mathbb{N}$" sau „$(\forall n)p(n)$, $n \geq n_0$, $n, n_0 \in \mathbb{N}$", cu alte cuvinte să demonstrăm o afirmaţie care depinde de un număr natural n. Metoda de demonstraţie se numeşte **metoda inducţiei matematice.** Această metodă are la bază principiul inducţiei matematice care poate fi formulat astfel:

Principiul inducţiei matematice. Propozitia $p(n)$ este **adevărată pentru orice număr natural** n dacă sunt verificate următoarele două condiţii:

1) Propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru $n = 0$;
2) Din presupunerea că $p(n)$ este adevărată pentru $n = k$ $(k \in \mathbb{N})$ rezultă că este adevărată şi pentru $n = k+1$.

Aplicarea metodei inducţiei matematice pentru a demonstra o propoziţie $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, constă în parcurgerea a două etape:

1) **Verificarea** (propoziţiei). Pentru $n = 0$ verificăm că $p(0)$ este o propoziţie adevărată.
2) **Demonstraţia** $p(k) \to p(k+1)$. Presupunem că $p(k)$ este adevărată (pentru orice $k \in \mathbb{N}$) şi demonstrăm că $p(k+1)$ este, de asemenea, adevărată.

Dacă cele două etape sunt validate atunci are loc

Concluzia: Propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Observaţii. Prima etapă se numeşte **verificare** pentru că la acest pas facem o verificare, adică vedem dacă $p(0)$ este adevărată [particularizăm propoziţia $p(n)$ pentru prima valoare pe care o ia n – metoda de raţionament care conduce de la enunţuri generale la propoziţii particulare se numeşte **deducţie**; metoda de raţionament care conduce de la propoziţii particulare la enunţuri generale se numeşte **inducţie**, care poate fi **incompletă** (de la câteva cazuri particulare se trece la cazul general - fără a epuiza toate cazurile particulare) sau **completă** (se analizează toate cazurile particulare)]. Uneori această etapă se numeşte şi **baza inducţiei.**

A doua etapă se numeşte **Demonstraţie** (sau **pasul de inducţie**) pentru că aici se demonstrează dacă propoziţia $p(k+1)$ este adevărată ştiind că propoziţia $p(k)$ este adevărată ($p(k)$ se mai numeşte **ipoteza de inducţie**).

Dacă una din etape nu este validată, atunci **Concluzia** nu mai este adevărată.

Din gama largă a problemelor din matematică pentru a căror demonstraţie utilizăm metoda inducţiei matematice amintim probleme de algebră (identităţi, inegalităţi, probleme de divizibilitate), geometrie, trigonometrie, analiză matematică.

Probleme rezolvate

1. Să se demonstreze prin metoda inducţiei matematice egalitatea:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

R. Vom nota cu $p(n)$ propoziţia $p(n):\ 1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},\ n\in\mathbb{N}^*$.

Parcurgem cele două etape ale metodei inducţiei matematice.

1) **Verificarea.** Pentru $n=1$ avem propoziţia adevărată $\quad p(1):\ 1=\frac{1(1+1)}{2}$.

2) **Demonstraţia.** Arătăm că $p(k)\to p(k+1)$, unde

$$p(k):\ 1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}\quad\text{şi}\quad p(k+1):\ 1+2+\ldots+k+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

În ipoteza că $p(k)$ este adevărată să arătăm că $p(k+1)$ este adevărată.

Membrul stâng din $p(k+1)$ se scrie, ţinând cont de $p(k)$, sub forma

$$(1+2+\ldots+k)+k+1\overset{p(k)}{=}\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Deci $p(k+1)$ este adevărată.

Concluzie. Conform principiului inducţiei matematice, $p(n)$ este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Observaţii. **1)** Problema demonstrată precizează cu cine este egală suma primelor n numere naturale: $1+2+3+\ldots+n=\sum_{k=1}^{n}k$ (notaţie).

2) Arătaţi, prin metoda inducţiei matematice, că:

a) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ (formula dă suma pătratelor primelor n numere naturale: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$ (notaţie));

b) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ (formula dă suma cuburilor primelor n numere naturale: $1^3+2^3+\ldots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3$ (notaţie)).

3) Calculaţi suma $S_n=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1),\ n\in\mathbb{N}^*$ şi demonstraţi rezultatul găsit prin inducţie matematică.

R. Scriem suma S_n utilizând simbolul $\sum$ şi avem $\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k.$

Ţinând seama de $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, suma S_n se scrie

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Demonstraţi prin inducţie matematică egalitatea $\quad\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

2. Fie suma $S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)},\ n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},\ k\in\mathbb{N}^*$; **b) Să se calculeze S_n, utilizând a);**

c) **Demonstraţi prin metoda inducţiei matematice rezultatul găsit la b).**

R. a) Efectuând calculele din membrul drept se obţine $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$, adică exact membrul stâng.

Pentru a obţine această scriere se pune $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}$ şi apoi se aduce la acelaşi numitor în membrul drept. Se obţine egalitatea $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k(A+B)+A}{k(k+1)}$, iar de aici $1=(A+B)k+A$. Cum în membrul stâng termenul k are coeficientul zero deducem $A+B=0$ şi apoi egalând termenii liberi din cei doi membri rezultă $A=1$.

Deci $A=1$, $B=-1$. Metoda de obţinere a coeficienţilor A, B se numeşte **metoda coeficienţilor nedeterminaţi**.

b) Pentru fiecare termen din S_n aplicăm scrierea de la a) şi avem:

$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ sau aşezăm termenii (din paranteze) unii sub alţii pentru a urmări mai uşor reducerea lor

$$\begin{aligned}S_n=&1-\frac{1}{2}+\\&\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\\&\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\\hline&=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

c) Se demonstrează prin metoda inducţiei matematice propoziţia $p(n):\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Observaţii. 1) În situaţii similare, adică atunci când avem de calculat sume, pentru scrierea lor se utilizează simbolul $\sum$ urmat de termenul general al sumei a_k, $\sum_{k=1}^{n}a_k$. Se caută să se scrie a_k sub forma diferenţei de doi termeni de „acelaşi tip". În cazul discutat mai sus avem $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$, unde $a_k=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Termenii de „acelaşi tip" fiind $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k+1}$.

2) Dacă avem de calculat suma $S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n\in\mathbb{N}^*$, atunci o scriem sub forma $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Termenul general al sumei $a_k=\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ îl scriem sub forma $a_k=\frac{A}{k(k+1)}+\frac{B}{(k+1)(k+2)}$.

Aplicând metoda coeficienţilor nedeterminaţi rezultă $A=-B=\frac{1}{2}$, iar S_n se obţine uşor. Dacă am fi scris termenul general a_k sub forma $a_k=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}$, atunci am fi găsit $A=C=\frac{1}{2}$, $B=-1$, când $a_k=\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}$. Se constată că prima scriere pentru a_k este mai „avantajoasă" în calcularea lui S_n.

3. **Să se arate că dacă** $n \in \mathbb{N}^*$, **atunci** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n-1} > \frac{n}{2}$.

R. Fie $p(n)$: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n-1} > \frac{n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vom demonstra inegalitatea prin metoda inducţiei matematice.

1) **Verificarea propoziţiei.** Pentru $n=1$ se obţine propoziţia adevărată: $p(1)$: $1 > \frac{1}{2}$. Pentru a obţine membrul stâng al inegalităţii de demonstrat se face $n=1$, în ultimul termen al sumei $\left(\frac{1}{2^n-1}\right)$ când obţinem $\frac{1}{2^1-1}=1$, ceea ce arată că din sumă se reţine doar primul termen.

2) **Demonstraţia.** Demonstrăm implicaţia $p(k) \to p(k+1)$. Notăm cu S_k membrul stâng al inegalităţii din $p(k)$.

Presupunem că $S_k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k-1} > \frac{k}{2}$.

Să demonstrăm că $S_{k+1} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1} > \frac{k+1}{2}$ este adevărată.

Într-adevăr să observăm că

$S_{k+1} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}\right)+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right) = S_k + P_k$, unde

$P_k = \frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$.

Expresia P_k reprezintă suma a 2^k fracţii, fiecare din ele strict mai mare decât $\frac{1}{2^{k+1}}$.

Deci $P_k > \frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}} = 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$.

Deci $S_k > \frac{k}{2}$, $P_k > \frac{1}{2}$. Avem $S_{k+1} = S_k + P_k > \frac{k}{2}+\frac{1}{2} = \frac{k+1}{2}$, adică $S_{k+1} > \frac{k+1}{2}$ şi deci $p(k+1)$ este adevărată.

Concluzie. Conform principiului inducţiei matematice, $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

4. **Să se arate că** $4^n+15n-1$ **se divide prin 9, pentru orice** $n \in \mathbb{N}$.

R. Fie $p(n)$: $4^n+15n-1 \vdots 9$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Demonstrăm această propoziţie prin inducţie matematică. Parcurgem cele două etape ale metodei.

1) **Verificarea propoziţiei.** Pentru $n=0$ se obţine propoziţia $p(0)$: $4^0+15\cdot 0-1 \vdots 9$ sau $p(0)$: $0 \vdots 9$, ceea ce este adevărat.

2) **Demonstratia** implicaţiei $p(k) \to p(k+1)$. Dacă $p(k)$: $4^k+15k-1 \vdots 9$ este adevărată, atunci să probăm că $p(k+1)$: $4^{k+1}+15(k+1)-1 \vdots 9$ este, de asemenea, adevărată.

Ideea este de a forţa scrierea în $p(k+1)$, punând în evidenţă structura care apare în $p(k)$. Avem $4^{k+1}+15(k+1)-1 = 4(4^k+15k-1)-45k+18$.

Să observăm că expresia din paranteză se divide prin 9, din ipoteza de inducţie. De asemenea termenii $45k$ şi 18 se divid prin 9. Atunci şi suma lor este divizibilă prin 9, ceea ce arată că $p(k+1)$ este adevărată.

Concluzie. Conform principiului inducţiei matematice, propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

5.* **Se consideră un şir de numere reale** $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ **(numerele** $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ **se numesc termenii şirului) notat** $(a_n)_{n\geq 1}$, **cu termenii daţi de** $a_1 \in [1,2]$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$, $n \geq 1$. **Să se arate că:** a) $a_n \in [1,2]$, $\forall n \geq 1$; b) $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$.

R. Vom demonstra ambele cerinţe utilizând metoda inducţiei matematice.

a) Fie propoziţia $p(n)$: $a_n \in [1,2]$, $\forall n \geq 1$.

1) **Verificarea.** Propoziţia $p(1)$: $a_1 \in [1,2]$ este adevărată (din ipoteza problemei).

2) **Demonstraţia.** Demonstrăm implicaţia $p(k) \to p(k+1)$.
Ipoteza de inducţie este $p(k) : a_k \in [1,2]$.
Propoziţia de demonstrat este $p(k+1) : a_{k+1} \in [1,2]$.
Din relaţia de definire a numerelor a_n avem $a_{k+1} = a_k^2 - 2a_k + 2$. Deci trebuie probat că

$$1 \le a_k^2 - 2a_k + 2 \le 2 \text{ sau } \begin{cases} 1 \le a_k^2 - 2a_k + 2 \\ a_k^2 - 2a_k + 2 \le 2 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 0 \le (a_k - 1)^2 \\ a_k(a_k - 2) \le 0. \end{cases}$$

Ultimele inegalităţi fiind adevărate (prima inegalitate – orice pătrat de număr real este nenegativ; a doua inegalitate este adevărată deoarece $a_k \in [1,2]$). Prin urmare $p(k+1)$ este adevărată.
Concluzie. Conform principiului inducţiei matematice, propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
b) Considerăm propoziţia $q(n) : a_n \ge a_{n+1}, \forall n \ge 1$.
1) **Verificarea.** Propoziţia $q(1) : a_1 \ge a_2$ este adevărată deoarece din descrierea termenilor şirului $a_2 = a_1^2 - 2a_1 + 2$, iar inegalitatea $a_1 \ge a_2$ devine $a_1 \ge a_1^2 - 2a_1 + 2$ sau $0 \ge a_1^2 - 3a_1 + 2$ sau încă $0 \ge (a_1 - 1)(a_1 - 2)$ ceea ce-i adevărat deoarece $1 \le a_1 \le 2$.
2) **Demonstraţia.** Vom demonstra implicaţia $p(k) \to p(k+1)$.
Ipoteza de inducţie se scrie $p(k) : a_k \ge a_{k+1}$, iar propoziţia de demonstrat devine $p(k+1) : a_{k+1} \ge a_{k+2}$.
Pentru a demonstra ultima inegalitate vom utiliza relaţia de definire a numerelor a_n (numită şi relaţie de recurenţă) şi inegalitatea din $p(k+1)$ devine $a_k^2 - 2a_k + 2 \ge a_{k+1}^2 - 2a_{k+1} + 2$ sau $(a_k - a_{k+1})(a_k + a_{k+1} - 2) \ge 0$, ceea ce-i adevărat deoarece $a_k - a_{k+1} \ge 0$ din $p(k)$, iar de la punctul a) avem $a_n \ge 1$ şi deci $a_k + a_{k+1} \ge 1 + 1 = 2$. Deci $p(k+1)$ este adevărată.
Observaţie. Propoziţia $p(k+1)$ se poate demonstra dacă înlocuim doar a_{k+2} în funcţie de a_{k+1} din relaţia de recurenţă şi ţinând seama de punctul a), $a_{k+1} \in [1,2]$.
Într-adevăr $a_{k+1} \ge a_{k+2}$ se scrie $a_{k+1} \ge a_{k+1}^2 - 2a_{k+1} + 2$ sau $0 \ge a_{k+1}^2 - 3a_{k+1} + 2$ sau încă $0 \ge (a_{k+1} - 1)(a_{k+1} - 2)$, adevărată.
Concluzie. Conform principiului inducţiei matematice, propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \ge 1$.
Observaţii. 1) Propoziţia demonstrată la punctul a) spune că şirul (a_n) este **mărginit** (adică toţi termenii şirului se află într-un interval de lungime finită).
2) Propoziţia demonstrată la punctul b) spune că şirul (a_n) este descrescător (adică numerele care compun şirul verifică inegalităţile $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge ... \ge a_n \ge a_{n+1} \ge ...$)
Prezentăm în continuare variante ale inducţiei matematice.

I. Pentru a demonstra prin metoda inducţiei matematice propoziţia:
„Pentru orice $n \ge m$ (m număr natural fixat) are loc $p(n)$" se parcurg două etape:
1) **Verificarea.** Se verifică faptul că $p(m)$ este adevărată;
2) **Demonstraţia.** Se demonstrează implicaţia $p(k) \to p(k+1)$, unde k este un număr natural oarecare, $k \ge m$.
Conform principiului inducţiei matematice, propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \ge m$.

Problemă rezolvată

Să se demonstreze inegalitatea $2^n > 2n + 1$, pentru orice număr natural n, $n \ge 3$.
R. Vom demonstra afirmaţia prin metoda inducţiei matematice.
Fie enunţul $p(n) : 2^n > 2n + 1, \forall n \ge 3$.
Verificarea. Propoziţia $p(3) : 2^3 > 2 \cdot 3 + 1$ sau $p(3) : 8 > 7$ este adevărată.
Demonstraţia. Demonstrăm implicaţia $p(k) \to p(k+1)$, unde

$p(k): 2^k > 2k+1$, iar $p(k+1): 2^{k+1} > 2(k+1)+1$.
Dacă $p(k)$ este adevărată să probăm că şi $p(k+1)$ este adevărată.
Avem (utilizăm $p(k)$): $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \overset{p(k)}{>} 2(2k+1)$, (1).
Pe de altă parte $2(2k+1) > 2(k+1)+1$, (2), pentru $k \geq 3$.
Concluzie. Conform variantei I se deduce că propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq 3$.

II. Propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq m$ (m – număr natural fixat), $n \in \mathbb{N}$, dacă sunt îndeplinite condiţiile:
1) **Verificarea.** Propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru $n = m$ şi $n = m+1$.
2) **Demonstraţia.** Din presupunerea că $p(n)$ este adevărată pentru $n = k-1$ şi $n = k$ ($k > m$) rezultă că $p(n)$ este adevărată şi pentru $n = k+1$.

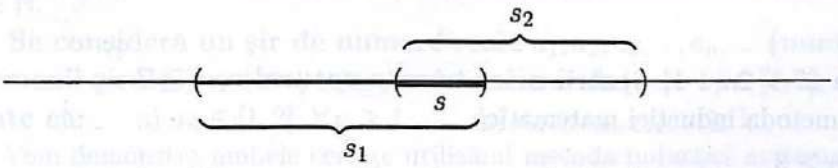
Problemă rezolvată

Fie şirul de numere reale $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definit prin $a_0 = 2$, $a_1 = \frac{5}{2}$ şi $a_n = \frac{5}{2}a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$.
Să se arate că $a_n = 2^n + 2^{-n}$, $\forall n \geq 0$.
R. Considerăm propoziţia $p(n)$: $a_n = 2^n + 2^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pentru demonstraţia propoziţiei utilizăm varianta II a inducţiei matematice.
1) **Verificarea.** Se face pentru $n = 0$ şi $n = 1$, când avem:
$p(0): a_0 = 2^0 + 2^0 = 1 + 1 = 2$, adevărat
$p(1): a_1 = 2^1 + 2^{-1} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, adevărat.
2) **Demonstraţia.** Presupunem adevărate propoziţiile $p(k-1)$, $p(k)$
$p(k-1): a_{k-1} = 2^{k-1} + 2^{-(k-1)}$, $p(k): a_k = 2^k + 2^{-k}$ şi demonstrăm că
$p(k+1): a_{k+1} = 2^{k+1} + 2^{-(k+1)}$ este adevărată.
Din relaţia (de recurenţă), între termenii şirului, dată în enunţ avem:
$a_{k+1} = \frac{5}{2}a_k - a_{k-1}$, sau ţinând seama de $p(k-1)$ şi $p(k)$,
$a_{k+1} = \frac{5}{2}(2^k + 2^{-k}) - (2^{k-1} + 2^{-(k-1)}) = 5 \cdot 2^{k-1} + 5 \cdot 2^{-k-1} - 2^{k-1} - 4 \cdot 2^{-k-1} = 4 \cdot 2^{k-1} + 2^{-(k+1)} =$
$= 2^{k+1} + 2^{-(k+1)}$, ceea ce arată că $p(k+1)$ este adevărată.
Concluzie. Deci propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Metoda inducţiei matematice aplicată în geometrie

Probleme rezolvate

1. **Pe o dreaptă d se consideră n segmente ($n \geq 2$) care au puncte comune două câte două. Să se arate că aceste segmente au cel puţin un punct în comun (Helly).**
R. Probăm afirmaţia prin inducţie matematică.
1) **Verificarea.** Pentru $n = 2$, problema se verifică imediat, deoarece segmentele s_1, s_2, au în comun punctele segmentului s, eventual un punct.



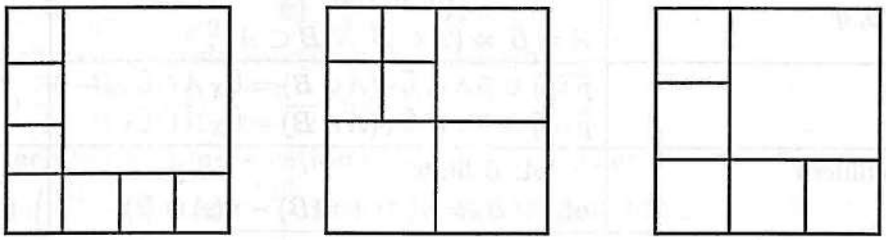
Demonstraţia. Presupunem proprietatea adevărată pentru n segmente $s_1, s_2, \ldots, s_n$, care se intersectează două câte două şi au în comun punctele segmentului p. Să demonstrăm proprietatea pentru $n+1$ segmente $s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}$. Mai precis să demonstrăm că segmentul s_{n+1} se intersectează cu seg-

mentul p. Pentru demonstraţia acestui fapt utilizăm metoda reducerii la absurd. Presupunem, deci, că segmentul s_{n+1} nu are nici un punct în comun cu segmentul p. Prin urmare pe dreapta d există un punct A care separă segmentul p de segmentul s_{n+1}. Pe de altă parte, conform ipotezei, fiecare din segmentele $s_1, s_2, ..., s_n$ conţine segmentul p şi în acelaşi timp intersectează segmentul s_{n+1}. Prin urmare fiecare din segmentele $s_1, s_2, ..., s_n$ conţine punctul A şi deci acest punct aparţine segmentului p, ceea ce contrazice ipoteza.

2. **Să se arate că pentru orice număr natural n, $n \geq 6$, un pătrat poate fi împărţit în n pătrate.**

R. Se aplică varianta a II-a pentru m, $m+1$, $m+2$.

Pentru $n = 6$, $n = 7$, $n = 8$ desenele următoare arată că afirmaţia este adevărată.



Presupunem că propoziţia este adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $n+3$. Pentru pătratul împărţit în n pătrate se consideră unul dintre ele care se împarte în patru pătrate egale. În acest fel pătratul dat este împărţit în $n+3$ pătrate.

Deci afirmaţia este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$.

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noţiune	Definiţie	Notaţii
Enunţ	O succesiune de semne	
Propoziţie	Un enunţ care este fie adevărat, fie fals	$p, q, r, \ldots$
Valoarea de adevăr a unei propoziţii	$v(p) = \begin{cases} 1, \text{dacă } p \text{ este adevărată} \\ 0, \text{dacă } p \text{ este falsă} \end{cases}$	$v(p)$
Predicat	Un enunţ care conţine una sau mai multe variabile	$p(x)$, $p(x,y)$, $p(x,y,z), \ldots$
Cuantificatorul existenţial	$(\exists x)p(x)$	$\exists$
Cuantificatorul universal	$(\forall x)p(x)$	$\forall$
Mulţime	O colecţie de obiecte	$A, B, C, \ldots$
Mulţimea vidă	Nu are nici un element	$\emptyset$
Negaţia propoziţiei p	$v(\overline{p}) = \begin{cases} 0, \text{dacă } v(p) = 1 \\ 1, \text{dacă } v(p) = 0 \end{cases}$ $\complement_X A = \{x \mid x \in X, \ x \notin A\}$	$\overline{p}$

Conjuncţia propoziţiilor p şi q	$v(p \wedge q) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } v(p) = v(q) = 1 \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$ $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	$p \wedge q$
Disjuncţia propoziţiilor p sau q	$v(p \vee q) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } v(p) = v(q) = 0 \\ 1, \text{ în rest} \end{cases}$ $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	$p \vee q$
Echivalenţa propoziţiilor p, q	$v(p \leftrightarrow q) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } v(p) = v(q) = 0 \text{ sau } 1 \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$ $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A\}$	$p \leftrightarrow q$
Formulele lui De Morgan	$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$; $\complement_X(A \cup B) = \complement_X A \cap \complement_X B$ $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$; $\complement_X(A \cap B) = \complement_X A \cup \complement_X B$	
Principiul includerii şi excluderii	A, B finite $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$	

Probleme propuse

1. Mulţimea numerelor reale

1. Numărul natural $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ se divide prin 5 dacă şi numai dacă $a_0 = 0$ sau $a_0 = 5$.

2. Numărul natural $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ se divide prin 4 dacă şi numai dacă $a_1 a_0$ se divide prin 4.

3. Numărul natural $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ se divide prin 8 dacă şi numai dacă $a_2 a_1 a_0$ se divide prin 8.

4. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $n(n^2 + 5)$ se divide prin 6.

5. Să se arate că $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ se divide prin 3.

6. Să se arate că dacă $n, m \in \mathbb{N}$, atunci $nm(n-m)$ este par.

7. Arătaţi că dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ este natural.

8. Care este exponentul cu care apare 2 în produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$?

9. Care este exponentul cu care apare 5 în produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2000$?

10. Dacă $a \in \mathbb{N}$, atunci arătaţi că $E(a) = a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a$ se divide prin 24.

11. Să se arate că dacă a este par, atunci $\dfrac{a}{12} + \dfrac{a^2}{8} + \dfrac{a^3}{24}$ este număr întreg.

*

12. Să se determine $m, n \in \mathbb{Z}$ pentru care $\dfrac{3}{n}, \dfrac{5}{m}$ sunt fracţii echivalente.
Scrieţi numerele -3 şi 5 prin fracţii echivalente.

13. Să se scrie sub formă de fracţie zecimală infinită numerele:
1) 5; 2) $\dfrac{10}{3}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) $-\dfrac{1}{5}$; 5) $-\dfrac{1}{6}$; 6) $-\dfrac{31}{3}$; 7) $-\dfrac{10}{11}$.

14. Scrieti numărul raţional $x = 0,(8)$ sub formă de fracţie ordinară observând că $10x = 8 + x$.
Aceeaşi problemă pentru numerele: $0,(25)$; $0,(37)$; $0,(412)$.

15. Pentru fracţiile zecimale de mai jos, determinaţi numărul raţional pe care-l reprezintă:
1) 0,12; 2) 3,11; 3) $-2,5$; 4) -0,9; 5) 0,(1); 6) 0,(12);
7) $-3,(13)$; 8) 0,1(23); 9) 3,12(21); 10) $-0,3(41)$; 11) $-5,23(31)$.
Pentru fracţia zecimală $0,(12345) = 0,a_1a_2\ldots$ determinaţi a_{2009} şi apoi calculaţi suma $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}$.

16. Arătaţi că următoarele numere nu sunt raţionale:
1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{7}$; 4) $1+\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

17. 1) Să se arate că nu există numere raţionale $a \in \mathbb{Q}$ pentru care:
a) $a^3 = 2$; b) $a^3 = 3$; c) $a^5 = 7$.

2) Să se arate că următoarele fracţii sunt reductibile:
a) $\frac{n^2+n+6}{n^2-n+4}$; b) $\frac{n^2+n-4}{n^2-n+2}$; c) $\frac{n^3-n+3}{n^3-n+6}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Să se arate că următoarele fracţii sunt ireductibile:
a) $\frac{2n+3}{3n+4}$; b) $\frac{3n+2}{4n+3}$; c) $\frac{3n+5}{7n+12}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

18. Ordonaţi perechile de numere raţionale $(a;b)$ în cazurile:
1) $\left(\frac{1}{2};\frac{2}{4}\right)$; 2) $\left(\frac{13}{6};\frac{15}{7}\right)$; 3) $\left(\frac{26}{3};8,667\right)$; 4) $(0,(23);0,2(3))$;
5) $(-3,275(6);-3,27(57))$; 6) $(-9,(3);-9,334)$.

19. Să se determine partea întreagă şi partea fracţionară a numerelor:
1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{31}{6}$; 3) $\frac{105}{21}$; 4) $-0,367$; 5) -3,2(16); 6) $-\frac{316}{45}$; 7) $-\frac{233}{19}$.

20. Calculaţi $[x]+[y]$ şi $[x+y]$ şi comparaţi aceste numere în cazurile:
1) $x=6,\ y=11$; 2) $x=-10,\ y=-36$; 3) $x=3,3,\ y=2,6$; 4) $x=9,6,\ y=4,8$;
5) $x=-3,4,\ y=-2,7$; 6) $x=3,(4),\ y=6,(8)$; 7) $x=\frac{7}{3},\ y=-5,(23)$.

21. Calculaţi $\{x\}+\{y\}$ şi $\{x+y\}$ şi comparaţi aceste numere în cazurile:
1) $x=3,\ y=-9$; 2) $x=2,4,\ y=3,3$; 3) $x=4,6,\ y=9,5$; 4) $x=\frac{2}{3},\ y=-3,17$;
5) $x=2,(3),\ y=\frac{7}{6}$; 6) $x=-3,2(1),\ y=\frac{8}{7}$; 7) $x=3,(7),\ y=2,(3)$.

22. Calculaţi: 1) $3\frac{5}{14}-\left[1\frac{11}{49}:\left(76\cdot\frac{25}{38}-47\frac{3}{7}\right)\right]\cdot\frac{12}{5}$; 2) $\left\{\left[\left(6\frac{9}{16}-2\frac{1}{2}\cdot 1\frac{9}{14}\right)\cdot 0,53\right]:0,75\right\}:6\frac{2}{3}$.

23. 1) Dacă $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$, atunci $a\in\mathbb{Q}$; 2) Dacă $a,b\in\mathbb{Q}$, atunci $\frac{a+b}{2}\in\mathbb{Q}$; 3) Arătaţi că între două numere raţionale (iraţionale) există o infinitate de numere raţionale (iraţionale);
4) Determinaţi două numere rationale între $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$; 5) Determinaţi două numere iraţionale între $\frac{1}{2}$ şi $\frac{3}{2}$; 6) Dacă $a,b,\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, atunci şi $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$; 7) Determinaţi numerele întregi x pentru care $\sqrt{x^2+x+1}\in\mathbb{Q}$; 8) Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care există m număr natural astfel încât $\frac{2}{5}<\frac{m}{n}<\frac{1}{2}$. (Se poate utiliza afirmaţia: dacă $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$ şi $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, atunci $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$).

24. Poziţionaţi pe axa de coordonate numerele:
1) 3,1; 2) -2,5; 3) $-\frac{7}{2}$; 4) $\frac{6}{5}$; 5) $1\frac{2}{3}$; 6) $-3\frac{4}{5}$.

25. a) Arătaţi că dacă $a,b\in\mathbb{Q}$ şi $a+b\sqrt{3}=0$, atunci $a=b=0$.
b) Determinaţi $m,n\in\mathbb{Q}$ cu proprietatea $(2m+n-1)+(3m-2n)\sqrt{3}=0$.

c) Să se determine numerele întregi a, b dacă $1+\sqrt{3}$ verifică ecuaţia $ax^2+bx+12=0$.

26. Să se arate că: 1) $\dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4k-3}-\dfrac{1}{4k+1}\right)$, $k\in\mathbb{N}^*$;

2) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

27. Să se arate că $\left[\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2\right]-\left[\left(\dfrac{n}{2}\right)^2\right]=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, iar $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a.

*

28. Determinaţi aproximările zecimale prin lipsă şi adaos cu 2, 3, 4 zecimale pentru numerele: 1) $\sqrt{11}$; 2) $\sqrt{15}$; 3) $\sqrt{23}$; 4) $-\sqrt{26}$; 5) $-\sqrt{37}$.

29. Determinaţi primele trei cifre după virgulă pentru $x+y$ şi xy în cazurile:

1) $x=1,3125\cdots$, $y=3,4256\cdots$; 2) $x=-2,3142$, $y=0,2134\cdots$;

3) $x=\dfrac{11}{2}$, $y=\sqrt{2}$; 4) $x=1,(23)$, $y=\sqrt{3}$; 5) $x=-\sqrt{5}$, $y=-3,1231\cdots$.

30. Determinaţi cinci sume inferioare şi cinci sume superioare pentru numerele x, y în cazurile: 1) $x=1,23(31)$, $y=\dfrac{2}{3}$; 2) $x=\sqrt{3}$, $y=-1,(23)$;

3) $x=-6,3145\cdots$, $y=-7,4275\cdots$; 4) $x=8,2(34)$, $y=\dfrac{39}{61}$.

31. Determinaţi cinci produse inferioare şi cinci produse superioare pentru numerele x, y în cazurile: 1) $x=3,(23)$, $y=2,1(41)$; 2) $x=-\dfrac{11}{23}$, $y=1,(3)$; 3) $x=-\dfrac{12}{13}$, $y=-\dfrac{6}{17}$.

32. Determinaţi un număr raţional cuprins între perechile de numere reale:

1) $(0,315;0,317)$; 2) $(\sqrt{2};\sqrt{3})$; 3) $(0,1(3);0,135)$; 4) $(-3,3;-3,28)$; 5) $(-2,(17);-2,15)$.

33. Poate fi suma $a+b$ un număr raţional dacă:

1) unul din termeni este raţional, iar celălalt este iraţional;

2) ambii termeni sunt iraţionali ?

34. Poate fi produsul ab, un număr raţional dacă: 1) unul din factori este raţional, iar celălalt iraţional; 2) ambii factori sunt iraţionali ?

35. Numărul $e=2,7182\cdots$ este iraţional. Ce se poate spune despre $\sqrt{e}$?

36. Care din numerele de mai jos sunt iraţionale şi care raţionale:

1) $\sqrt{4}+\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{3}-2\sqrt{12}$; 3) $\dfrac{1}{3}+0,3(5)$; 4) $\sqrt{14}-2,(31)$; 5) $-\sqrt{18}+3\sqrt{2}$;

6) $\sqrt{25}-3,(43)+\dfrac{5}{6}$. 7) $\sqrt{n(n+1)}$, $n\in\mathbb{N}^*$; 8) $\sqrt{n!+2}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$;

9) $\sqrt{n^2+1}$, $n\in\mathbb{N}$; 10) $\sqrt{n^2+3}$, $n\in\mathbb{N}$.

37. Demonstraţi inegalităţile: 1) $(1,2+\sqrt{5})^{100}>3^{100}$; 2) $\sqrt{7}+\sqrt{15}<7$;

3) $\sqrt{2}+\sqrt{11}<\sqrt{3}+3$; 4) $\sqrt{21}-\sqrt{5}>\sqrt{20}-\sqrt{6}$; 5) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^9>4^9$.

38. Să se determine partea întreagă şi partea fracţionară a numerelor:

1) $\dfrac{3\pi}{2}$; 2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 3) $\pi+0,(4)$.

39. a) Determinaţi numerele între care sunt cuprinse suma, diferenţa, produsul şi câtul numerelor a, b dacă: 1) $1,1<a<2,1$, $-3<b<-2,5$; 2) $1<a<2$, $-5<b<-4$.

b) Dacă $x,y\in\mathbb{R}$, $x+y=7$, $xy=5$, atunci calculaţi: x^2+y^2, x^3+y^3, x^4+y^4, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$.

40. Să se arate că în reprezentarea zecimală a unui număr iraţional există cel puţin o cifră care se repetă de o infinitate de ori.

41. Arătaţi că dacă: 1) $x, y < 1$, atunci $\frac{xy-2}{x+y-3} < 1$; 2) $x, y \geq -2$, atunci $3xy+6(x+y)+10 \geq -2$;
3) $x, y \in (1,3)$, atunci $xy-2(x+y)+6 \in (1,3)$; 4) $x, y \in [5,7]$, atunci $xy-6(x+y)+42 \in [5,7]$;
5) $x, y \in \{a-b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a^2-10b^2=1\} = A$, atunci $xy \in A$.

42. Să se arate că:
1) $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)} + \frac{1}{(a+4)(a+5)} = \frac{5}{a(a+5)}$;
$a \in \mathbb{R} - \{0,-1,-2,-3,-4,-5\}$;
2) $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$; $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$;
3) $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 0$, $a \neq -b$, $b \neq -c$, $c \neq -a$.
4) $E(a,b) = \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} a-b, & \text{dacă } a \geq b \\ \frac{b}{a}(b-a), & \text{dacă } a < b \end{cases}$, unde $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $a, b > 0$;
5) $\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)} \in \mathbb{Q}$, unde $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $ab+bc+ca=1$.
6) Dacă $3xy + \frac{1}{3} = x+y$, atunci x sau y este egal cu $\frac{1}{3}$.

43. Reprezentaţi pe axa numerelor reale mulţimile:
1) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\}$; 2) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$; 3) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$;
4) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < |x| < 2\}$; 5) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq |x| < 2\}$; 6) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq |x| \leq 2\}$.

44. Determinaţi valorile reale x pentru care (pe rând):
a) 1) $|x+3| = 1$; 2) $|x| - x = 3$; 3) $||x|-1| = 2$; 4) $||x|+1| = 2$; 5) $||x|+x| = 1$;
6) $|x+1| = |x-2|$; 7) $|x| - |x+1| = 1$; 8) $\left|x - \frac{1}{x}\right| = |x-1|$.
b) 1) $|2x| \leq 1$; 2) $|3x-2| < 4$; 3) $|x-3| \geq 3$; 4) $|6x+4| > 8$; 5) $1 < |x| < 2$;
6) $1 < |x-1| < 2$; 7) $|x| > x+1$; 8) $\sqrt{(x-2)^2} \geq 1$; 9) $|x-1| + |x+3| > 2$; 10) $|x^2-x| < x$.
c) $\min(1-x, 2x) = 3+x$, $\max(2x+3, x-1) = 2-x$.

45. a) Utilizând valoarea absolută, rescrieţi inegalităţile:
1) $-3 < x < 3$; 2) $x \leq -2$ sau $x \geq 2$; 3) $2 < x < 6$;
4) $12 \leq x \leq 20$; 5) $0 < x < 10$; 6) $x < -3$ sau $x > 5$.
b) 1) Să se arate că dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, atunci $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| \leq 1$.
2) Să se arate că $\left|x^2 - \frac{1}{x^2}\right| \geq 2\left|x - \frac{1}{x}\right|$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.
c) Dacă $x, y \geq 0$, atunci $|x-y| \leq \max(x, y)$.
Dacă $a, b, c \in \{1,2,3\}$, atunci $||a-b|-c| \leq 3$. $(\max(\max(a,b),c)) = \max(a,b,c)$.

46. Rezolvaţi ecuaţiile: 1) $[3x] = 5$; 2) $[4x] = -2$; 3) $[3+2x] = 5$; 4) $[-3+5x] = 7$.

47. Să se arate că dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $[x] = [y]$, atunci $|x-y| < 1$. Reciproca este adevărată?

48. Să se arate că $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}; x, y \in \mathbb{R}$.

49. Să se arate că dacă: 1) $x, y \geq 0$, atunci $[xy] \geq [x]\,[y]$; 2) $x, y \leq 0$, atunci $[xy] \leq [x]\,[y]$.

50. Să se arate că: 1) $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, $n \in \mathbb{N}^*$;

2) $\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right]=199.$

51. Să se arate că: 1) $[(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2]=4n+1,\ n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 3;$

2) $[(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+10})^2]=4n+18,\ n\in\mathbb{N}^*;$

3) $[\sqrt{1\cdot 2}]+[\sqrt{2\cdot 3}]+[\sqrt{3\cdot 4}]+\cdots+[\sqrt{n(n+1)}]=\frac{n(n+1)}{2},\ n\in\mathbb{N}^*.$

52. Să se rezolve: a) ecuaţiile:

1) $\left[\frac{x-1}{2}\right]=\frac{x+3}{3};$ 2) $\left[\frac{x+4}{3}\right]=\frac{2x-1}{5};$ 3) $\left[\frac{2x+3}{4}\right]=\frac{x-4}{3}.$

b) sistemele: 1) $\begin{cases}[x]+\{y\}=3,2\\ [y]+\{x\}=4,3.\end{cases}$; 2) $\begin{cases}2x+\{y\}=3,5\\ \{x\}+y=1\end{cases}$; 3) $\begin{cases}\{x\}+2\{y\}=\frac{2}{3}\\ 3\{y\}-2\{x\}=\frac{13}{6}.\end{cases}$

53. Arătaţi că dacă: 1) $x>0$, atunci $x+\frac{1}{x}\geq 2;$ 2) $x<0$, atunci $x+\frac{1}{x}\leq -2.$

54. Să se arate că dacă $x,y>0$, atunci:

1) $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\geq 4;$ 2) $\frac{x+y}{1+x+y}<\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y};$

3) $x^3+y^3\geq x^2y+xy^2;$ 4) $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}\leq xy,\ x,y\geq 1.$

55. Să se arate că dacă: 1) $x,y>0,\ xy=1$, atunci $(x+1)(y+1)\geq 4;$

2) $x+y=1$, atunci $x^2+y^2\geq\frac{1}{2},\ x^4+y^4\geq\frac{1}{8}.$

56. 1) Să se arate că are loc egalitatea $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ şi deduceţi inegalitatea $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx.$

2) Să se arate că avem egalitatea $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ şi să se deducă inegalitatea $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$ dacă $x,y,z\geq 0.$

3) Să se arate că $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(x+z)$ şi apoi rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ sistemul

$$\begin{cases}x+y+z=3\\ x^3+y^3+z^3=3.\end{cases}$$

57. Arătaţi că dacă $x,y,z>0$, atunci au loc inegalităţile:

1) $\frac{3}{x+y+z}<\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x};$ 2) $x+y+z\geq\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx};$

3) $(x^2+y^2)z+(y^2+z^2)x+(z^2+x^2)y\geq 6xyz.$

58. a) Arătaţi că $|a-b|=|a|-|b|\Leftrightarrow(a-b)b\geq 0$ şi $|a-b|>|a|-|b|\Leftrightarrow(a-b)b<0.$

b) Utilizând a) arătaţi că mulţimea de soluţii a inecuaţiei $|x^2-x|<|2-x|+|x^2-2|$ este $S=(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cup(2,\infty).$

59*. Fie $a_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2},\ n\in\mathbb{N}^*.$ Arătaţi că $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2a_k^2}\leq\frac{3n-2}{2n-1},\ n\in\mathbb{N}^*.$

60*. Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$ şi numerele reale $0\leq a_1<a_2<\ldots<a_n<1$ şi $0\leq b_1<b_2<\ldots<b_m<1$ astfel ca $[x+a_1]+[x+a_2]+\ldots+[x+a_n]=[x+b_1]+[x+b_2]+\ldots+[x+b_m]$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$. Să se arate că $m=n$ şi $a_i=b_i,\ i=\overline{1,n}.$

2. Elemente de calculul propoziţiilor

1. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiilor:

1) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}\in(0,1);$ 2) $\sqrt{3}\in\mathbb{Q};$ 3) $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2\in\mathbb{N}.$

2. Să se stabilească valorile de adevăr ale propoziţiilor următoare şi să se scrie negaţiile lor:
1) p: „$2 > 3$“; 2) q: „$3 \geq 3$“; 3) r: „$1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \neq 11$“.

3. Fie predicatul $p(x)$: „$x^2 - 3x > 1,\ x \in \mathbb{R}$“. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:
1) $p(-1)$; 2) $p(\sqrt{2})$; 3) $p(0)$; 4) $p\left(\frac{1}{2}\right)$; 5) $p(3)$.

4. Precizaţi valorile lui x pentru care sunt adevărate propoziţiile:
1) $p(x)$: „$2x^2 + x - 1 = 0,\ x \in \mathbb{Z}$“; 2) $q(x)$: „$\frac{2x+3}{x+2} \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{Z}$“;
3) $r(x)$: „$|x + 2| = x - 2,\ x \in \mathbb{Z}$“.

5. Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:
1) „$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3 > 1$“; 2) „$\exists x \in \mathbb{N},\ 3x + 1 = 9$“; 3) „$\forall x \in \mathbb{R},\ 5x - 1 > 3$“;
4) „$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 5 \neq 9$“; 5) „$\exists x \in \mathbb{Z},\ 2x + 1 \neq -3$“; 6) „$\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 - 3x + 2 = 0$“;
7) „$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x + 3 > 0$“; 8) „$\exists x \in \mathbb{Z},\ x^2 - 3 = 0$“.

6. Să se scrie negaţiile următoarelor propoziţii şi să se determine valorile lor de adevăr:
1) „$\forall x \in \mathbb{R},\ 3x + 1 > 0$“; 2) „$\exists x \in \mathbb{Z},\ \frac{x}{x+1} \in \mathbb{Z}$“; 3) „$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$“.

7. Se consideră predicatele: $p_1(x)$: „$x + 1 > 0,\ x \in \mathbb{R}$“, $p_2(x)$: „$x - 2 \leq 0,\ x \in \mathbb{R}$“. Să se determine valorile lui x pentru care: 1) $p_1(x)$ este adevărat; 2) $p_2(x)$ este adevărat;
3) $p_1(x) \vee p_2(x)$ este adevărat; 4) $p_1(x) \wedge p_2(x)$ este adevărat.

8. Se consideră predicatele $p_1(x)$: „$x + 2 = 0,\ x \in \mathbb{Z}$“, $p_2(x)$: „$x^2 - 4 = 0,\ x \in \mathbb{Z}$“. Să se arate că $p_1(x) \Rightarrow p_2(x)$. Arătaţi că nu are loc implicaţia inversă $p_2(x) \Rightarrow p_1(x)$.

9. Se consideră propozitiile:
p_1: „ABC triunghi dreptunghic în A“; p_2: „$BC^2 = AB^2 + AC^2$“;
p_3: „$AD = \frac{BC}{2}$, D este mijlocul segmentului $[BC]$“.
Stabiliţi care din următoarele implicaţii este adevărată:
1) $p_1 \Rightarrow p_2$; 2) $p_2 \Rightarrow p_3$; 3) $p_3 \Leftrightarrow p_1$; 4) $p_1 \Leftrightarrow p_2$.

10. Fie predicatul $p(x, y)$: „$2x + y = 1,\ x, y \in \mathbb{R}$“.
Să se stabilească valoarea de adevăr pentru propoziţiile $(x, y \in \mathbb{R})$:
1) $(\forall x)(\exists y)\ 2x+y = 1$; 2) $(\exists x)(\forall y)\ 2x+y = 1$; 3) $(\forall x)(\forall y)\ 2x+y = 1$; 4) $(\exists x)(\exists y)\ 2x+y = 1$.

11. Fie predicatele $p(x, y)$: „$x+y = 1,\ x, y \in \mathbb{Z}$“, $q(x, y)$: „$x-y = 1,\ x, y \in \mathbb{Z}$“. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiilor:
1) $(\exists x)(\exists y)p(x, y) \wedge q(x, y)$; 2) $(\exists x)(\forall y)p(x, y) \wedge q(x, y)$; 3) $(\forall x)(\forall y)p(x, y) \wedge q(x, y)$.

3. Mulţimi finite, infinite. Principii de numărare

1. Fie mulţimile $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{-2, 3, -4, 5, 9\}$. Să se determine mulţimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$. Pentru $E = A \cup B$, determinaţi $C_E A$, $C_E B$.

2. Arătaţi că $\left\{x \in \mathbb{N} \middle| x = \frac{4n}{n+2},\ n \in \mathbb{N}\right\} = \{0, 2, 3\}$.

3. Arătaţi că, dacă A, B, C sunt mulţimi finite, atunci $A \cup B \cup C$ este finită şi mai mult, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

4. Din 60 de persoane intervievate, s-a stabilit că: 25 citesc *Evenimentul zilei*, 26 citesc *Adevărul*, 26 citesc *România liberă*, 9 citesc *Evenimentul zilei* şi *România liberă*, 11 citesc *Evenimentul zilei* şi *Adevărul*, 8 citesc *Adevărul* şi *România liberă* iar 3 citesc toate cele trei ziare.
a) Determinaţi numărul de persoane care citesc cel puţin un ziar; b) Umpleţi corect cele 8 regiuni de pe diagrama Venn, corespunzătoare celor trei mulţimi E, A şi R, desemnând cititorii pentru *Evenimentul zilei*, *Adevărul* şi respectiv *România liberă*; c) Determinaţi numărul

de persoane care citesc exact un ziar.

5. Să se afle câte numere naturale $\leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$ se divid la 2 sau 3 sau 5. Caz particular, $n = 50$.

6. Dacă A, B sunt mulţimi finite, cu proprietatea $n(A \cup B) = n(A \cap B)$, atunci $n(A) = n(B)$.

7. Într-un container se află perechi de şosete în culorile roşu, alb şi maro. Să se determine numărul minim de şosete necesar pentru a fi siguri că am extras două perechi (patru şosete) de aceeaşi culoare.

8. Să se determine numărul minim de elevi pentru a ne asigura că cinci dintre ei aparţin aceleiaşi clase (IX A, IX B, IX C, IX D, IX E).

9. Cinci fete şi douăzeci şi unu de băieţi sunt dispuşi în linie dreaptă amestecaţi. a) Arătaţi că există o submulţime formată din patru sau mai mulţi băieţi care să fie consecutivi în şir. b) Dacă grupul începe cu o fată, arătaţi că există o secvenţă de şir formată din cinci sau mai mulţi băieţi.

10. Cu cifrele 2, 3, 4, 5, 6 se formează numere de trei cifre în care cifrele nu se pot repeta. a) Câte astfel de numere se pot forma în total? b) Câte numere sunt mai mici ca 400? break c) Câte numere sunt pare?

11. În câte moduri se pot aranja cinci persoane la o masă în linie pe cinci scaune? Dar la o masă circulară?

12. Să se determine minoranţii, majoranţii, $\min(A)$, $\max(A)$ (dacă există), pentru mulţimile:

1) $[-1,2] \cup [3,5]$; 2) $(-\infty,1) \cup [3,6]$; 3) $[-2,3] \cup [4,\infty)$; 4) $\{-5\} \cup [3,4] \cup \{6\}$; 5) $\left\{1 - \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

6) $\{m \in \mathbb{R} | m^2 - 4 \leq 0\}$; 7) $\left\{\frac{3n+1}{4n+3} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$; 8) $\{1 + (-1)^n | n \in \mathbb{N}^*\}$; 9) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$.

4. Metoda reducerii la absurd

1. Arătaţi că numerele: 1) $\sqrt{3}$; 2) $1 + \sqrt{2}$; 3) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nu sunt raţionale.

2. Arătaţi că nu există numere raţionale $a \in \mathbb{Q}$, pentru care: 1) $a^2 = 5$; 2) $a^2 = 7$.

3. a) Arătaţi că, dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ şi $a + b\sqrt{3} = 0$, atunci $a = b = 0$.

b) Determinaţi $m, n \in \mathbb{Q}$, cu proprietatea $(2m + n - 1) + (3m - 2n)\sqrt{3} = 0$.

c) Să se determine numerele întregi a, b, dacă $1 + \sqrt{3}$ verifică ecuaţia $ax^2 + bx + 12 = 0$.

4. Poate fi suma $a + b$ un număr raţional, dacă:

a) Unul din termeni este raţional, iar celălalt este iraţional?

b) Ambii termeni sunt iraţionali?

Aceleaşi cerinţe pentru produsul a doi factori.

5. Dacă o dreaptă intersectează una din două drepte paralele în plan, atunci ea o intersectează şi pe cealaltă.

6. Dacă într-un patrulater suma măsurilor a două unghiuri opuse este egală cu 180°, atunci patrulaterului i se poate circumscrie un cerc.

7. Dacă pe un segment de lungime 1 sunt aşezate câteva segmente având suma lungimilor mai mare decât 1, atunci cel puţin două dintre segmente au un punct comun.

8. Dacă pe cercul de rază 1 sunt aşezate câteva arce având suma lungimilor mai mare decât 2π, atunci cel puţin două dintre ele au un punct comun.

9. Dacă în interiorul unei figuri de arie 1 sunt aşezate câteva figuri având suma ariilor mai mare decât 1, atunci cel puţin două au un punct comun.

10^*. Dacă $x_i, y_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$ şi $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, atunci $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n}{y_n}$.

11^*. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Să se arate că cel mai mic dintre numerele $a - b^2$, $b - c^2$, $c - d^2$, $d - a^2$ nu poate fi mai mare decât $\frac{1}{4}$.

5. Inducţia matematică

1. Să se demonstreze prin metoda inducţiei matematice egalităţile:

1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

2) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

3) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$;

4) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

5) $(1+2)(1+2^2)(1+2^4)\ldots(1+2^{2^n}) = 2^{2^{n+1}} - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$;

6) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

7) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

8) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

9) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$; 10) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

11) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$; 12) $\sum_{k=1}^{n} \frac{7}{(7k-6)(7k+1)} + \frac{1}{7n+1} = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Să se calculeze sumele de mai jos şi apoi să se demonstreze rezultatul obţinut prin metoda inducţiei matematice:

1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$; 2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$; 3) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$, unde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$, $k \in \mathbb{N}^*$;

4) $\sum_{k=1}^{n} k!(k^2 + k + 1)$; 5) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$; 6) $\sum_{k=1}^{n} k(k + \frac{1}{2})(k+1)$.

3. Să se demonstreze prin metoda inducţiei matematice relaţiile:

1) $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

2) a) $x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \ldots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n + 1$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, n **par**;

b) $x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \ldots + x^3 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \ldots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, n **impar**.

3) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \ldots + \frac{n}{x^n} = \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{x^n(x-1)^2}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$;

4) $x + 2x^3 + 3x^5 + \ldots + (n-1)x^{2n-3} + nx^{2n-1} = \frac{x[1 - (n+1)x^{2n} + nx^{2n+2}]}{(1-x^2)^2}$, $x \neq \pm 1$, $n \in \mathbb{N}^*$;

5) $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \ldots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x - x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$, $x \neq \pm 1$.

4. Să se demonstreze inegalităţile:

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}\le n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$; 2) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $n\in\mathbb{N}^*$;

3) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge 2$; 4) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$, $n\in\mathbb{N}^*$;

5) $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}<\frac{2n-1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, $n>3$;

6) $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge 2$;

7) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-1{,}9$, $n\in\mathbb{N}^*$; 8)* $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}<3\sqrt[3]{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$;

9) $|a_1+a_2+\ldots+a_n|\le|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$, $n\in\mathbb{N}^*$, $a_i\in\mathbb{R}$;

10) 1) Dacă $a_i\in(0,1)$, $i=1,2,\ldots$, atunci $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)\ge 1-a_1-a_2-\ldots-a_n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$;

2) Dacă $a_1>0$, $a_2>0,\ldots$, atunci $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)>1+a_1+a_2+\ldots+a_n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.

11) Dacă $a_i,b_i>0$, atunci $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\ge\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$;

12) Dacă $x_i\ge 0$ şi $x_1+x_2+\ldots+x_n\le\frac{1}{2}$, atunci $(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)\ge\frac{1}{2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

13) Dacă $a_n=\frac{2^3+1}{2^3}\cdot\frac{3^3+1}{3^3}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3+1}{n^3}$, $b_n=\frac{2^3-1}{2^3}\cdot\frac{3^3-1}{3^3}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3}$, $n\ge 2$, atunci:

1) $a_nb_n<1$, $\forall n\ge 2$; 2) $\frac{a_n}{b_n}=\frac{3(n^2+n)}{2(n^2+n+1)}$, $\forall n\ge 2$.

14) $\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{(1+1^2)(1+2^2)\ldots(1+n^2)}\le\frac{1}{2^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$; 15) $a^n+b^n\ge\frac{1}{2^{n-1}}(a+b)^n$, $a,b\ge 0$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5. Să se demonstreze inegalităţile: 1) $2^n\ge n+1$, $n\in\mathbb{N}^*$; 2) $2^n>2n+1$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 3$;
3) $3^n>n^3$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 4$; 4) $2^n>n^3$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 10$; $3^n\ge 6n^2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 5$.

6. Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care:
1) $3^n\ge 2(n+1)$; 2) $2^n>n^2$; 3) $3^n\ge 6n^2$; 4) $3^n>(n+1)^2$; 5) $3^n>2^n+7n$;
6) $5^n\ge 5n^3+2$; 7) $2^n>n^2+4n+5$; 8) $n!>2^n$, $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.

7. Să se arate că: 1) $3+33+333+\ldots+\underbrace{33\ldots3}_{n}=\frac{10^{n+1}-9n-10}{27}$, $n\in\mathbb{N}^*$;

2) $7+77+777+\ldots+\underbrace{77\ldots7}_{n}=\frac{7(10^{n+1}-9n-10)}{81}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

8. Să se arate că numărul $2^{2^n}+1$ se termină în 7, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge 2$.

9. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt adevărate pentru orice $n\in\mathbb{N}$:
1) $n^3+11n\vdots 3$; 2) $n^3+5n\vdots 6$; 3) $n^5-n\vdots 30$; 4) $7^n-1\vdots 6$; 5) $7^{2n}-4^{2n}\vdots 33$;
6) $4^n+15n-1\vdots 9$; 7) $2^{n+1}\cdot 5^n+7\vdots 9$; 8) $5^{n+3}+11^{3n+1}\vdots 17$; 9) $7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n\vdots 19$;
10) $12^n+110n-1\vdots 121$.

10. Fie $m\in\mathbb{N}$, $a_n=9^{n+1}-8n+m$. Să se determine cel mai mic m pentru care $a_n\vdots 16$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

11.* 1) Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2-2x+4=0$, iar $S_n=x_1^n+x_2^n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că $S_n\in\mathbb{Z}$ şi 2^n divide S_n, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2) Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 4x - 8 = 0$, iar $S_n = x_1^n + x_2^n$, atunci 2^{3n+1} divide S_{2n}, iar 2^{3n+2} divide S_{2n+1}.

12. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin:

1) $x_1 = 3,\ x_2 = 5,\ x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Să se arate că $x_n = 2^n + 1,\ n \in \mathbb{N}^*$.

2) $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$ (Şirul lui Fibonacci).

Să se arate că $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\ n \in \mathbb{N}^*$.

3) $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n},\ n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $x_n < x_{n+1},\ x_n < 3,\ n \in \mathbb{N}^*$.

4) $x_1 = 0,\ nx_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

Să se arate că $x_n = \frac{(n-1)n}{2},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

5) $x_i \in \mathbb{N}^*,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{x_n(x_n+1)}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $x_n = n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

6) $x_i > 0,\ x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $x_k = k,\ k \in \mathbb{N}^*$.

7) $x_i > 0,\ x_1 = 1,\ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_n} = \frac{n+1}{2}\sqrt{x_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că $\sqrt{x_{n+1}} = \frac{n+1}{n}\sqrt{x_n}$ şi $x_n = n^2,\ n \in \mathbb{N}^*$.

8) Fie ecuaţia $x^2 - ax + b = 0,\ a, b \in \mathbb{Z}$. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei, atunci să se arate că suma $S_n = x_1^n + x_2^n$ este număr întreg pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

13.* Fie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o funcţie cu proprietăţile: 1) $f(mn) = f(m)f(n)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$; 2) Dacă $m < n$, atunci $f(m) < f(n)$; 3) $f(2) = 2$. Să se arate că $f(n) = n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

14. Să se arate că oricare ar fi n puncte în plan, $n \geq 3$, oricare trei puncte necoliniare, atunci se pot construi $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ triunghiuri având vârfurile în aceste puncte.

15. În plan se dau n discuri ($n \geq 3$) care se intersectează câte trei. Să se arate că există cel puţin un punct care aparţine tuturor discurilor date (Helly).

Teste de evaluare

Testul 1

1. Fie predicatul $p(x)$: „$x^2 + x + 1$ este prim", $x \in \mathbb{N}$. Care din propoziţiile următoare este falsă: a) $p(1)$; b) $p(2)$; c) $p(4)$?

2. Determinaţi mulţimile A, B, dacă verifică simultan condiţiile:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ A \cap B = \{1, 2, 3\},\ A - B = \{4\}$.

3. Să se demonstreze că: $5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2) - 120}{3},\ \forall n \geq 5,\ n \in \mathbb{N}$.

4. Într-o clasă de 25 de elevi, s-a constatat că se practică următoarele sporturi: fotbal, handbal şi baschet. Un număr de 15 elevi joacă fotbal, 12 joacă handbal, 11 joacă baschet, 5 joacă şi fotbal şi baschet, 9 joacă şi fotbal şi handbal, 4 joacă handbal şi baschet, iar 3 practică toate cele trei sporturi. Determinaţi numărul de elevi care: a) joacă numai baschet: b) joacă numai fotbal; c) joacă numai handbal; d) joacă handbal şi baschet, dar nu joacă fotbal; e) joacă fotbal şi handbal, dar nu joacă baschet; f) practică unul din jocuri; g) practică cel puţin un sport dintre cele trei menţionate; h) nu practică nici un joc dintre cele menţionate.

5. Dintr-o tablă de şah ce conţine 8×8 pătrate, se decupează două pătrate: cel de sus, stânga şi cel de jos, dreapta. Se poate acoperi cu pietre de domino (o piatră de domino acoperă două pătrate de pe tabla de şah), fără suprapunere, partea rămasă din tabla de şah?

6. Să se arate că orice patrulater convex poate fi împărţit în $n \geq 4$ patrulatere inscriptibile.

Testul 2

1. Pentru care pereche de numere (x, y) sunt adevărate simultan, propoziţiile:
$x^2 > y^2$; $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$, $-x < -y$? a) $(-1, 2)$; b) $(5, 1)$; c) $(2, 4)$.

2. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Să se determine submulţimea $M \subset A \times B$, $M = \{(x, y) | 2x + y = 7\}$.

3. Să se demonstreze că: $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$, $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Într-o clasă cu 36 de elevi, 18 elevi pictează, 20 de elevi scriu poezii, 25 de elevi cântă, 9 elevi pictează şi scriu poezii, 11 elevi scriu poezii şi cântă, 12 elevi pictează şi cântă. Câţi elevi pictează şi scriu poezii şi cântă?

5. Prin A, B, două puncte din plan, se duc m drepte şi respectiv n drepte. Presupunem că oricare două drepte nu sunt paralele şi nici o dreaptă nu trece prin A şi B. Să se determine numărul de regiuni în care împart planul dreptele considerate. Analizaţi cazurile: 1) $m = 2$, $n = 2$; 2) $m = 3$, $n = 2$.

6. Să se arate că dacă $a, b > 0$, atunci $\frac{a^2}{\min(a,b)} + \frac{b^2}{\max(a,b)} \geq a + b$.

Testul 3

1. Dacă $\{x_0, y_0\}$ este mulţimea de adevăr a predicatului $p(x, y)$: $|x + y - 2| + |y - 3| = 0$, atunci valoarea expresiei $E = |x_0 - 5| + |x_0^2 - y_0^2 + 3| - |3x_0 - 2y_0 + 1|$ este egală cu: a) 3; b) -5; c) 0.

2. Să se determine numărul de elemente ale mulţimii: $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \middle| x = \frac{4n^2+5}{2n+1}, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. 1) Arătaţi că $10^n + 18n - 28$ se divide cu 27, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2) a) Arătaţi că $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$, $x \neq 0$.

b) Fie $x \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Utilizând, eventual b), arătaţi că $\sqrt[n]{\sqrt{5} - 2} + \sqrt[n]{\sqrt{5} + 2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ (unde $\sqrt[n]{a} = x$, $a \geq 0$, astfel încât $a = x^n$).

4. Se dau trei numere: 2, $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$. După un pas, este permisă scrierea a noi trei numere, înlocuind fiecare din numerele date prin semisuma celorlalte numere.
Se poate, efectuând de câteva ori această operaţie, să se obţină tripletul $1, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$?

5. Se pot împărţi numerele de la 1 la 21 în câteva grupe, astfel încât, în fiecare grupă, cel mai mare număr să fie egal cu suma celorlalte numere din grupă?

6. Fie $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu proprietatea că $|f(x)| \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$, Calculaţi $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ şi apoi arătaţi că $|a| + |b| + |c| \leq 17$.

Testul 4 (grilă)

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, astfel ca predicatele $p(x,y)$: „$x+y=4$“, $q(x,y)$: „$x^2+y^2=12$“, să fie adevărate. Să se arate că $p(x,y) \wedge q(x,y) \Rightarrow r(x,y)$: „$x^3+y^3=s$“, dacă: a) $s=40$; b) $s=30$; c) $s=50$.

2. Dacă mulţimile A şi B verifică simultan condiţiile:
1) $A \times \{1,2,3\} \subset \{1,2,4,5\} \times B$; 2) $\{2,5\} \times B \subset A \times \{1,2,3,4\}$; 3) $(1,4) \in A \times B$, $(3,4) \notin B \times A$, atunci:
a) $A=\{1,2,5\}$, $B=\{1,2,3,4\}$; b) $A=\{1,2,4,5\}$, $B=\{1,2,3\}$; c) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,3,4,5\}$.

3. Suma $\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$ este egală cu:
a) $\left[\frac{n+1}{2}\right]^2$; b) $\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]$; c) $\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+2}{2}\right]$.

4. În plan se duc $n(\geq 3)$ drepte, câte două neparalele şi oricare trei neconcurente. Numărul de părţi în care împart aceste drepte planul, este: a) n^2+1; b) $\frac{n^2+3}{2}$; c) $\frac{n^2+n+2}{2}$.

5. Cel mai mic număr m pentru care $3^n \geq 5n^2+1$, $\forall n \geq m$ este: a) 2; b) 4; c) 5.

6. Inegalitatea $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \leq \left(\frac{a_1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}}+\frac{a_2}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right)^2$ are loc dacă:
a) $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$; b) $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq 0$; c) $\forall a_i \in \mathbb{R}$.
R. a).

7. 1) În pătratul de arie 6 se aşază trei poligoane fiecare de arie 3. Arătaţi că printre ele există două având aria comună cel puţin 1 ($6 \geq 9-(s_{12}+s_{13}+s_{23})+s_{123}$ – principiul includerii şi excluderii; s_{12} este aria comună din pătrat acoperită de poligoanele 1 şi 2).

2) Numărul de numere naturale $1 \leq n \leq 999$, care nu se divid prin 5 şi 7 este egal cu:
a) 316; b) 686; c) 726.

8. Numărul de tablouri pătratice (matrice) $n \times n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, în care fiecare element este 0 sau 1 şi fiecare linie şi fiecare coloană conţine un număr impar de 1 este egal cu:
a) $2^{(n-1)^2}$; b) 2^{n^2}; c) $2^{(n+1)^2}$.
Indicaţie. O matrice $n \times n$ se obţine unic dintr-o matrice $(n-1) \times (n-1)$, iar o astfel de matrice este o funcţie $f : \{1,2,\ldots,n-1\} \times \{1,2,\ldots,n-1\} \to \{0,1\}$. Pentru a completa poziţia (n,n) ţinem seama că numărul de 1 de pe cele n linii este acelaşi cu numărul de 1 de pe cele n coloane.

9. Care este numărul minim de persoane dintr-un grup pentru a fi siguri că 3 dintre ele s-au născut în aceaşi lună şi aceeaşi zi a săptămânii? a) 167; b) 168; c) 169.
Indicaţie. (a,b), $1 \leq a \leq 7$, $1 \leq b \leq 12$; $7 \cdot 12 = 84$ perechi ordonate; $84 \cdot 2 = 168$, cu 2 persoane cu proprietatea cerută; c).

2. FUNCŢII

Conceptul de funcţie este unul dintre cele mai importante concepte din matematică.

2.1. CUPLU. PRODUS CARTEZIAN. REPER CARTEZIAN

Cuplu

Conform definiţiei egalităţii, mulţimile cu două elemente $\{a, b\}$ şi $\{b, a\}$ sunt egale, ceea ce arată că ordinea în care sunt scrise elementele nu este importantă. Totuşi în multe cazuri ordinea în care scriem elementele contează.

Exemple. 1) Convenim ca din două numere primul indică numărul de pe tricou al fotbalistului, iar al doilea precizează numărul de goluri marcate de acesta. În acest caz ordinea în care sunt scrise numerele este esenţială.
Astfel asocierea „4, 2" înseamnă că fotbalistul care are pe tricou numărul 4 a marcat 2 goluri, în timp ce asocierea „2, 4" semnifică faptul că jucătorul cu numărul 2 pe tricou a marcat 4 goluri.

2) Rândurile unei săli de spectacol sunt marcate cu litere de la A la M. Fiecare rând are 30 scaune numerotate de la 1 la 30. Pe biletul de intrare al fiecărui spectator este precizat rândul pe care este situat locul său şi numărul scaunului din acel rând. De exemplu, spectatorul care are biletul pe care stă scris $B19$ are locul situat pe rândul B, iar în cadrul acestui rând se va aşeza pe scaunul pe care este scris numărul 19.

3) Dacă fiecărei persoane îi asociem două numere din care primul reprezintă anul naşterii sale, iar al doilea număr anul morţii sale, atunci ordinea în care sunt scrise aceste numere joacă un rol capital. Astfel pentru matematicianul şi filozoful francez René Descartes avem asocierea „1596, 1650", ceea ce înseamnă că el s-a născut în anul 1596 şi a murit în anul 1650 (d.H.). Dar asocierea „365, 231" pentru o persoană arată că aceasta s-a născut în anul 365 şi a decedat în anul 231 (î.H.).

Este deci necesar să facem distincţie între asocierile de două elemente unde ordinea nu joacă nici un rol şi care sunt mulţimi de două elemente pe care le numim **perechi** şi asocierile de două elemente unde intervine ordinea, pe care le numim **cupluri** (sau **perechi ordonate**).
Perechile ordonate sunt utilizate pentru a arăta o relaţie între două cantităţi.

Definiţie. Fie A şi B două mulţimi nevide. Un element a din A şi un element b din B, luate în această ordine formează un cuplu notat (a, b).

Definiţie. În cuplul (a, b) : a se numeşte **primul element** (sau **prima componentă** sau **abscisa**) al cuplului; b se numeşte **al doilea element** (sau **a doua componentă** sau **ordonata**) cuplului.

Egalitatea a două cupluri. Două cupluri (a, b), (c, d) sunt egale şi scriem:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \text{ şi } b = d).$$

Spunem că două cupluri sunt egale dacă ele coincid pe componente.

Aşadar cupurile (a, b), (c, d) sunt diferite dacă $a \neq c$ sau $b \neq d$. Dacă a, b sunt două elemente distincte, atunci să reţinem că $\{a, b\} = \{b, a\}$ dar $(a, b) \neq (b, a)$.

Exemplu. Egalitatea $(x-y, x+2y) = (3, 0)$ are loc dacă au loc simultan egalităţile $x-y = 3$ şi $x+2y = 0$, cu alte cuvinte dacă $x = 2$ şi $y = -1$.

Produsul cartezian

Definiţie. Fie A, B două mulţimi nevide. Se numeşte **produsul cartezian** al mulţimii A cu mulţimea B, luate în această ordine, mulţimea cuplurilor având prima componentă în A şi a doua componentă în B.

Notaţie. Produsul cartezian al mulţimii A cu mulţimea B se notează

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}.$$

Adjectivul „cartezian" derivă din numele matematicianului René Descartes, al cărui nume în expresie latinizată este Cartesius.

Definiţia produsului cartezian rămâne valabilă şi în cazul particular când $A = B$. În loc să scriem $A \times A$ notăm A^2 (citim: „A doi").

Deci $A^2 = \{(x, y) \mid x \in A \text{ şi } y \in A\}$.

Pentru o mulţime finită A notăm prin $n(A)$ numărul de elemente ale mulţimii.

Dacă A şi B sunt mulţimi finite, atunci $n(A \times B) = n(A)n(B)$, ceea ce este imediat deoarece pentru a descrie pe $A \times B$ se ia un element oarecare din A şi se „cuplează" cu un element arbitrar din B.

Exemple. 1) Fie $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{u, v\}$.

Atunci: $A \times B = \{(1, u), (1, v), (2, u), (2, v), (3, u), (3, v)\}$,

$B \times A = \{(u, 1), (u, 2), (u, 3), (v, 1), (v, 2), (v, 3)\}$.

Se constată că $A \times B \neq B \times A$, deoarece cuplul $(1, u)$ care aparţine lui $A \times B$ nu se află în $B \times A$, cuplurile $(1, u)$, $(u, 1)$ sunt diferite.

În general $A \times B \neq B \times A$, ceea ce înseamnă că **produsul cartezian al mulţimilor nu este comutativ.**

2) Fie $A = \{1, 2, 3\}$. Atunci: $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

3) Fie $A = \mathbb{N}$. Avem $\mathbb{N}^2 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), ..., (1, 0), (1, 1), (1, 2), ..., (3, 0), (3, 1), (3, 2), ...\}$.

4) Fie $A = \mathbb{R}$. Atunci $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ şi } y \in \mathbb{R}\}$.

Observaţie. Se poate generaliza noţiunea de produs cartezian la mai mult de două mulţimi. Pentru trei mulţimi A, B, C produsul lor cartezian, în această ordine, este mulţimea notată: $A \times B \times C$ formată din toate **tripletele** (a, b, c), unde $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$.

Reprezentarea grafică a produsului cartezian

Produsul cartezian $A \times B$, în cazul a două mulţimi finite, îl putem reprezenta grafic cu ajutorul unui tabel, numit **diagramă cartezianã.**

Construcţia acestei diagrame se face astfel: **pe o linie orizontală** se plasează punctele care reprezintă elmentele mulţimii A şi **pe o linie verticala** punctele care reprezintă elementele mulţimii B. Cuplul (x, y) din $A \times B$ este reprezentat prin punctul rezultat din intersecţia verticalei care trece prin elementul x din A cu orizontala care trece prin elementul y din B (fig. 1)

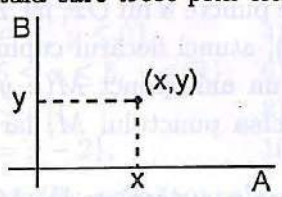


Fig. 1

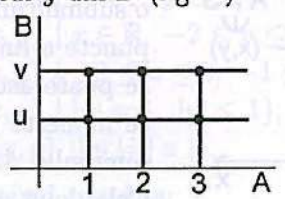


Fig. 2

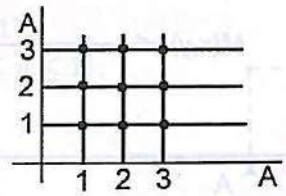
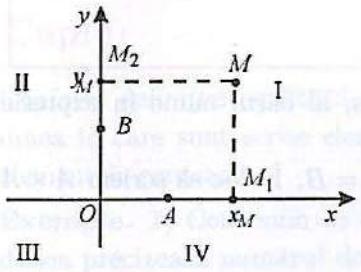


Fig. 3

În fig. 2 este prezentată diagrama cartezianã pentru $A \times B$ din exemplul 1) de mai sus.

Dacă mulţimile A şi B sunt egale, se plasează elementele în aceeaşi ordine pe linia orizontală şi pe cea verticală. Cuplurile care au componentele egale sunt reprezentate pe diagonala diagramei.
În figura 3 avem diagrama cartezianăpentru A^2 de la exemplul 2).
Reprezentarea grafică a produsului cartezian a două mulţimi A şi B, $A \times B$, devine interesantă dacă A, B sunt submulţimi ale mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$.

Reper cartezian



În plan considerăm două drepte perpendiculare Ox şi Oy, O fiind punctul de intersecţie al celor două drepte.
Pe aceste drepte considerăm o aceeaşi unitate de măsură ($OA = OB = 1$). Pe fiecare din drepte se consideră un sens pozitiv de parcurs: pe Ox, la dreapta dreptei Oy, iar pe Oy, deasupra dreptei Ox (sensurile pozitive sunt indicate de săgeţi).
Prin acest procedeu am organizat fiecare dreaptă ca axă reală.
Dacă M este un punct din plan, atunci proiectând punctul pe cele două axe, se obţin punctele M_1 pe Ox şi respectiv M_2 pe Oy.
Pe axa Ox, M_1 are coordonata x_M, iar pe axa Oy, M_2 are coordonata y_M.
În acest mod, fiecărui punct M din acest plan i se asociază o pereche unică de două numere x_M şi y_M, numite **coordonatele punctului** M şi scriem $M(x_M, y_M)$, unde x_M se numeşte **abscisa punctului** M, iar y_M se numeşte **ordonata punctului** M (se mai spune că x_M este prima componentă, iar y_M este a doua componentă; scrierea (x_M, y_M) însemnând un cuplu!). Când avem scrierea $M(x_M, y_M)$, citim: „punctul M de coordonate x_M, y_M" sau „punctul M de abscisă x_M şi ordonată y_M". Axa Ox (sau prima axă) se numeşte **axa absciselor**, iar Oy (a doua axă), se numeşte **axa ordonatelor**.
În sistemul descris mai sus, originea O este caracterizată de perechea $(0,0)$ şi scriem $O(0,0)$. Punctul unitate A de pe Ox are coordonatele $(1,0)$ şi scriem $A(1,0)$, iar punctul unitate B de pe Oy, are coordonatele $(0,1)$ şi scriem $B(0,1)$. Toate punctele de pe axa Ox sunt caracterizate de faptul că au **ordonata nulă**, iar toate punctele de pe axa Oy au aceeaşi **abscisă, egală cu zero**.

Cadranul→ Coordonate ↓	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

Punctele de pe o dreaptă paralelă cu Ox, au aceeaşi ordonată, în timp ce punctele de pe o dreaptă paralelă cu Oy, au aceeaşi abscisă. Cele două axe determină în plan patru unghiuri. Interioarele acestor unghiuri se numesc **cadrane** (numerotate pe figură, în sens antiorar, cu I, II, III, IV).
În tabelul alăturat, sunt precizate semnele coordonatelor unui punct în fiecare cadran.
Unghiul pe care îl fac axele fiind drept, se mai adaugă şi denumirea de **ortogonal** sau **dreptunghiular**.

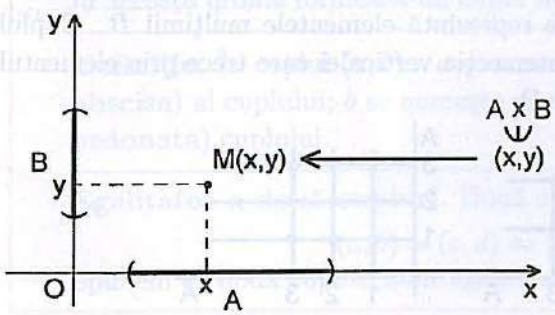


Fig. 4

Revenim la produsul $A \times B$, când A, B sunt submulţimi ale lui R.
Dacă în plan se consideră reperul cartezian xOy (A este o submulţime de puncte a lui Ox, iar B o submulţime de puncte a lui Oy), atunci fiecărui cuplu $(x,y) \in A \times B$, i se poate asocia un unic punct $M(x,y)$ (fig. 4), unde x se numeşte **abscisa** punctului M, iar y este **ordonata** punctului M.
Cele două numere x, y asociate lui M se numesc **coordonatele punctului** M.
Aşadar dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}$ (se mai spune că A, B sunt **mulţimi numerice**), atunci mulţimea $A \times B$ este o

submulţime a lui $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ şi se reprezintă geometric printr-o submulţime a planului.
Dacă A, B sunt finite, atunci $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$, ceea ce este uşor de văzut.
Relaţia este cunoscută sub numele de **regula produsului.**

Exemple. 1) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1\}$. Atunci $A \times B = \{(-1, 1), (0, 1), (1, 1)\}$ (fig. 5), $B \times A = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$ (fig. 6).

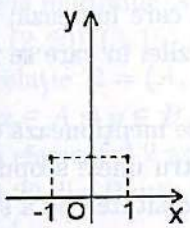


Fig. 5

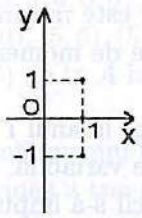


Fig. 6

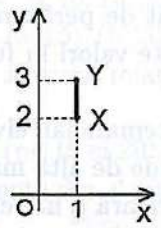


Fig. 7

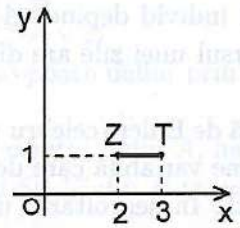


Fig. 8

2) $A = \{1\}$, $B = [2, 3]$. Avem $A \times B = \{(1, y) \mid 2 \leq y \leq 3\}$ (fig. 7) şi reprezentarea grafică este segmentul vertical $[XY]$, unde $X(1, 2)$, $Y(1, 3)$.
Pentru $B \times A = \{(x, 1)\ 2 \leq x \leq 3\}$ avem reprezentarea geometrică dată de segmentul orizontal $[ZT]$, unde $Z(2, 1)$, $T(3, 1)$ (fig. 8).

3) $A = [1, \infty)$, $B = \{2\}$. Pentru $A \times B = \{(x, 2) \mid x \geq 1\}$ avem reprezentarea grafică (fig. 9) semidreapta $[UV$, unde $U(1, 2)$, $V(x, 2)$, $x \geq 1$.

4) $A = [3, 4]$, $B = [1, 2]$, atunci $A \times B$ are ca reprezentare geometrică suprafaţa pătratică $XYZU$ unde $X(3, 1)$, $Y(4, 1)$, $Z(4, 2)$, $U(3, 2)$ (fig.10).

5) Dacă $A = \mathbb{R}$, $B = \{0\}$, atunci $\mathbb{R} \times \{0\}$ are ca reprezentare geometrică axa Ox, iar mulţimea $\{0\} \times \mathbb{R}$, axa Oy.

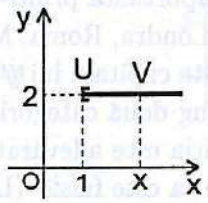


Fig. 9

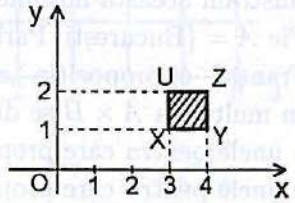


Fig. 10

Probleme propuse

1. **Se consideră mulţimile $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$. Determinaţi mulţimile: $A \times B$, $B \times A$, A^2 şi realizaţi, pentru fiecare mulţime, diagrama cartezianã.**

2. **Determinaţi numerele reale x şi y pentru care:**
   1) $(2x + 3, 5) = (y, 13x - 3y)$; 2) $(2x - 3y, y - 2) = (y, x)$;
   3) $(3 - x, 2x + y - 2) = (x - 2y + 3, x + 2y - 2)$;
   4) $(x^2 - 1, y^2) = (y^2 - 1, x^2)$; 5) $(x^2 + y^2, 1) = (1, x^2 - y^2)$; $M(2x - 1, 3x - 2) \in$ III.

3. **Arătaţi că:** 1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$; 2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

4. **Reprezentaţi grafic mulţimile de cupluri de mai jos şi scrieţi aceste mulţimi (atunci când aceasta este posibil) ca produs cartezian de mulţimi:**
   1) $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = -2\}$; 2) $\{(x, y) \mid x = 1, y \in \mathbb{R}\}$;
   3) $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \leq 0\}$; 4) $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, -2 \leq y \leq 1\}$;
   5) $\{(x, y) \mid -5 \leq x \leq 5, y \in \mathbb{R}\}$; 6) $\{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 1\}$;
   7) $\{(x, y) \mid y \leq x\}$; 8) $\{(x, y) \mid |x| = 1, |y| \leq 1\}$;
   9) $\{(x, y) \mid y = x - 2\}$; 10) $\{(x, y) \mid\mid y \mid = \mid x \mid\}$.

5. **Reprezentaţi grafic următoarele mulţimi produs:**
   1) $(0, 1) \times \{1, 2\}$; 2) $\{-1, 1, 3\} \times [-2, 2]$; 3) $[-1, 2] \times [3, 5]$; 4) $(\{-2\} \cup [-1, 1]) \times [2, 3]$;
   5) $[-3, 1] \times ([1, 2] \cup \{3\})$; 6) $([-5, -3] \cup \{-1\}) \times (\{-2\} \cup [-1, 3])$; 7) $[0, \infty) \times [0, \infty)$;

8) $\mathbb{R} \times (0, \infty)$; 9) $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$; 10) $\{0\} \times (-\infty, 0]$; 11) $\{-1, 1\} \times \mathbb{R}$; 12) $\mathbb{R} \times \{1, 5\}$.

2.2. NOŢIUNEA DE FUNCŢIE

În multe situaţii din viaţa cotidiană auzim astfel de formulări:
rezultatul unui elev la examenul de capacitate este funcţie de efortul depus pentru pregătirea lui; productivitatea muncii unui individ depinde de cât de performantă este maşina la care lucrează; temperatura înregistrată pe parcursul unei zile are diferite valori în funcţie de momentul zilei în care se face măsurătoarea etc.
Într-o expunere făcută de Euler (celebru matematician elveţian) în anul 1749 se menţionează de mai multe ori funcţia ca o mărime variabilă care depinde de altă mărime variabilă. Pentru unele scopuri o astfel de definiţie este suficientă. În dezvoltarea ulterioară a matematicii s-a impus necesitatea de a se da noţiunii de funcţie un conţinut mai general şi mai abstract.
Nu dependenţa variabilelor este esenţială în conţinutul noţiunii de funcţie, ci corespondenţa prin care anumitor obiecte li se ataşează alte obiecte. În felul acesta, noţiunea de funcţie se fundamentează pe noţiuni ale teoriei mulţimilor. Conceptul de funcţie pe care-l vom defini în continuare joacă un rol deosebit de important în matematică.

Noţiunea de relaţie

Ilustrăm această noţiune importantă printr-un exemplu şi apoi o vom defini riguros.
Fie $A = \{$Bucureşti, Paris, Londra, Roma, Moscova$\}$ şi $B = \{$România, Spania, Anglia, Germania, Italia, Franţa$\}$ şi propoziţia „x este capitala lui y", unde x este un element din A, iar y este un element din B. În mulţimea $A \times B$ se disting două categorii de cupluri (x, y):
- unele pentru care propoziţia este adevărată: (Bucureşti, România), (Paris, Franţa), (Roma, Italia);
- unele pentru care propoziţia este falsă: (Londra, Germania), (Moscova, Spania).

Se spune că propoziţia „x este capitala lui y" stabileşte o **relaţie** de la mulţimea A la mulţimea B. Notăm relaţia cu $\mathcal{R}$. Mulţimea tuturor cuplurilor (x, y) pentru care propoziţia enunţată este adevărată este mulţimea $G \subset A \times B$, numită **graful relaţiei**. Să observăm că relaţia $\mathcal{R}$ de la A la B este bine determinată de graful său $G = \{$(Bucureşti, România), (Paris, Franţa), (Londra, Anglia), (Roma, Italia)$\}$.

Definiţie. O relaţie $\mathcal{R}$ este definită prin:
- o mulţime A, numită **mulţime de plecare** a lui $\mathcal{R}$;
- o mulţime B, numită **mulţime de sosire** a lui $\mathcal{R}$;
- o parte G a produsului cartezian $A \times B$, numită **graful** lui $\mathcal{R}$.

Vom spune că **un element x din A este în relaţia $\mathcal{R}$ cu un element y din B**, dacă $(x, y) \in G$. Notăm $x\mathcal{R}y$.

Dacă $x\mathcal{R}y$, mai spunem că y este imaginea elementului x prin $\mathcal{R}$. Deci:
$G = \{(x, y) \in A \times B \mid x\mathcal{R}y\}$. Relaţia de mai sus o notăm $\mathcal{R} = (A, B, G)$.

Definiţie. Două relaţii (A, B, G), (A', B', G') sunt egale, dacă $A = A'$, $B = B'$, $G = G'$.

Observaţii. **1)** Produsul cartezian $A \times B$ a două mulţimi A şi B defineşte o relaţie de la A la B, al cărui graf este $A \times B$.

2) Dacă $A = B$, atunci $\mathcal{R} = (A, A, G)$ se numeşte **relaţie (binară) în A.**

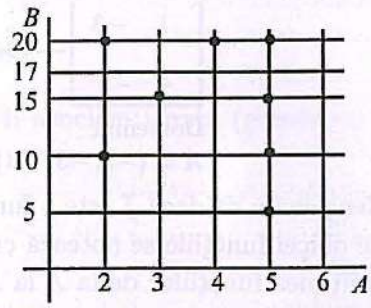
3) Definiţia unei relaţii de la mulţimea A la o mulţime B prezintă particularităţile:

- un element din A poate avea mai multe imagini în B;
- pot exista în A elemente care să nu aibă imagine în B;
- un element din B poate fi imaginea mai multor elemente din A;
- pot exista în B unul sau mai multe elemente care să nu fie imaginea nici unui element din A.

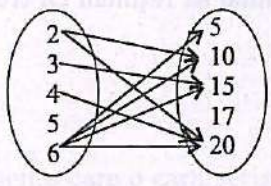
Exemplu. Fie mulţimile $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{5, 10, 15, 20, 17\}$ şi
$G = \{(2, 10), (2, 20), (3, 15), (4, 20), (5, 5), (5, 10), (5, 15), (5, 20)\} \subset A \times B$.
Se obţine o relaţie $\mathcal{R} = (A, B, G)$ de la A la B. Această relaţie se poate defini prin $\mathcal{R}$: „x este divizor al lui y", unde $x \in A$ şi $y \in B$.
Observăm că elementul 2 are două imagini în B (pe 10 şi 20), elementul 6 din A, nu are nici o imagine în B, elementul 20 din B este imaginea a trei elemente din A (2,4 şi 5), 17 din B nu este imaginea nici unui element din A.

Reprezentarea grafică a unei relaţii

În studiul relaţiilor, este comod de a ilustra situaţia prin una din diagramele de mai jos.



a) **Diagrama cartezianã.** Pentru a marca faptul că perechea (x, y) din $A \times B$ aparţine grafului G, se notează în diagrama produsului cartezian $A \times B$, un cerc „plin" în punctele ce precizează cuplul (x, y).
În desenul alăturat, se prezintă diagrama cartezianã pentru exemplul de mai sus.



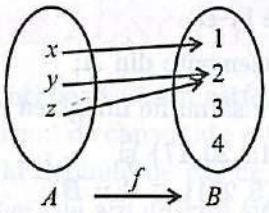
b) **Diagrama cu săgeţi.** În diagrama cu „săgeţi", mulţimea de plecare A şi mulţimea de sosire B sunt plasate una lângă alta.
Dacă cuplul (x, y) al produsului $A \times B$ aparţine grafului G al relaţiei, se uneşte printr-o săgeată elementul x din A cu elementul y din B. Se obţine astfel o reprezentare grafică a relaţiei, numită *diagrama cu săgeţi*.
Iată alăturat această diagramă, pentru exemplul analizat.
O categorie importantă în mulţimea relaţiilor de la o mulţime nevidă A la altă mulţime nevidă B, o reprezintă acele relaţii care asociază **oricărui** element din A un **unic** element din B. Astfel de relaţii le numim **relaţii funcţionale** sau **funcţii**.

Definiţie. Fie A şi B două mulţimi nevide. Spunem că am definit **o funcţie** pe mulţimea A cu valori în B dacă printr-un procedeu oarecare facem ca **fiecărui element** $x \in A$ să-i corespundă **un singur element** $y \in B$.

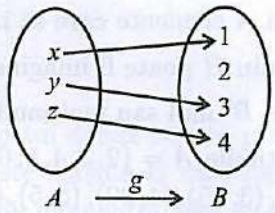
Notaţie. O funcţie definită pe A cu valori în B se notează $f : A \to B$ (citim: „f definită pe A cu valori în B") sau $A \xrightarrow{f} B$.
Uneori o funcţie se notează simbolic $A \to B$, $x \to y = f(x)$ (citim: „f de x"), unde y este **imaginea elementului** x din A prin funcţia f sau încă **valoarea funcţiei** f **în** x.
Elementul x se numeşte **argument al funcţiei** sau **variabilă independentă**.

Mulţimea: A se numeşte **domeniul de definiţie a funcţiei** f;
B se numeste **mulţimea în care funcţia ia valori** sau **codomeniul funcţiei** f.
Mulţimea tuturor imaginilor elementelor lui A **prin** f **o numim mulţimea valorilor lui** f, care este o submulţime a lui B.

Exemple. Considerăm funcţiile definite prin diagramele cu săgeţi:

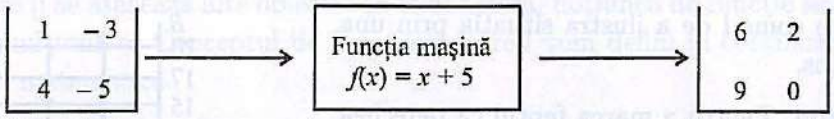


Domeniul $A = \{x, y, z\}$
Codomeniul $B = \{1, 2, 3, 4\}$
Mulţimea de valori $\{1, 2\}$



Domeniul $A = \{x, y, z\}$
Codomeniul $B = \{1, 2, 3, 4\}$
Mulţimea de valori $\{1, 3, 4\}$

Uneori este util de a gândi funcţia ca o „maşină". O cutie de numere (domeniul) se pune în maşină. Această maşină modifică fiecare număr după o anumită regulă şi ies noi numere într-o altă cutie (mulţimea valorilor).



Domeniul $A = \{-5, -3, 1, 4\}$

Această maşină adună 5 la fiecare număr

Mulţimea de valori $\{0, 2, 6, 9\}$.

Menţionăm că dacă f este o funcţie de la A la B, atunci se mai spune că f este **o aplicaţie** de la A la B.
De obicei funcţiile se notează cu litere mici $f, g, h, \ldots$.
Mulţimea funcţiilor de la A la B se notează cu $\mathcal{F}(A, B)$.
În final să reţinem că trei elemente definesc o funcţie:

> 1) A = **domeniul de definiţie;**
> 2) B = **codomeniul;**
> 3) **legea f care leagă cele două mulţimi.**

Unii autori consideră funcţia ca fiind tripletul (A, f, B), unde elementele din paranteză au semnificaţia de mai sus.
Să observăm că în definiţia funcţiei nu se face vreo precizare asupra elementelor din B.
O funcţie $f : A \to B$ se numeşte **numerică** dacă A, B sunt submulţimi ale lui $\mathbb{R}$.

Pentru toate funcţiile pe care le considerăm, în continuarea expunerii, mulţimile A, B sunt nevide.

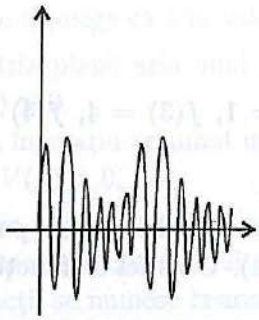
Funcţii care modelează situaţii practice

În viaţa de zi cu zi întâlnim corespondenţe care sunt de tip funcţie şi care apar pe cale experimentală.

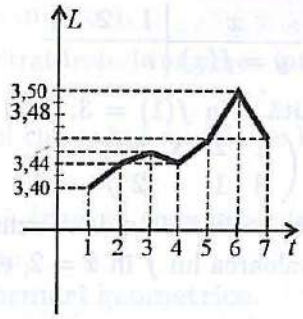
1) **Electrocardiograma** unui pacient descrie contracţiile inimii înregistrate electric.

2) **Cursul de schimb valutar** prezintă în timp (zile, luni) raportul de schimb (paritate) între două monede.

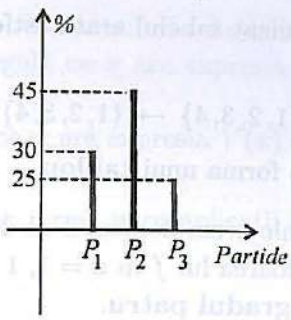
3) **Sondaj de opinie.** Pentru a vedea preferinţele alegătorilor pentru unul din cele trei partide politice P_1, P_2, P_3 s-a chestionat un număr reprezentativ de persoane obţinându-se următoarea situaţie (în procente): pentru P_1 au optat 30%, pentru P_2 au optat 45%, iar pentru P_3 au optat 25%. În acest caz este mai sugestivă reprezentarea preferinţelor alegătorilor pentru partide cu ajutorul bastonaşelor.



Electrocardiogramă



Cursul de schimb euro-leu în zilele unei săptămâni



Sondaj de opinie

4) Dependenţa între lungimea l a unei bare metalice şi temperatura ei $t°$ este dată de formula $l(t°) = l_0(1 + \alpha t°)$, unde l_0 este lungimea barei la $0°$, iar α este o constantă.

5) Un ciclist rulează, fără să mai pedaleze, cu viteza $v(t) = (12 - 1,5t)$m/s. Cât timp îi mai trebuie până să se oprească?

Dacă ciclistul s-a oprit, aceasta înseamnă $v = 0$, iar de aici $t = \dfrac{12}{1,5} = 8$s.

Alte corespondenţe de tip funcţie: 1) fiecărui elev dintr-un liceu îi asociem vârsta (greutatea, culoarea ochilor, înălţimea, amprenta digitală);

2) fiecărui elev dintr-un liceu îi asociem profesorul lui de matematică;

3) fiecărui elev din România îi asociem şcoala la care învaţă;

4) fiecărei cărţi tipărite i se asociază autorul;

5) fiecărui municipiu din România i se asociază judeţul în care se află;

6) fiecărei ţări de pe mapamond i se asociază capitala ei.

Moduri de a defini o funcţie

Indiferent de modul în care definim o funcţie trebuie să precizăm cele trei elemente care o caracterizează: **domeniul de definiţie, codomeniul şi legea de corespondenţă.**

1. Funcţii definite sintetic corespund acelor funcţii $f : A \to B$ pentru care se indică fiecărui element x din A elementul $y = f(x)$ din B.

Acest lucru se poate face fie cu ajutorul **diagramei cu săgeţi**, fie cu ajutorul **tabelului de valori** sau printr-un **tablou.**

Utilizăm acest mod de a defini o funcţie când A este o mulţime finită.

Exemple. 1) Fie $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$ definită prin $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$.

În diagrama cu săgeţi (fig. 1) reprezentăm mulţimile prin diagrame, iar legea de corespondenţă prin săgeţi.

Faptul că fiecărui element x din A îi corespunde un unic element $y = f(x)$ din B înseamnă pentru diagrama cu săgeţi că din fiecare element din A pleacă o singură săgeată.

Cum pentru elementele codomeniului nu avem nici o exigenţă înseamnă că într-un astfel de element pot ajunge una, mai multe săgeţi sau niciuna.

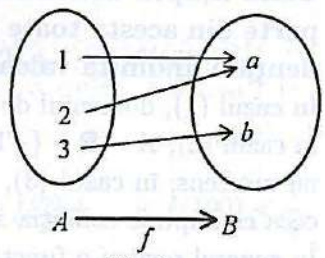


Fig. 1

Aceeaşi funcţie o putem defini utilizând tabelul de valori.

Acesta este format din două linii. În prima linie se trec elementele mulţimii pe care este definită funcţia, iar în linia a doua valorile funcţiei în aceste elemente.

Pentru cazul analizat tabelul arată astfel:

x	1	2	3
$y=f(x)$	a	a	b

2) Funcţia $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ definită prin $f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=4$, $f(4)=2$ poate fi reprezentată sub forma unui **tablou** $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$.

unde în prima linie avem domeniul de definiţie, iar în linia a doua sunt valorile funcţiei în punctele domeniului (3 este valoarea lui f în $x=1$, 1 este valoarea lui f în $x=2$, etc.). O astfel de funcţie se numeşte **permutare de gradul patru.**

Observaţie. Nu putem defini sintetic o funcţie al cărui domeniu de definiţie are o infinitate de elemente.

2. Funcţii definite analitic. Funcţiile $f:A\to B$ definite cu ajutorul unei (unor) formule sau a unor proprietăţi spunem că sunt definite analitic. Corespondenţa f leagă între ele elementul arbitrar x din A de imaginea sa $f(x)$.

Exemple. 1) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Această funcţie asociază fiecărui număr real x pătratul lui, x^2.

2) Funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{dacă } x \text{ este par}\\ x+1, & \text{dacă } x \text{ este impar,}\end{cases}$ este exemplu de funcţie definită prin două formule.

3) Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de legea $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x\le -5\\ 1, & x\in(-5,3)\\ x^2+6, & x\ge 3\end{cases}$ este un alt exemplu de funcţie definită cu ajutorul mai multor formule.

Funcţiile definite prin mai multe formule le numim **funcţii multiforme.**

Atragem atenţia asupra funcţiilor multiforme în sensul că, fiecare formulă este valabilă pe o anumită submulţime a lui A şi deci **două formule nu pot fi folosite pentru determinarea imaginii unuia şi aceluiaşi element.**

În exemplul 3 prezentat, dacă $x=-6$, atunci $f(-6)$ se calculează cu prima formulă deoarece $-6<-5$ şi deci $f(-6)=3(-6)-1=-19$.

Dacă $x=4$, atunci $f(4)$ se calculează cu ultima formă pentru că $4\ge 3$ când $f(4)=4^2+6=22$.

Cea mai frecventă reprezentare a unei funcţii în matematică este printr-o formulă. În acest caz, elementele domeniului de definiţie şi ale domeniului valorilor nu pot fi decât numere sau „obiecte matematice" pentru care s-au introdus reguli de calcul corespunzătoare.

De exemplu: $y=3x-2$, (1), $y=\dfrac{x-3}{x+1}$, (2), $y=\sqrt{x+1}$, (3).

Când asupra domeniului de definiţie nu s-au făcut ipoteze speciale, se consideră ca făcând parte din acesta toate numerele reale, cărora prin formula respectivă li se pune în corespondenţă o anumită valoare.

În cazul (1), domeniul de definiţie este alcătuit din mulţimea numerelor reale;

în cazul (2), $A=\mathbb{R}-\{-1\}$ deoarece pentru $x=-1$ se anulează numitorul fracţiei şi împărţirea prin zero nu are sens; în cazul (3), $A=[-1,\infty)$ pentru că radicalul de ordin par are sens din numere nenegative, ceea ce impune condiţia $x+1\ge 0$.

În general pentru o funcţie f vom nota prin D_f domeniul maxim de definiţie.

4) Din fizică se ştie că în mişcarea rectilinie şi uniformă a unui punct material legea care dă expresia spatiului s parcurs în timpul t, notată $s(t)$ este $s(t)=vt$, unde v este viteza (constantă) punctului material.

Aici $t \geq 0$. Se înţelege că s ia valori în $[0, \infty)$.

5) În geometria plană aria unui pătrat având lungimea laturii egală cu x are expresia $S(x) = x^2$. Aici $x > 0$ şi $S(x) > 0$.

În geometria în spaţiu volumul unui cub având muchia de lungime x are expresia $V(x) = x^3$. Şi în acest caz $x > 0$ şi $V(x) > 0$.

6) O categorie importantă de funcţii apare în geometria plană sub forma unor aplicaţii $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, unde $\mathcal{P}$ este mulţimea punctelor unui plan.

Astfel de funcţii se numesc **transformări geometrice.**

Simetria în raport cu un punct

Fie O un punct fixat în planul $\mathcal{P}$. Aplicaţia $s_O : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ care asociază fiecărui punct $M \in \mathcal{P}$ punctul $M' = s_O(M)$ cu proprietăţile: 1) punctele M, O, M' sunt coliniare; 2) $OM = OM'$ (fig. 2) se numeşte **simetria în raport cu punctul** O.Punctul M' se numeşte **simetricul punctului** M în raport cu punctul O.

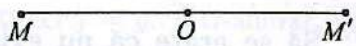


Fig. 2

Simetria în raport cu o dreaptă

Fie o dreaptă d fixată în planul $\mathcal{P}$ (fig. 3).

Aplicaţia $s_d : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ care asociază fiecărui punct $M \in \mathcal{P}$ punctul $M' = s_d(M)$ cu proprietatea că d este mediatoarea segmentului $[MM']$ dacă $M \notin d$, iar dacă $M \in d$, atunci $M' = M$.

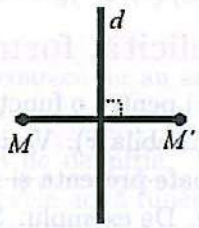


Fig. 3

Probleme propuse

1. 1) Există funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 3x - 7$?

2) Există funcţie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \dfrac{2x}{5}$?

3) Există funcţie $f : [0, 1] \to [1, 2]$, $f(x) = 2x + 1$?

2. Se consideră funcţia $u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, $u(n) =$ ultima cifră a numărului 2^n. Să se calculeze $u(10)$, $u(2008)$ şi apoi să se determine expresia lui $u(n)$ şi să se calculeze $\sum_{k=1}^{2008} u(k)$.

3. Fie $r : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $r(k) =$ restul împărţirii lui k la 5. Să se calculeze $r(39)$, $r(-24)$, $r(2008)$ şi apoi să se determine expresia lui $r(k)$.

4. Fie $f : \mathbb{R} - \{-1.0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

1) Să se arate că $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$; 2) Să se calculeze suma $f(1) + f(2) + \ldots + f(100)$.

5. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

1) Arătaţi că $f(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$; 2) Arătaţi că $f(1) + f(2) + \ldots + f(100) < \dfrac{1}{4}$.

6. Fie $A = \{-1, 1\}$, $B = \{1, 3, 5\}$.

1) Dacă $f : A \to B$, $f(x) = x + 2$, atunci f este o funcţie?

2) Dacă $f : A \to B$, $f(x) = x + 3$, atunci f este o funcţie?

3) Pentru ce $m \in \mathbb{R}$, $f : A \to B$, $f(x) = x + m$, este funcţie?

7. Dacă $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-1,\ x\in\mathbb{Z};\ \dfrac{5x-1}{x+1}\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}\right)$, atunci să se determine elementele mulţimii $\{x\in\mathbb{Q}\mid f(x)=8\}$.

8. Precizaţi domeniile maxime de definiţie pentru funcţiile:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$; 2) $f(x)=\sqrt{4-x}$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$; 4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}+1}$; 5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x+3}}{x^2-2x}$;

6) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$; 7) $f(x)=\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$; 8) $f(x)=\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$.

9 Să se arate că dacă $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}+x+1$, atunci $f(x)$ este număr par, $\forall x\in\mathbb{N}^*$.

10. Dacă $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=(2x+1,\ x$ impar; $x+1,\ x$ par), atunci $f(1)+f(3)+f(5)>f(2)+f(4)+f(6)$.

11* Să se arate că nu există $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $|f(x+y)+x^2+y^2|<1$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

12* Să se arate că nu există funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $\left|f(x+y)+\dfrac{x+y}{2}\right|>\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Forma explicită, forma implicită a unei funcţii

Forma $y=f(x)$ pentru o funcţie se numeşte **forma explicită** (variabila dependentă y se exprimă explicit în funcţie de variabila x). Variabila izolată y este variabila dependentă, iar x este variabila independentă. O funcţie se poate prezenta şi sub **formă implicită** în care, spre deosebire de forma explicită, variabilele nu sunt izolate. De exemplu: $3x-2y=1$, (1); $xy=3$, (2); $x^2+y^2=1$, (3).

Când se dă o egalitate sub forma explicită, atunci variabila izolată se consideră dependentă şi cealaltă independentă. Pentru forma implicită nu mai este întotdeauna clar care este variabila independentă şi care este cea dependentă. De obicei însă când se foloseşte notaţia cu x şi y, y este considerată variabilă dependentă, iar când se folosesc alte litere, este nevoie de o indicaţie specială în acest sens.

Din (3) deducem $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, care nu mai este o funcţie ($x\in[-1,1]$) deoarece unui număr $x\in[-1,1]$ îi corespund două valori pentru y. Deci corespondenţa nu mai este univocă. Însă forma explicită $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ este o funcţie. La fel $y=-\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ este o altă funcţie. Mai facem precizarea că pentru o formulă (expresie) dată se pot defini mai multe funcţii. Fie expresia $E(x)=2x+3$. Se pot considera funcţiile: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$; $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$; $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$ etc.

Exemple de corespondenţe care nu sunt funcţii

Fie corespondenţele definite cu ajutorul diagramelor cu săgeţi (fig. 4, a), b)).

Corespondenţa din fig. 4 a) nu defineşte o funcţie deoarece lui $1\in A$ i se asociază două elemente a şi b din B (deci corespondenţa nu este univocă).

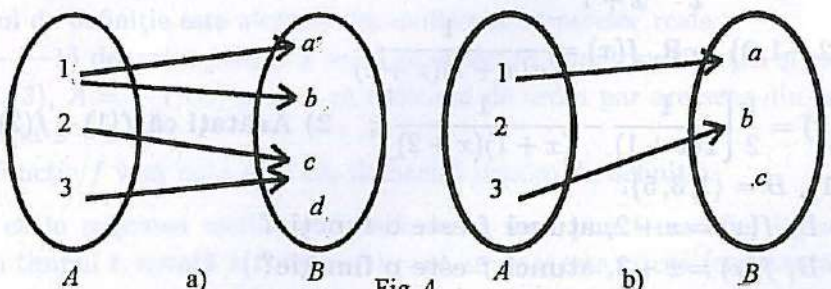


Fig. 4

Corespondenţa din fig. 4 b) nu defineşte o funcţie deoarece lui $2 \in A$ nu i se asociază nici un element din B.

Funcţii egale

Definiţie. Fie $f : A \to B$, $g : C \to D$ două funcţii.
Spunem că funcţiile f, g sunt **egale** (şi scriem $f = g$) dacă:
1) $A = C$ (**funcţiile au acelaşi domeniu de definiţie**),
2) $B = D$ (**funcţiile au acelaşi codomeniu**) şi
3) $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$ (**punctual, funcţiile coincid**).

Spunem că două funcţii $f : A \to B$, $g : C \to D$ **nu sunt egale** (şi scriem $f \neq g$) dacă (negăm definiţia de mai sus) $A \neq C$ sau $B \neq D$ sau ($A = C$, $B = D$ şi există $x \in A$ astfel încât $f(x) \neq g(x)$).

Exemple. 1) Fie funcţiile $f, g : \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^3$. Atunci $f = g$. Într-adevăr, cele două funcţii au aceeaşi mulţime ca domeniu de definiţie, $A = \{-1, 0, 1\}$, şi acelaşi codomeniu, $B = \mathbb{R}$. Mai trebuie să arătăm că funcţiile coincid punctual. Avem $f(-1) = -1 = g(-1)$, $f(0) = 0 = g(0)$, $f(1) = 1 = g(1)$. Deci $f = g$.

2) Funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ şi $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2$ nu sunt egale deoarece nu au acelaşi domeniu de definiţie. Deci putem scrie $f \neq g$.

3) Funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x$ au acelaşi domeniu de definiţie, $A = \mathbb{R}$, acelaşi codomeniu, $B = \mathbb{R}$, dar există $x = 0$ pentru care $f(0) = 1 \neq 0 = g(0)$. Deci cele două funcţii sunt diferite şi scriem $f \neq g$.

Probleme propuse

1. **Să se explice de ce funcţiile f, g nu sunt egale:**
1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2$; 2) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$;
3) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$.

2. **Să se determine $A \subseteq \mathbb{R}$ pentru care funcţiile $f, g : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$, $g(x) = 2x^2 - x + 3$, sunt egale.**

3. **Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $g(x) = (x - m)(x - m - 1)$, sunt egale.**

4. **Să se arate că nu există $A \subseteq \mathbb{R}$ pentru care funcţiile $f, g : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3$, $g(x) = x^2 + 2x$, sunt egale.**

5. **Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dacă $f(1) = g(1)$ şi $f(3) = g(3)$, atunci $f = g$.**

6. **Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$, $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$. Dacă $f(-1) = g(-1)$, $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$, atunci $f = g$.**

Numărul de funcţii

După ce am văzut când două funcţii sunt egale, ne propunem să determinăm numărul tuturor funcţiilor $f : A \to B$, adică $\operatorname{card} \mathcal{F}(A, B)$ în cazul când A este o mulţime cu m elemente, iar B este o mulţime cu n elemente. Numărul de elemente ale mulţimii X îl notăm prin $\operatorname{card}(X)$ (citim: cardinal de X).
Are loc următoarea:

Teoremă. Fie $\operatorname{card}(A) = m$, $\operatorname{card}(B) = n$. Atunci $\operatorname{card} \mathcal{F}(A, B) = n^m$.

Demonstraţie. Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Orice funcţie $f : A \to B$ este bine determinată dacă se cunosc valorile $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m)$. Fiecare dintre aceste elemente poate fi oricare din elementele lui B, care sunt în număr de n. Valorile $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m)$ pot fi precizate în $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{\text{de } m \text{ ori}} = n^m$ moduri, care, de fapt, reprezintă numărul tuturor funcţiilor de la A la B, adică $\operatorname{card} \mathcal{F}(A, B)$. Altfel se poate proceda prin inducţie matematică după n, pentru m fixat. ■

Pentru mulţimea $\mathcal{F}(A, B)$ se foloseşte şi notaţia B^A. Atunci $\operatorname{card}(B^A) = (\operatorname{card} B)^{\operatorname{card} A}$.

Exemplu. Dacă $A = \{1, 2\}$ şi $B = \{a, b, c\}$, atunci numărul de funcţii $f : A \to B$ este egal cu: $\operatorname{card}(B^A) = (\operatorname{card} B)^{\operatorname{card} A} = 3^2 = 9$.

Restricţia şi prelungirea unei funcţii

Dacă $f : A \to B$ şi $g : A' \to B$ sunt două funcţii cu proprietăţile:

1) $A' \subset A$ şi 2) $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A'$,

atunci f se numeşte **prelungirea funcţiei** g la A, în timp ce g se numeşte **restricţia** lui f la A' (în acest caz pentru g se foloseşte notaţia $g = f_{|A'}$, şi citim: „f restricţionată la A'".

Exemple. 1) Fie funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2$. Este clar că $f \neq g$ deoarece funcţiile au domenii diferite. În acest caz aplicaţia g este **restricţia** lui f la $\mathbb{N}$, $g = f_{|\mathbb{N}}$. Invers, funcţia f este **prelungirea** funcţiei g la $\mathbb{Z}$.

2) Fie funcţia $g : \mathbb{Q}^*_- \to \mathbb{Q}$, $g(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$. Aplicaţia $f : \mathbb{Q}_- \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ este o **prelungire** a funcţiei g la $\mathbb{Q}_-$, iar g este o **restricţie** a lui f la $\mathbb{Q}^*_-$.

Probleme propuse

1. **Fie $f : \{-1, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(-1) = -1$, $f(3) = 7$. Să se determine o prelungire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcţiei f de forma $g(x) = ax + b$.**

2. **Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 1$.**
1) Să se determine o restricţie f_1 a lui f pentru care $f_1(x) < 0$.
2) Să se determine o restricţie a lui f pentru care $f(x) \geq 4$.

3. **Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1, x \in \mathbb{Z};\ 2, x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z};\ 3, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Determinaţi restricţiile lui f la $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.**

4. **Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $h : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$. Să se arate că g, h sunt restricţii ale lui f.**

5. **Fie $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x - 1|$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = (2x + 1, x < 1;\ x - 1, x \geq 1)$. Să se arate că g şi h sunt prelungiri ale lui f la $\mathbb{R}$.**

6. **Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$. Să se determine un interval I astfel încât restricţia lui f la I să fie funcţie constantă.**

7. **Să se arate că nu există $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x| < |y - z|$, $|y| < |z - x|$, $|z| < |x - y|$.**

8*. **Să se arate că dacă $|ax + b| + |cx + d| = |2x + 1|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci $ad = bc$.**

9*. **Să se arate că nu există $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x + a| + |x + y + b| + |y + c| > |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.**

10*. **Pe intervalul $[0, 1]$ de pe axa reală se iau patru puncte a, b, c, d. Să se arate că există $x \in [0, 1]$, astfel încât $\dfrac{1}{|x - a|} + \dfrac{1}{|x - b|} + \dfrac{1}{|x - c|} + \dfrac{1}{x - d} < 40$.**

2.3. FUNCŢII DEFINITE PE MULŢIMI DE NUMERE REALE INCLUSE ÎN $\mathbb{N}$

Noţiunea de şir de numere

Vom prezenta în acest paragraf funcţii definite pe mulţimi de numere reale incluse în $\mathbb{N}$. O categorie remarcabilă de astfel de funcţii o constituie şirurile, care evident sunt funcţii numerice.

În limbajul uzual prin şir de numere înţelegem o mulţime de numere aranjate într-o ordine anumită. Elementele unui şir de numere se numesc **termenii şirului.** Primul termen este notat prin s_1, al doilea prin $s_2, \ldots$, al n-lea termen prin s_n etc.

De exemplu şirul numerelor naturale nenule este: $1, 2, \ldots, n, \ldots$ unde primul termen este $a_1 = 1$, al doilea termen este $a_2 = 2, \ldots$, al n-lea termen este $a_n = n$, etc.

Şirul inverselor numerelor naturale nenule este: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ cu $b_1 = \frac{1}{1}, b_2 = \frac{1}{2}, \ldots, b_n = \frac{1}{n}, \ldots$.

Conceptul de şir poate fi introdus cu ajutorul noţiunii de funcţie.

Mai precis are loc următoarea:

> **Definiţie.** Se numeşte şir de numere reale orice funcţie $x : \mathbb{N} - A \to \mathbb{R}$, unde A este o **submulţime finită** a lui $\mathbb{N}$.

Exemple

1) $x : \mathbb{N} - A \to \mathbb{R}$, $x(n) = \sqrt{n^2 - 4}$, $A = \{0, 1\}$.

2) $x : \mathbb{N} - A \to \mathbb{R}$, $x(n) = \sqrt{n^2 - 1}$, $A = \{0\}$.

3) $x : \mathbb{N} - A \to \mathbb{R}$, $x(n) = \dfrac{1}{1 + (-1)^n}$, $A = \{n \in \mathbb{N} |\ n = \text{impar}\}$.

Această funcţie nu este şir deoarece A este infinită.

4) $x : \mathbb{N} - A \to \mathbb{R}$, $x(n) = n^2 + 3n$, $A = \emptyset$.

Vom presupune în general că $A = \emptyset$. Fie deci $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Numărul $x(n)$ se notează în general prin x_n şi se numeşte **termenul de rang n al şirului x.**

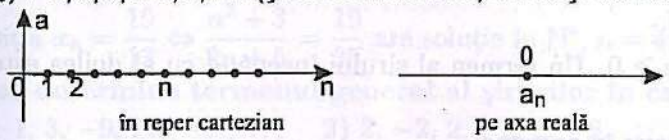
Vom nota şirul x prin $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sau $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sau simplu (x_n).

Observaţii. 1) Într-un reper cartezian graficul lui x este format dintr-o mulţime infinită de puncte.

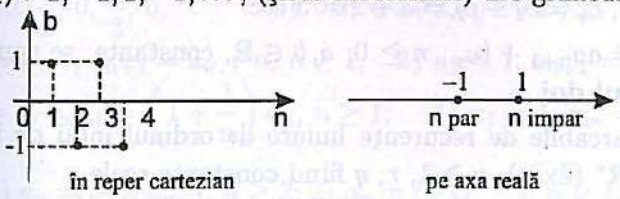
2) Atragem atenţia că vom nota şirul în diferite moduri $(x_n)_{n \geq 1}$, $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, ceea ce înseamnă că n **este variabila independentă**, iar x, a, b, ..., **este variabila dependentă.** Deci, în reprezentarea grafică **într-un reper cartezian ca axă a absciselor avem întotdeauna** On (în locul lui Ox), iar ca **axă a ordonatelor** avem Ox, Oa, Ob,...!

Exemple de şiruri

1) $(a_n) : 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$ (şirul **constant** 0; are toţi termenii egali cu zero);



2) $(b_n) : 1, -1, 1, -1, \ldots,$ (şirul **alternant**) are graficul:



3) (c_n) : $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots$ (şirul rădăcinilor pătrate ale numerelor naturale nenule).

Moduri de a defini un şir

Există mai multe posibilităţi de a descrie un şir.

1) Modul descriptiv, când se dau primii termeni consecutivi din care se poate deduce legea după care se determină oricare alt termen al şirului.

Exemple. 1) Şirul (a_n) dat prin $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ are termenii fracţii în care numărătorul este cu o unitate mai mic decât numitorul, iar numărătorii fracţiilor sunt numere naturale nenule. Deci $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Şirul (b_n) dat prin 1, 4, 9, 16, 25, ... sugerează rescrierea termenilor 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, ... şi deci termenul general este $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Printr-o regulă de calcul

În această situaţie se precizează o exprimare analitică pentru termenul de rang n, a_n, care permite calcularea oricărui termen al şirului.

Exemple. 1) Dacă şirul (a_n) este dat prin $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 0$, atunci se poate calcula orice termen din şir.

De exemplu: $a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$, $a_{10} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$, $a_{101} = \frac{101}{101+1} = \frac{101}{102}$ etc.

2) Dacă (b_n) este şirul dat prin termenul general $b_n = \sqrt[3]{n^2+1}$, $n \geq 0$, atunci $b_2 = \sqrt[3]{2^2+1} = \sqrt[3]{5}$, $b_9 = \sqrt[3]{9^2+1} = \sqrt[3]{82}$, ...

3) Prin mai multe reguli de calcul

Fie şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general $x_n = \begin{cases} n-1, & n \text{ impar} \\ n^2+1, & n \text{ par.} \end{cases}$

Avem: $x_1 = 1 - 1 = 0$ ($n = 1$, impar), $x_2 = 2^2 + 1 = 5$ ($n = 2$, par), $x_3 = 3 - 1 = 2$ ($n = 3$, impar).

4) Printr-o relaţie de recurenţă

În acest caz un termen al şirului se exprimă în funcţie de unul sau mai mulţi termeni precedenţi. Pentru a determina bine elementele şirului trebuie precizaţi unul sau mai mulţi termeni.

Exemple. 1) $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_0 = -1$, $a_{n+1} = a_n + 3$, $n \geq 0$.

Observăm că această relaţie se poate scrie şi sub forma $a_{n+1} - a_n = 3$, $n \geq 0$, adică diferenţa a oricăror doi termeni consecutivi din şir este constantă.

2) $(b_n)_{n \geq 0}$, $b_0 = 2$, $b_{n+1} = 2b_n$, $n \geq 0$. În acest caz, câtul a oricăror doi termeni consecutivi ai şirului $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$ este constant.

Observaţie. Şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ cu $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = aa_n + b$, $n \geq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, constante, se spune că este definit printr-o **recurenţă liniară de ordinul întâi.**

3) $(c_n)_{n \geq 0}$, $c_0 = c_1 = 1$, $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$, $\forall n \geq 0$. Un termen al şirului începând cu al doilea este egal cu suma precedenţilor doi.

Determinarea oricărui termen se face din aproape în aproape:

$c_2 = c_1 + c_0 = 1 + 1 = 2$, $c_3 = c_2 + c_1 = 2 + 1 = 3$, $c_4 = c_3 + c_2 = 3 + 2 = 5$ etc.

Observaţie. Şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ cu $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n$, $n \geq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, constante, se spune că este definit printr-o **recurenţă liniară de ordinul doi.**

În cele ce urmează vom aborda două tipuri remarcabile de recurenţe liniare de ordinul întâi de forma $a_{n+1} = a_n + r$, $a_1 \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ şi $b_{n+1} = qb_n$, $b_1 \in \mathbb{R}^*$ (fixat), $n \geq 1$, r, q fiind constante reale.

Probleme practice care conduc la şiruri

1. Doi colegi, Emil şi Vasile, sunt angajaţi în aceeaşi zi la o firmă de calculatoare, Emil pe post de programator şi Vasile pe post de manager. Primul are un salariu de 300 €/lună cu o mărire a acestuia cu 50 €/an, iar al doilea are un salariu de 450 €/lună cu o mărire a acestuia cu 75 €/an. Dacă E_n şi V_n sunt salariile lor după n ani, atunci:
   a) determinaţi o formulă de recurenţă pentru E_n şi V_n;
   b) calculaţi E_1, E_2, E_3, V_1, V_2, V_3;
   c) determinaţi după câţi ani salariile lor se vor dubla.

2. În fiecare an un obiect, solicitat la vânzare, îşi creşte preţul anual cu 5%. Valoarea iniţială $V_0 = 20$€. Dacă V_n este valoarea obiectului după n ani, atunci:
   a) determinaţi o relaţie de recurenţă pentru V_n;
   b) determinaţi V_1, V_2, V_3;
   c) determinaţi o formulă pentru calculul lui V_n;
   d) determinaţi numărul de ani după care preţul depăşeste 30 €.

3. Un elev îşi depune la o bancă o sumă S_0. Dobânda anuală pe care o oferă banca este d%. Deci, după un an în contul elevului se va afla suma $S_0 + \frac{d}{100}S_0 = S_0(1 + 0,0d)$. Banca practică două tipuri de dobândă: 1) **dobânda simplă**, prin care la sfârşitul fiecărui an depunătorul îşi retrage dobânda, iar suma S_0 rămâne în cont pentru a genera dobândă; 2) **dobânda compusă** (cu capitalizare), prin care la sfârşitul fiecărui an dobânda se adaugă la suma din anul precedent, iar pentru anul în curs dobânda se calculează pentru toată această sumă. Dacă elevul optează pentru a doua variantă, atunci, notând cu S_n suma rezultată în contul său după n ani găsim: $S_1 = S_0 + S_0\frac{d}{100} = S_0(1 + 0,0d)$, $S_2 = S_1 + S_1\frac{d}{100} = S_1(1 + 0,0d) = (1 + 0,0d)^2 S_0$. Determinaţi:
a) o formulă de recurenţă pentru S_n; b) după câţi ani suma se va dubla?

Probleme rezolvate

1. **Stabiliţi care din numerele alăturate şirurilor definite prin termenul general, sunt termeni ai acestora.**

1) $x_n = 2n - 18$; 182; 191; 94; 2) $x_n = n^2 - 2n$; 34; 35; 63; 3) $x_n = \frac{n^2+3}{2n+5}$; $\frac{19}{13}$; $\frac{51}{19}$.

R. 1) Pentru a determina n astfel ca $x_n = 182$ se rezolvă ecuaţia în $\mathbb{N}^*$, $2n - 18 = 182 \Leftrightarrow 2n = 200 \Leftrightarrow n = 100$. Deci $x_{100} = 182$. Ecuaţia $x_n = 191$ nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$, deoarece $2n - 18 = 2(n-9)$ este număr par, iar 191 este impar. Din $x_n = 94 \Leftrightarrow 2n - 18 = 94 \Leftrightarrow n = 56$ rezultă $x_{56} = 94$.

2) Ecuaţia $n^2 - 2n = 34$ nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$, dar ecuaţia $n^2 - 2n = 35$ are soluţia $n = 7$, adică $x_7 = 35$; analog găsim $x_9 = 63$.

3) Ecuaţia $x_n = \frac{19}{13} \Leftrightarrow \frac{n^2+3}{2n+5} = \frac{19}{35}$ are soluţie în $\mathbb{N}^*$, $n = 4$; ecuaţia $x_n = \frac{51}{19}$ nu are soluţie în $\mathbb{N}^*$.

2. **Să se determine termenul general al şirurilor în cazurile:**

a) 1) $-1, 3, -9, 27, -54, \ldots$; 2) $2, -2, 2, -2, 2, -2, \ldots$; 3) $-2, 0, -2, 0, -2, 0, \ldots$;

4) $0,1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots$; 5) $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$;

b) 1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n$, $n \geq 1$; 2) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2^n$, $n \geq 1$;

3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n$, $n \geq 1$; 4) $x_1 = 1$, $x_m = x_{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$, $n \geq 2$.

R. a) 1) $a_n = (-3)a_{n-1}$, $n \geq 2$; 2) $a_n = (-1)^{n+1}2$, $n \geq 1$; 3) $a_n = -1 + (-1)^n$; 4) $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$, $n \geq 1$;

5) $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$, unde apare de n ori semnul radical; b) 1) Scriem relaţia de recurenţă $a_{k+1} = a_k + k$, pentru $k = \overline{1, n-1}$ şi adunăm aceste relaţii. Avem $a_n = a_1 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = 1 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2-n+2}{2}$. 2) Ca la 1) se adună relaţiile obţinute din relaţia de recurenţă $a_k = a_{k-1} + 2^{k+1}$ pentru $k = \overline{1, n}$ şi avem $a_n = 1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}$. Cum $1-x^n = (1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})$ deducem pentru $x = 2$, $2^n - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$, adică $a_n = 2^n - 1$; 3) Din relaţia de recurenţă avem $a_n = \frac{n}{n-1}a_{n-1}$, $a_{n-1} = \frac{n-1}{n-2}a_{n-2}$, $\ldots$, $a_3 = \frac{3}{2}a_2$, $a_2 = \frac{2}{1}a_1$, pe care le înmulţim, membru cu membru şi avem $a_n = na_1 = n$; 4) Scriem relaţia de recurenţă sub forma $x_k = x_{k-1} + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$ pentru $k = \overline{2, n}$ şi adunăm relaţiile astfel obţinute. Găsim $x_n = 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n}$.

3. **Să se determine o formulă de recurenţă pentru şirul cu termenii**
$\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \ldots$

R. Observăm că $a_1 = \sqrt{3}$, iar dacă a_n este termenul care conţine n radicali, atunci $a_n = \sqrt{3+a_{n-1}}$, $n \geq 2$.

4. **Pentru şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ considerăm $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Dacă $S_n = n^2$, $n \geq 1$, atunci să se determine a_n.**

R. Avem $S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = a_n$. În cazul nostru $a_n = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$.

Probleme propuse

1. **Stabiliţi care din numerele alăturate şirurilor definite prin termenul general, sunt termeni ai acestora.** 1) $x_n = 3n + 17$; 197; 201; 260; 2) $x_n = n - 2n^2$; -230; -841; -190; 3) $x_n = \frac{2n+3}{3n+5}$; $\frac{17}{26}$; $\frac{21}{32}$; 4) $x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$; $3\sqrt{2} - 4$; $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$.

2. **Care din numerele alăturate şirurilor definite recurent sunt termeni ai acestora.**
1) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{2}{3}$, $n \geq 1$; $\frac{13}{6}$; $\frac{15}{6}$; $\frac{19}{6}$; 2) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n\sqrt{2}$, $n \geq 1$; $128\sqrt{2}$; $130\sqrt{2}$.

3. **Să se determine termenul general al şirurilor în cazurile:**
a) 1) 2, 6, 18, 54, $\ldots$; 2) -5, 5, -5, 5, -5, 5, $\ldots$ 3) 2, 0, 2, 0, 2, 0,$\ldots$;
4) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$; 5) $\frac{2}{1\cdot 3}, \frac{4}{3\cdot 5}, \frac{6}{5\cdot 7}, \ldots$ 6) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, $\ldots$
b) 1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n + 1$, $n \geq 1$; 2) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2n$, $n \geq 1$;
3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n^2$; 4) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3^n$, $n \geq 1$; 5) $a_1 = 1$, $(n+1)a_{n+1} = na_n$, $n \geq 1$;
6) $a_1 = 1$, $a_n = a_{n+1} + \frac{n}{(n+1)!}$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ se citeşte n factorial;
7) $x_1 = 1$, $x_n = x_{n+1} + \frac{1}{(n+1)n(n-1)}$, $n \geq 2$.

4. **Să se determine o formulă de recurenţă pentru şirul cu termenii:**
$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$

5. **Se consideră şirul (f_n) definit prin $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n \geq 1$ (numit şirul lui Fibonacci). Arătaţi că $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ verifică relaţia de recurenţă.**

6. **Pentru şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, considerăm $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Dacă $S_n = n(n+1)$, $n \geq 1$, să se determine a_n.**

7. Să se determine termenul general al şirului (a_n) definit prin $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} + a_{n-1} = 2(1 + a_n)$, $n \geq 2$.

8. Să se arate că şirurile definite prin termenii generali $x_n = 2^n$, $y_n = 3^n$ verifică relaţia de recurenţă $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$.

9. Fie şirul (a_n) cu termenul general $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$. Să se determine şirul (b_n) cu proprietatea $b_n = a_{n+1} - a_n$ şi apoi să se calculeze suma $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Şiruri mărginite

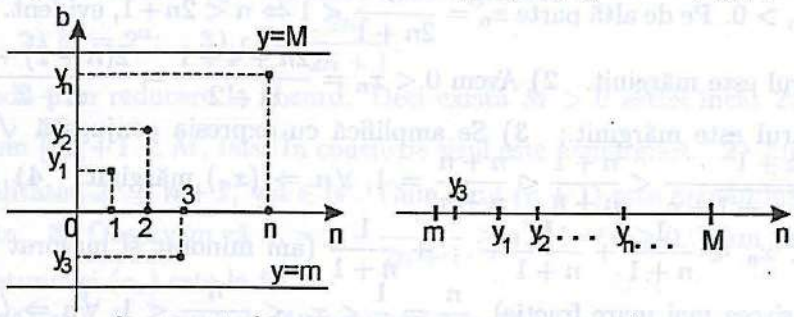
Definiţii. Şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se **numeşte mărginit** dacă există două numere reale m, M astfel încât $m \leq y_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Un şir care nu este mărginit se numeşte **nemărginit**.

Observaţie. Să reţinem că graficul unui şir mărginit $(y_n)_{n\geq 1}$ este format din puncte dispuse între două drepte paralele cu axa Ox, $y = m$, $y = M$.

Deoarece intervalul $[m, M]$ este inclus într-un interval centrat în zero de forma $[-a, a]$, $a > 0$, condiţia de mărginire se transcrie:

(a_n) este şir mărginit $\Leftrightarrow$ există $a > 0$ astfel încât $a_n \in [-a, a]$, $\forall n \Leftrightarrow |a_n| \leq a$.



în reper cartezian pe axa reală

Se poate lua $a = \max(|m|, |M|)$.

Dacă pentru şirul (a_n), există M astfel încât $a_n \leq M$, $\forall n$, atunci spunem că şirul este **mărginit superior**, iar M este un **majorant** al şirului. Orice $M' > M$ este majorant al şirului.

Dacă există m astfel încât $m \leq a_n$, $\forall n$, atunci şirul (a_n) este **mărginit inferior** (de m), iar m este un **minorant** pentru şir.

Orice $m' < m$ este minorant al şirului.

Un şir este **mărginit** $\Leftrightarrow$ şirul este mărginit atât **inferior** cât şi **superior**.

Exemple de şiruri mărginite

1) Şirul (a_n), $a_n = \dfrac{1}{3}$, $\forall n$ (şir constant) este mărginit deoarece $|a_n| \leq \dfrac{1}{3}$, $\forall n$.

2) (a_n), $a_n = (-1, n$ impar; 1, n par). Evident $a_n \in [-1, 1]$, $\forall n$ sau $|a_n| = 1 \leq 1$, $\forall n$ ceea ce arată că şirul este mărginit.

Exemple de şiruri nemărginite

1) Şirul numerelor naturale (n): 1, 2, 3, ..., n, ...

Dacă prin absurd acest şir ar fi mărginit, atunci există $M > 0$ astfel încât $|n| \leq M$, $\forall n$. Dacă luăm $n = [M] + 1 \in \mathbb{N}$ observăm că $n > M$, contradicţie. Deci şirul este nemărginit. Analog şirul $(-n)$ este

$= \left(\frac{\sqrt{1}}{1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right) = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} < 1$. În plus $x_n > 0$, $\forall n$. Deci (x_n) este mărginit. **10)** Avem $0 < x_n < \frac{4^n + 4^n}{4^n} = 2$, $\forall n \Rightarrow (x_n)$ este şir mărginit.

11) $0 < x_n = \frac{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} < 2$, $\forall n \Rightarrow (x_n)$ este mărginit. **12)** Cum $0 < 1 - \frac{1}{k^2} < 1$, $\forall k \geq 2$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \in (0,1)$, $\forall n \Rightarrow (x_n)$ este şir mărginit.

2. **Să se arate că următoarele şiruri definite recurent sunt mărginite:**

1) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{4 - x_n}{3 - x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; **2)** $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

R. 1) Vom calcula câţiva termeni ai şirului pentru a vedea poziţia lor pe axa reală. Avem $x_2 = \frac{4 - x_1}{3 - x_1} = \frac{3}{2} < 2$, $x_3 = \frac{4 - x_2}{3 - x_2} = \frac{5}{3} < 2$. Formulăm propoziţia $p(n)$: $1 \leq x_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţia prin inducţie matematică. Verificarea propoziţiei s-a făcut mai sus. Presupunem $x_n \in [1,2)$ şi să demonstrăm că $1 \leq x_{n+1} < 2 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{4 - x_n}{3 - x_n} < 2 \Leftrightarrow (3 - x_n \leq 4 - x_n$ şi $4 - x_n < 2(3 - x_n)) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (3 \leq 4$ şi $x_n < 2)$ evident. Deci $1 \leq x_n < 2$, $\forall n$, adică şirul (x_n) este mărginit. **2)** Se arată inductiv că $\sqrt{2} \leq a_n < 2$, $\forall n$.

3. **Să se arate că următoarele şiruri sunt nemărginite:**

1) $a_n = 2n + 1$; **2)** $b_n = 2^n$; **3)** $c_n = \frac{2n^2}{2n + 1}$.

R. 1) Vom proceda prin reducere la absurd. Deci există $M > 0$ astfel încât $2n + 1 \leq M$, $\forall, n$. Luăm $n = \frac{[M]}{2}$ şi obţinem $[M] + 1 < M$, fals. În concluzie şirul este nemărginit. **2)** Am demonstrat la inducţia matematică inegalitatea $2^n \geq n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum şirul $(n + 1)$ este nemărginit, deducem că şirul (b_n) are aceeaşi calitate. **3)** Observăm că $c_n = n - \frac{n}{2n + 1} \geq n - 1$, $\forall n \geq 0$. Cum şirul sumelor naturale (n) este nemărginit, atunci şi (c_n) este la fel.

Observaţie. Dacă (a_n), (b_n) sunt două şiruri astfel încât $0 < a_n \leq b_n$, $\forall n$ $(0 > a_n \geq b_n$, $\forall n)$ şi dacă (a_n) este nemărginit, atunci (b_n) este nemărginit.

Probleme propuse

1. **Să se arate că şirurile date prin termenul general sunt mărginite** $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1) $x_n = \frac{5n + 3}{n + 1}$; **2)** $x_n = \frac{(-1)^n n}{2n + 1}$; **3)** $x_n = (-1)^n + \frac{2n + 1}{n + 2}$; **4)** $x_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + (-1)^{n+1}}$;

5) $x_n = \sqrt{n(n+1)} - n$; **6)** $x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{3n}$; **7)** $x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$;

8) $x_n = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}$; **9)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3 + k^2}$; **10)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$; **11)** $x_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)}{n^2}$;

12) $x_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k(k+1)}\right]}{n^2}$, $[a]$ este partea întreagă a lui $a \in \mathbb{R}$; **13)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$;

14) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$; **15)** $x_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}$; **16)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$; **17)** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k! + (k+1)!}$;

18) $x_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$; 19) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}$; 20) $x_n = \frac{3^n+4^n}{5^n}$; 21) $x_n = \frac{3^n+1}{3^n-1}$;

22) $x_n = \frac{3^n}{n!}$; 23) $x_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{3^k}\right)$; 24) $x_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$; 25) $x_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$.

2. **Să se arate că următoarele şirure date prin termenul general sunt nemărginite** ($n \in \mathbb{N}^*$).

1) $x_n = -3n+1$; 2) $x_n = \frac{n^2}{n+2}$; 3) $x_n = \sqrt{n}$;

4) $x_n = 1+2+2^2+\ldots+2^n$; 5) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$; 6) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.

3. **Să se arate că şirurile definite prin relaţia de recurenţă sunt mărginite:**

1) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{5-x_n}{4-x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$; 2) $x_1 = \sqrt{3}$, $x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

3) $x_1 \in (2,3)$, $x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6$, $n \in \mathbb{N}^*$;

4. **Să se arate că şirurile definite prin relaţia de recurenţă sunt nemărginite:**

1) $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$; 2) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + x_n^2$.

5. a) **Să se arate că** $\frac{\sqrt{k}}{k(k+1)} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$;

b) **Arătaţi că şirul** (x_n) **cu** $x_n = \frac{\sqrt{1}}{1\cdot 2} + \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{n\cdot(n+1)}$ **este mărginit.**

Şiruri monotone

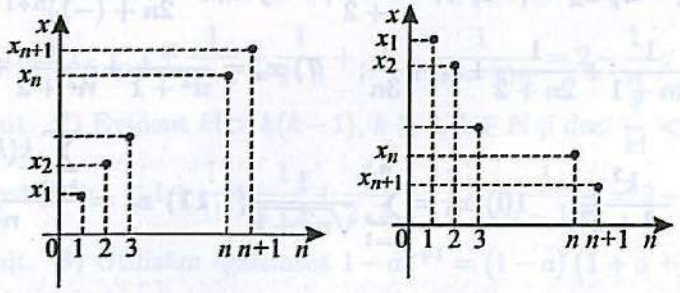
Definiţie. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **strict crescător (strict descrescător)** dacă $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ($x_n > x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

Observaţii. 1) Un şir (x_n) care este strict crescător sau strict descrescător se numeşte **şir strict monoton.**

2) Pentru a studia monotonia unui şir (x_n) se calculează diferenţa a doi termeni consecutivi $x_{n+1} - x_n$ şi se compară cu zero.

pe axa reală

în reperul xOy



şir strict crescător şir strict descrescător

Exemplu. Fie şirul (x_n) de mai sus, cu $x_n = \frac{n}{n+1}$. Pentru a preciza monotonia şirului (x_n) se calculează diferenţa $x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce arată că $x_{n+1} - x_n > 0$ sau $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, adică şirul este strict crescător.

3) Dacă termenii şirului sunt strict pozitivi, atunci monotonia şirului se poate studia comparând raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ cu 1.

Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1, \forall n$, adică $x_{n+1} > x_n, \forall n$, rezultă şir strict crescător.

Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \forall n$, atunci şirul este strict descrescător.

Pentru şirul de mai sus $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică (x_n) este strict crescător.

4) Dacă în una din inegalităţile din definiţie avem semnul „$\leq$", atunci pentru şirul (x_n) cu $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$ (sau $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots$) spunem că acesta este **crescător** (sau **descrescător**). Şirul crescător este mărginit inferior de x_1, deoarece $x_1 \leq x_n, \forall n$, iar şirul descrescător este mărginit superior de x_1, deoarece $x_n \leq x_1, \forall n$.

Un şir fie crescător, fie descrescător se numeşte **şir monoton.**

Probleme rezolvate

1. **Să se studieze monotonia şirurilor definite prin termenul general ($n \in \mathbb{N}^*$).**

1) $x_n = \frac{n}{2n+1}$; 2) $x_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$; 3) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$; 4) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

5) $x_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

R. 1) $x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0, \forall n$, ceea ce arată că $x_{n+1} > x_n, \forall n$, adică şirul (x_n) este strict crescător. Altfel, observăm că $x_n > 0$ şi avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+3)n} > 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (n+1)(2n+1) > (2n+3)n \Leftrightarrow 2 > 0, \forall n$, evident. Deci $x_{n+1} > x_n, \forall n$. 2) Cum $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $x_n = \frac{n+1}{2n} > 0$. De aici $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{2n}{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1 \Leftrightarrow n(n+2) < (n+1)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0 < 1, \forall n$. Deci (x_n) este strict descrescător. 3) Calculăm diferenţa a doi teremeni consecutivi şi avem: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$ $= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0, \forall n$, adică şirul (x_n) este strict crescător. 4) Evaluăm diferenţa $x_{n+1} - x_n$ şi obţinem $x_{n+1} - x_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$ $= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 0$, deoarece $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$ şi de aici $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} >$ $> \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$. Deci (x_n) este strict descrescător. 5) Avem $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ şi din $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$ rezultă şirul (x_n) este strict descrescător.

2. **Să se arate că şirurile date prin termenul general ($n \in \mathbb{N}^*$) nu sunt monotone.**

1) $x_n = (-1)^n 3$; 2) $x_n = n + (-1)^n$.

R. 1) Calculăm diferenţa a doi termeni consecutivi şi avem:
$x_{n+1} - x_n = (-1)^{n+1}3 - (-1)^n 3 = (-1)^{n+1}6 = (-6$, dacă n este par; 6 dacă n este impar). Aceasta arată că $x_{n+1} - x_n$ nu are semn constant pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deci şirul nu este monoton. Altfel, calculăm câţiva termeni ai şirului şi îi ordonăm. Avem $x_1 = -3 < x_2 = 3 > x_3 = -3 < x_4 = 3$. De aici deducem că şirul nu este monoton. 2) Analog, $x_{n+1} - x_n = (-1$, dacă n este par; 3 dacă n este impar). Deoarece diferenţa $x_{n+1} - x_n$ nu are semn constant pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deducem că şirul nu este monoton.

3. **Să se studieze monotonia şirului** (x_n), $x_n = \dfrac{\alpha+n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

R. Calculăm $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1-\alpha}{(n+1)(n+2)}$.

Dacă $\alpha < 1$, atunci $x_{n+1} - x_n > 0$, $\forall n$, ceea ce arată că (x_n) este strict crescător.

Dacă $\alpha = 1$, atunci $x_n = 1$, $\forall n$, adică (x_n) este şirul constant, care este moonoton.

Dacă $\alpha > 1$, atunci $x_{n+1} - x_n < 0$, $\forall n$, adică şirul (x_n) este strict descrescător.

4. **Studiaţi monotonia şirului dat prin relaţia de recurenţă.**

1) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$; 2) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

3) $x_1 = \alpha \in [1,2]$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $n \in \mathbb{N}^*$

R. 1) Este evident că $x_n > 0$, $\forall n$, iar din relaţia de recurenţă $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{x_n} > 0$, $\forall n$, ceea ce arată că şirul (x_n) este strict crescător. 2) De regulă, la şirurile recurente, pentru a le stabili monotonia se calculează câţiva termeni, care se ordonează, după care se formulează proprietatea, generală, care se demonstrează prin inducţie matematică. Aici $x_1 = \sqrt{2} < x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. Formulăm propoziţia: $p(n)$: $x_n < x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Etapa de verificare este imediată. Presupunem că $p(k)$: $x_k < x_{k+1}$ este adevărată şi să demonstrăm $p(k+1)$: $x_{k+1} < x_{k+2}$. Pentru a proba această inegalitate, exprimăm x_{k+1}, x_{k+2} din relaţia de recurenţă. Avem $x_{k+1} < x_{k+2} \Leftrightarrow \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+x_{k+1}} \Leftrightarrow 2+x_k < 2+x_{k+1} \Leftrightarrow x_k < x_{k+1}$, adevărată pentru că $p(k)$ este adevărată. Deci $p(n)$ este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce arată că şirul (x_n) este astrict crescător. 3) Dacă $x_2 - x_1 = \alpha^2 - 3\alpha + 2 = (\alpha-1)(\alpha-2)$ avem cazurile:

a) $\alpha = 1 \Rightarrow x_n = 1$, $\forall n$, şir constant, care este monoton;

b) $\alpha = 2 \Rightarrow x_n = 2$, $\forall n$, şir constant, care este monoton;

c) $\alpha \in (0,1)$. Atunci se arată inductiv că $x_n \in (1,2)$, $\forall n$, . Cu această observaţie avem $x_{n+1} - x_n = x_n^3 - 3x_n + 2 = (x_n - 1)(x_n - 2) < 0$, $\forall n$, ceea ce arată că şirul este descrescător.

Probleme propuse

1. **Să se studieze monotonia şirurilor definite prin termenul general** $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$; 2) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$; 3) $x_n = \dfrac{3n+2}{2n}$; 4) $x_n = \dfrac{2n-3}{3n}$; 5) $x_n = \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{2n^3+5n^2+2n}$;

6) $x_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$; 7) $x_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+3}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}$; 8) $x_n = \dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3}$;

9) $x_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}$; 10) $x_n = \sqrt{n^2+1}-n$; 11) $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$; 12) $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2k}$;

13) $x_n = \prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^2+k-2}{k(k+1)}$; 14) $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{4}{(2k-1)^2}\right)$; 15) $x_n = \dfrac{4\cdot 8\cdot\ldots\cdot(4n)}{5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)}$;

16) $x_n = \prod\limits_{k=2}^{n}\left[1-\dfrac{2}{k(k+1)}\right]$.

2. **Să se arate că următoarele şiruri, definite prin termenul general, nu sunt monotone.**

1) $x_n = 1+(-1)^n$; 2) $x_n = (-1)^{n+1}2$; 3) $x_n = (-5)^n$; 4) $x_n = (-1)^n n$.

3. **Studiaţi monotonia şirului dat de termenul său general, în funcţie de parametrul** $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $x_n = \dfrac{\alpha n+1}{2}$; 2) $x_n = \dfrac{\alpha n}{n+1}$; 3) $x_n = \dfrac{\alpha}{n+1}$; 4) $x_n = \dfrac{n+\alpha}{n+3}$.

4. **Să se determine monotonia şirului dat prin relaţia de recurenţă.**

1) $x_1 \in (0,1)$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$; 2) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1+x_n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$; 3) $x_1 = \sqrt{6}$, $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$,

$n \in \mathbb{N}^*$; 4) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{4 - x_n}{3 - x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$; 5) $(n+1)x_n = nx_{n+1}$, $x_1 > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$;

6) $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_{n+1} = \dfrac{1 - x_n}{x_n + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$; 7) $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{2\alpha x_n}{\alpha + x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

8) $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{\alpha}{x_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha > 0$; 9) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{6 - x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Progresia aritmetică

Şirul $1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$ reprezintă şirul numerelor naturale nenule şi are proprietatea că diferenţa a doi termeni consecutivi, începând cu al doilea, este egală cu unu ($2-1 = 3-2 = \ldots = n+1-n = \ldots = 1$). Altfel spus în acest şir fiecare termen (începând cu al doilea) se obţine din precedentul prin adăugarea unităţii ($2 = 1+1$, $3 = 2+1, \ldots, n+1 = n+1, \ldots$).

De asemenea şirurile:

$(2n)$: $2, 4, 6, \ldots, 2n, 2n+2, \ldots$ $(n \geq 1)$

$(2n+1)$: $1, 3, 5, \ldots, 2n+1, 2n+3, \ldots$ $(n \geq 0)$

au calitatea că diferenţa a doi termeni consecutivi, începând cu al doilea, este constantă egală cu doi ($4-2 = 6-4 = \ldots = 2n+2-2n = \ldots = 2$; $3-1 = 5-3 = \ldots = 2n+3-(2n+1) = \ldots = 2$).

De asemenea, şirul: $1, -1, -3, -5, \ldots, 1-2n, \ldots$ $(n \geq 0)$ are proprietatea că diferenţa oricăror doi termeni consecutivi, începând cu al doilea este aceeaşi egală cu (-2).

Astfel de şiruri le vom numi progresii aritmetice.

Mai precis are loc următoarea:

Definiţie. Şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ pentru care fiecare termen al său, începând cu al doilea, se obţine din precedentul prin adăugarea aceluiaşi număr r se numeşte **progresie aritmetică**.
Numărul r se numeşte **raţia progresiei**.

Deci $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică dacă avem relaţia de recurenţă

$$a_n = a_{n-1} + r,\ n \geq 2 \text{ şi } a_1 = a \in \mathbb{R}.$$

Aşadar **pentru a proba că şirul (a_n) este progresie aritmetică** trebuie arătat că diferenţa a doi termeni consecutivi a_{n-1}, a_n este constantă:

$$a_n - a_{n-1} = \text{constant},\ \forall n \geq 2$$

Să observăm că dacă se cunosc **primul termen** a_1 şi **raţia** r pentru progresia aritmetică, atunci aceasta este bine determinată, în sensul că se pot determina toţi termenii acesteia: $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$ etc.

Deci în rezolvarea problemelor cu progresii aritmetice acest fapt este foarte important deoarece se exprimă datele problemei în funcţie de a_1 şi r.

În concluzie:

orice problemă cu progresie aritmetică poate fi reformulată cu ajutorul lui a_1 şi r.

Notaţie. Faptul că şirul (a_n) este o progresie aritmetică se marchează prin: $\div a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sau $\div(a_n)$.

Se spune că numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **sunt în progresie aritmetică** dacă sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice, adică dacă $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1}$.

Problemă rezolvată

Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general $a_n = 7n - 12$, $n \geq 1$.

a) Să se stabilească dacă şirul dat este o progresie aritmetică şi apoi să se calculeze primii

cinci termeni.

b) **Stabiliţi care din numerele de mai jos este termen al şirului (a_n):**

13.988; 235; 688.

R. a) Pentru a preciza dacă şirul este progresie aritmetică calculăm diferenţa a doi termeni consecutivi oarecare a_n, a_{n-1} şi avem:

$a_n - a_{n-1} = 7n - 12 - [7(n-1) - 12] = 7 = \text{constant}, \forall n \geq 2.$

Cum această diferenţă este constantă, egală cu 7, ea reprezintă raţia progresiei aritmetice. Deci $r = 7$. Primul termen este $a_1 = -5$. Avem: $a_1 = -5$, $a_2 = 2$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, $a_5 = 23$.

b) Un număr A este termen al şirului (a_n) dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a_n = A$. A-l determina pe n înseamnă să rezolvăm ecuaţia $a_n = A$. Numărul natural n (dacă există) reprezintă rangul termenului din şir care este egal cu A.

Pentru $A = 13.988$ avem ecuaţia $7n - 12 = 13988$ cu soluţia $n = 2000$.

Deci numărul $A = 13988$ este termenul a_{2000}.

Pentru $A = 232$ se obţine ecuaţia $7n - 12 = 235$ cu soluţia $n = \dfrac{247}{7}$ care însă nu este număr natural. Deci nu există termen al şirului care să fie egal cu 235.

În fine, pentru $A = 688$, ecuaţia $7n - 12 = 688$ are soluţia $n = 100$.

Prin urmare numărul $A = 688$ este termen al şirului şi anume a_{100}.

Proprietăţile progresiei aritmetice

A1 (Monotonia). Progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir:

- **strict crescător**, dacă raţia $r > 0$;
- **strict descrescător**, dacă raţia $r < 0$.

Demonstraţie. Din $a_{n+1} - a_n = r$, $n \geq 1$ se deduce imediat proprietatea. ■

A2 (Formula termenului general). Dacă şirul (a_n) este o progresie aritmetică având primul termen a_1 şi raţia r, atunci termenul general a_n are forma: $a_n = a_1 + (n-1)r, \forall n \geq 1$.

Demonstraţie. Se face prin inducţie matematică. ■

Observaţie. Arătaţi că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică dacă şi numai dacă există $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a_n = a \cdot n + b$, $\forall n \geq 1$. Folosind acest rezultat arătaţi că dacă $\div(a_n)$, $\div(b_n)$, cu $a_{n_1} = b_{n_1}$, $a_{n_2} = b_{n_2}$, $n_1 \neq n_2$, atunci $a_n = b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Să observăm că termenul general l-am exprimat în funcţie de a_1 şi r, cele două elemente care definesc bine o progresie aritmetică.

Următoarea proprietate dă o caracterizare a progresiei aritmetice.

A3. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă orice termen al său, începând cu al doilea, este medie aritmetică a termenilor vecini lui, adică dacă $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall n \geq 2$.

Demonstraţie. Dacă şirul (a_n) este progresie aritmetică de raţie r, atunci $a_n = a_{n-1} + r$, $a_n = a_{n+1} - r$. Adunând aceste relaţii, membru cu membru, rezultă $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$.

Reciproc, din relaţia $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ scrisă sub forma $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ sau $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, $n \geq 2$, se deduce că diferenţa a doi termeni consecutivi ai şirului (a_n) este aceeaşi, ceea ce arată că şirul (a_n) este progresie aritmetică. ■

Observaţii. 1) Are loc relaţia ceva mai generală, $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, $1 \leq k < n$ care arată că un termen al progresiei, începând cu al doilea, este media aritmetică a oricăror doi termeni egal depărtaţi de el şi reciproc.

2) Cu această proprietate se poate scrie faptul **că numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică** (dacă sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice) **dacă şi numai dacă**: $2b = a + c$. (Altfel aceste numere se pot lua de forma: $b - r$, b, $b + r$).

Pentru ca **patru numere a, b, c, d să fie în progresie aritmetică** (dacă sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice) **avem condiţia echivalentă:**

$2b = a + c$, $2c = b + d$ (obţinută din egalităţile $b - a = c - b = d - c$).

Exemplu. Să se determine x, y, astfel încât numerele 2, x, y, 8 să fie în progresie aritmetică.

R. Cele patru numere sunt în progresie aritmetică dacă au loc simultan egalităţile: $2x = 2 + y$, $2y = x + 8$. Soluţia acestui sistem este $x = 4$, $y = 6$. Deci numerele în progresie aritmetică sunt: 2, 4, 6, 8.

Observaţie. Se pot lua cele patru numere în progresie aritmetică de forma 2, $x = 2 + r$, $y = 2 + 2r$, $8 = 2 + 3r$. Din ultima egalitate se obţine $r = 2$ şi deci $x = 4$, $y = 6$.

Uneori în aplicaţii este util a lua cele patru numere în progresie aritmetică de forma: $x_0 - 3r$, $x_0 - r$, $x_0 + r$, $x_0 + 3r$, când raţia este $2r$.

Cinci numere reale a, b, c, d, e sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă $2b = a + c$, $2c = b + d$, $2d = c + e$. Este convenabil să alegem cele cinci numere: $c - 2r$, $c - r$, c, $c + r$, $c + 2r$.

Probleme rezolvate

1. **Progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ de raţie r este definită prin anumite elemente date. Determinaţi, în fiecare din cazuri, elementul cerut. a) $a_1 = 3$, $r = 2$. Calculaţi a_{15};** b) $a_{20} = 55$, $r = 3$. **Calculaţi a_1;** c) $a_1 = -2$, $a_{25} = 22$. **Calculaţi r;** d) $a_1 = 3$, $a_3 = 7$. **Calculaţi a_{10};** e) $a_4 = 10$, $a_7 = 19$. **Calculaţi a_1, r;** f) $a_1 + a_7 = 42$, $a_{10} - a_3 = 21$. **Calculaţi a_1, r.**

R. a) Formula termenului general este: $a_n = a_1 + (n-1)r$. Pentru $n = 15$ avem: $a_{15} = a_1 + 14r = 3 + 14 \cdot 2 = 31$.

b) Din $a_{20} = a_1 + 19r = 55$ deducem $a_1 = 55 - 19r = 55 - 57 = -2$.

c) Din $a_{25} = a_1 + 24r = 22$ se obţine $24r = 24$ şi deci $r = 1$.

d) Avem: $a_3 = a_1 + 2r = 7$, iar de aici $r = 2$. Acum $a_{10} = a_1 + 9r = 3 + 9 \cdot 2 = 21$.

e) Avem sistemul: $\begin{cases} a_4 = a_1 + 3r = 10 \\ a_7 = a_1 + 6r = 19 \end{cases}$ cu soluţia $a_1 = 1$, $r = 3$.

f) Se scriu cele două relaţii în funcţie de a_1 şi r şi avem sistemul:

$\begin{cases} a_1 + (a_1 + 6r) = 42 \\ a_1 + 9r - (a_1 + 2r) = 21 \end{cases}$ cu soluţia $a_1 = 12$, $r = 3$.

2. **Să se arate că dacă numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele $A_1 = a^2 - bc$, $A_2 = b^2 - ca$, $A_3 = c^2 - ab$ sunt, de asemenea, în progresie aritmetică.**

R. Faptul că a, b, c sunt în progresie aritmetică îl exprimăm prin $2b = a + c$. A afirma că numerele A_1, A_2, A_3 sunt în progresie aritmetică revine la a arăta că $2A_2 = A_1 + A_3$ sau $2b^2 - 2ac = (a^2 - bc) + (c^2 - ab)$ sau $b(2b + a + c) = (a + c)^2$ sau $2b(a + c) = (a + c)^2$, evident dacă ţinem seama de condiţia $2b = a + c$.

3. **Dacă numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt în progresie aritmetică, să se calculeze sumele:**

$$S_1 = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}, \quad S_2 = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}}, \; n \geq 3$$

în funcţie de a_1, r şi n.

R. Ideea este de a scrie un termen oarecare al fiecărei sume ca diferenţă de doi termeni de acelaşi tip.

Pentru prima sumă avem: $\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)$, $k\geq 2$, ceea ce uşor se poate constata. Atunci $S_1=$

$=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{r}\frac{(n-1)r}{a_1[a_1+(n-1)r]}=\frac{n-1}{a_1[a_1+(n-1)r]}$.

Pentru a doua sumă, termenul general este (se raţionalizează): $\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}+\sqrt{a_k}}=\frac{1}{r}(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}})$, $k\geq 2$.

Deci:

$$S_2=\frac{1}{r}\left(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}\right)=\frac{1}{r}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}\right)=\frac{1}{r}(\sqrt{a_1+(n-1)r}-\sqrt{a_1}).$$

A4. Dacă numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sunt în progresie aritmetică, atunci:

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\ldots=a_k+a_{n-k+1},\ \forall k=\overline{1,n}$$

Suma oricăror două numere egal depărtate de numerele extreme (a_k+a_{n-k+1}) este egală cu suma numerelor extreme (a_1+a_n).

Demonstraţie. Se scriu toţi termenii în funcţie de primul termen a_1 şi raţia r.

Avem: $a_k+a_{n-k+1}=a_1+(k-1)r+a_1+(n-k)r=2a_1+(n-1)r$ şi

$a_1+a_n=a_1+a_1+(n-1)r=2a_1+(n-1)r$,

ceea ce probează afirmaţia. ■

A5 (Suma primilor n termeni). Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică, atunci:

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n,\ n\geq 1.$$

Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu produsul dintre semisuma termenilor extremi şi numărul termenilor sumei.

Demonstraţie. Scriem de două ori suma S_n,

$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$

$S_n=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1$

şi prin adunare avem:

$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_n+a_1)$.

Ţinând seama de A4, fiecare paranteză din dreapta este egală cu a_1+a_n.

Deci $2S_n=n(a_1+a_n)$, adică $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$. ■

Observaţii. **1)** Suma S_n se poate exprima în funcţie de primul termen a_1 şi raţia r astfel:

$$S_n=\frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2}.$$

2) Să observăm că termenul general a_n se poate exprima cu ajutorul sumelor S_n. Mai precis

$$a_n=S_n-S_{n-1},\ \forall n\geq 2$$

Într-adevăr din $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$ şi $S_{n-1}=a_1+\ldots+a_{n-1}$ prin scădere rezultă relaţia dorită.

3) Arătaţi că $\div(a_n)\Leftrightarrow$ există $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $S_n=an^2+bn$, $\forall n\geq 1$.

Probleme rezolvate

1. **Progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ de raţie r este definită prin anumite elemente date. Determinaţi, în fiecare din cazuri, elementele cerute.**

a) $a_1=-3$, $r=3$. **Calculaţi** a_{10} **şi** S_{10}. **b)** $a_1=116$, $a_8=137$. **Calculaţi** r **şi** S_8.

c) $a_1=12$, $a_n=-44$, $S_n=-240$. **Calculaţi** r **şi** n. **d)** $a_{36}=2$, $S_{36}=324$. **Calculaţi** a_1 **şi** r.

e) $a_1 = 17$, $r = 6$, $S_n = 369$. **Calculaţi** n **şi** a_n. f) $a_n = 290$, $S_n = 3900$, $r = 10$. **Calculaţi** a_1 **şi** n.
g) $a_1 + a_8 + a_{12} + a_{19} = 224$. **Calculaţi** S_{19}. h) $S_m = S_n$, $m \neq n$. **Calculaţi** S_{m+n}.

R. a) Avem: $a_{10} = a_1 + 9r = -3 + 9 \cdot 3 = 24$ şi $S_{10} = \dfrac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \dfrac{210}{2} = 105$.

b) Din $a_8 = a_1 + 7r = 137$, deducem $r = 3$. Pentru S_8 avem: $S_8 = \dfrac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = 1012$.

c) Din $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = -240$ rezultă $n = 15$, iar din $a_{15} = a_1 + 14r = -44$ se obţine $r = -4$.

d) Avem sistemul (se scriu elementele în funcţie de primul termen a_1 şi raţia r):

$$\begin{cases} a_1 + 35r = 2 \\ \dfrac{(2a_1 + 35r)36}{2} = 324 \end{cases}$$ cu soluţia $a_1 = 16$, $r = -\dfrac{2}{5}$.

e) Din $S_n = \dfrac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} = 369$ rezultă ecuaţia $3n^2 + 14n - 369 = 0$ cu soluţia $n = 9$. Acum $a_9 = a_1 + 8r = 65$.

f) Avem sistemul: $\begin{cases} a_1 + (n-1)r = 290 \\ \dfrac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} = 3900 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a_1 + 10(n-1) = 290 \\ \dfrac{(a_1 + 290)n}{2} = 3900 \end{cases}$ cu soluţiile

$(n_1 = 39,\ a_1 = -90)$, $(n_2 = 20,\ a_1 = 100)$.

g) Avem: $S_{19} = \dfrac{a_1 + a_{19}}{2} \cdot 19$. Cum $a_1 + a_{19} = a_8 + a_{12}$, ipoteza dă $2(a_1 + a_{19}) = 224$, adică $a_1 + a_{19} = 112$. Acum $S_{19} = \dfrac{112 \cdot 9}{2} = 1064$.

h) Din $S_m = S_n$ se deduce $\dfrac{2a_1 + (m-1)r}{2} \cdot m = \dfrac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$, iar de aici ($m \neq n$) după unele calcule $2a_1 + (m+n-1)r = 0$. Acum $S_{m+n} = \dfrac{2a_1 + (m+n-1)r}{2}(m+n) = 0$.

2. **Determinaţi termenul general al şirului** $(x_n)_{n \geq 0}$ **definit prin relaţia de recurenţă** $x_{n+1} = x_n + n$, $n \geq 1$ **dacă** $x_1 = 0$ **şi stabiliţi dacă şirul este monoton.**

R. Din relaţia de definire a şirului rezultă $x_{n+1} - x_n = n > 0$, adică $x_{n+1} > x_n$, ceea ce arată că şirul este strict crescător. Pentru a determina expresia termenului general x_n, vom scrie relaţia de recurenţă pentru $n-1, n-2, \ldots, 2, 1$, când avem:

$x_n = x_{n-1} + n - 1$
$x_{n-1} = x_{n-2} + n - 2$
.....
$x_3 = x_2 + 2$
$x_2 = x_1 + 1$.

Adunate, membru cu membru, aceste relaţii dau

$x_n = x_1 + 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1)$.

Suma $1 + 2 + \ldots + (n-1)$ reprezintă suma a $(n-1)$ termeni în progresie aritmetică de raţie 1 şi primul termen egal cu 1. Găsim că valoarea ei este $\dfrac{1 + (n-1)}{2} \cdot (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Deci $x_n = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

3. **Dacă** $S_n = 4n^2 - 3n$ **reprezintă suma primilor** n **termeni ai şirului** $(a_n)_{n \geq 1}$ **atunci: a) să se determine** a_n; **b) să se arate că şirul** (a_n) **este o progresie aritmetică.**

R. a) Din relaţia $a_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 2$ rezultă:

$a_n = 4n^2 - 3n - [4(n-1)^2 - 3(n-1)] = 8n - 7$, $a_1 = S_1 = 1$.

b) Calculăm diferenţa a doi termeni consecutivi $a_{n+1} - a_n = 8(n+1) - 7 - (8n - 7) = 8$, $n \geq 1$ şi, constatăm că $r = 8$ reprezintă raţia progresiei în care $a_1 = 1$.

Observaţie. S-ar fi putut calcula a_1 şi r din $S_1 = a_1 = 1$, $S_2 = a_1 + a_2 = 10$. De aici $a_2 = 9$ şi deci

$r = 8$. Se verifică uşor că pentru $a_1 = 1$ şi $r = 8$ suma $S_n = 4n^2 - 3n$ reprezintă suma primilor n termeni ai acestei progresii aritmetice.

4. **Să se rezolve ecuaţia:** $2 + 5 + 8 + \ldots + x = 155$.

R. Să observăm că termenii sumei sunt în progresie aritmetică de raţie $r = 3$ $(5 - 2 = 8 - 5 = \ldots = 3)$. Notăm $x = a_n$. Atunci suma din stânga egalităţii devine: $\dfrac{[2 \cdot 2 + (n-1)3]n}{2} = 155$. Rezolvând această ecuaţie găsim $n = 10$ şi deci $x = a_{10} = 2 + 9 \cdot 3 = 29$.

5. **Unghiurile interioare succesive ale unui poligon formează o progresie aritmetică, având primul termen $120°$ şi raţia $5°$. Câte laturi are poligonul ?**

R. Notând cu n numărul de laturi avem: $a_n = 120° + 5°(n-1)$ şi reprezintă măsura celui de-al n-lea unghi. Suma unghiurilor poligonului este $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, (1). Pe de altă parte $S_n = 180°(n-2)$, (2). Egalând (1) cu (2) rezultă ecuaţia $n^2 - 25n + 144 = 0$ cu soluţia corectă $n = 9$.

Progresia geometrică

Să analizăm şirurile de numere:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27, \ldots \quad (1)$$
$$2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}, \ldots \quad (2)$$
$$-2, -6, -18, \ldots \quad (3)$$
$$-3,\ 6, -12,\ 24, \ldots \quad (4).$$

Pentru şirul (1) observăm că fiecare termen, **începând cu al doilea**, se obţine din precedentul înmulţit cu 3. De asemenea vedem că termenii sunt dispuşi în ordine crescătoare: $1 < 3 < 9 < 27 < \ldots$.

Pentru şirul (2) funcţionează o regulă asemănătoare: orice termen, **începând cu al doilea**, este egal cu precedentul înmulţit cu numărul $\dfrac{1}{2}$. Termenii sunt aranjaţi, în acest caz, în ordine descrescătoare: $2 > 1 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4} > \ldots$.

Cel de-al treilea şir (3) are termenii structuraţi după o regulă asemănătoare celorlalte şiruri de mai sus: orice termen, **începând cu al doilea**, se obţine din precedentul înmulţit cu 3.

Termenii şirului sunt dispuşi descrescător: $-2 > -6 > -18 > \ldots$.

În fine, pentru şirul (4), orice termen, **începând cu al doilea**, se obţine din precedentul înmulţit cu (-2). Termenii alternează în sensul că, unul este negativ, următorul este pozitiv. Regula constatată mai sus se poate reformula astfel: **câtul a doi termeni consecutivi, începând cu al doilea, este constant** (pentru şirul (1) acest raport este 3, pentru (2) este $\dfrac{1}{2}$, pentru (3) este 3, iar pentru (4) este (-2)).

Sirurile cu această proprietate se numesc progresii geometrice.

Mai precis, avem următoarea:

Definiţie. Şirul $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $b_1 \neq 0$ (primul termen) pentru care fiecare termen al său, începând cu al doilea, se obţine din precedentul prin înmulţirea cu acelaşi număr $q \neq 0$ se numeşte **progresie geometrică**. Numărul q se numeşte **raţia** progresiei.

Deci $(b_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică dacă avem relaţia de recurenţă:

$$b_n = b_{n-1} \cdot q,\ n \geq 2 \text{ şi } b_1 = b \in \mathbb{R}.$$

Aşadar pentru a proba că şirul (b_n) este o progresie geometrică trebuie arătat că raportul a doi termeni consecutivi b_{n-1}, b_n este constant:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \text{constant},\ \forall n \geq 2$$

Ca şi în cazul progresiei aritmetice, **primul termen** b_1 şi **raţia** q determină bine progresia geometrică în sensul că se pot determina toţi termenii acesteia: $b_2 = b_1 \cdot q$, $b_3 = b_2 \cdot q = b_1 q^2$, etc.

În concluzie: **orice problemă cu progresie geometrică poate fi reformulată cu ajutorul lui** b_1 **şi** q.

Notaţie. Faptul că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$, este o progresie geometrică se marchează uneori prin: $\div\div\ b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$. Se spune că numerele $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ **sunt în progresie geometrică** dacă sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice, adică dacă $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b_3}{b_2} = \ldots = \dfrac{b_n}{b_{n-1}}$.

Problemă rezolvată

Fie şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ **cu termenul general** $b_n = 3 \cdot 2^n$, $n \geq 1$.

a) Să se stabilească dacă şirul dat este o progresie geometrică, calculând apoi primii cinci termeni.

b) Stabiliţi care din numerele următoare este termen al progresiei: 24; 96; 123.

R. a) Pentru a vedea dacă şirul este o progresie geometrică se calculează raportul a doi termeni consecutivi: $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = 2$, $\forall n \geq 1$. Cum acest raport este constant (nu depinde de rangul n) deducem că şirul este o progresie geometrică de raţie $q = 2$ având primul termen $b_1 = 6$. Avem $b_2 = 12$, $b_3 = 24$, $b_4 = 48$, $b_5 = 96$.

b) A stabili dacă un număr B este un termen al şirului revine la a determina rangul $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $b_n = B$. Pentru $B = 24$, din $3 \cdot 2^n = 24$ rezultă $2^n = 8$, adică $n = 3$. Aşadar $b_3 = 24$. Dacă $B = 96$, atunci din $3 \cdot 2^n = 96$ rezultă $2^n = 32$, adică $n = 5$. Deci $b_5 = 96$. În fine, pentru $B = 123$ din $3 \cdot 2^n = 123$ rezultă $2^n = 41$. Cum această ecuaţie nu are soluţie în $\mathbb{N}^*$ deducem că 123 nu este termen al şirului.

Proprietăţile progresiei geometrice

G1 (Monotonia). Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică de raţie q.

Dacă:
- $b_1 > 0$ şi $q > 1$, atunci (b_n) este **strict crescător:** $b_1 < b_2 < \ldots < b_n < b_{n+1} < \ldots$;
- $b_1 > 0$ şi $q \in (0,1)$, atunci (b_n) este **strict descrescător:** $b_1 > b_2 > \ldots > b_n > b_{n+1} > \ldots$;
- $b_1 < 0$ şi $q > 1$, atunci (b_n) este **strict descrescător;**
- $b_1 < 0$ şi $q \in (0,1)$, atunci (b_n) este **strict crescător.**

Demonstraţie.

Din $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $n \geq 1$ şi informaţiile despre b_1 şi q conduc la concluziile din proprietate. ■

G2 (Formula termenului general). Dacă şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică de raţie q, atunci termenul general b_n, are forma $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \geq 1$

Demonstraţie. Se procedează prin inducţie matematică. ■

Observaţie. Arătaţi că $\div\div\ b_n \Leftrightarrow$ există $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq 1$, astfel încât $b_n = ba^n$, $\forall n \geq 1$.

Folosind acest rezultat arătaţi că dacă avem $\div\div (b_n)$, $\div\div (c_n)$ cu $b_{n_1} = c_{n_1}$, $b_{n_2} = c_{n_2}$, $n_1 - n_2$ impar, atunci $b_n = c_n$, $\forall n \geq 1$.

Trebuie observat că în această formulă un termen oarecare al progresiei se exprimă în funcţie de primul termen b_1 şi de raţia q, cele două elemente care definesc în întregime o progresie geometrică.

Următoarea proprietate dă o caracterizare a progresiei geometrice cu **termeni nenuli.**

G3. Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ cu **termeni nenuli** este o progresie geometrică dacă şi numai dacă pentru orice termen al său, începând cu al doilea avem: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \forall n \geq 2$.

Demonstraţie. Presupunem că şirul (b_n) este o progresie geometrică de raţie q şi deci $b_n = b_{n-1} \cdot q$, $b_n = \frac{b_{n+1}}{q}$. De aici (se face produsul relaţiilor) $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$.

Reciproc, din $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$ rezultă $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $\forall n \geq 2$.

Această ultimă egalitate afirmă că raportul oricăror doi termeni consecutivi, începând cu al doilea, este constant. Deci şirul (b_n) este o progresie geometrică. ■

Observaţii. 1) Are loc relaţia mai generală $b_n^2 = b_{n-k}b_{n+k}$, $1 \leq k < n$.

2) Faptul că trei numere nenule a, b, c sunt în progresie geometrică este echivalent cu relaţia $b^2 = ac$. Altfel aceste numere se pot lua de forma $\frac{b}{q}$, b, bq.

Pentru ca patru numere nenule a, b, c, d să fie în progresie geometrică trebuie să avem condiţia echivalentă dată de relaţiile $b^2 = ac$, $c^2 = bd$ (obţinute din egalităţile $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$). În unele aplicaţii este convenabil să luăm cele patru numere de forma $\frac{x_0}{q^3}$, $\frac{x_0}{q}$, x_0q, x_0q^3 (în progresie de raţie q^2).

Cinci numere reale a, b, c, d, e sunt în progresie geometrică dacă şi numai dacă $b^2 = ac$, $c^2 = bd$, $d^2 = ce$. În unele aplicaţii este convenabil să alegem numerele sub forma $\frac{c}{q^2}$, $\frac{c}{q}$, c, cq, cq^2.

Exemplu. Să se determine numerele x, y, z astfel încât numerele $x, 6, y, 54, z$, să fie în progresie geometrică.

R. Dacă numerele sunt în progresie geometrică avem egalităţile (ecuaţiile) $36 = xy$, $y^2 = 324$, $54^2 = yz$. Din a doua ecuaţie $y = \pm 18$. Dacă $y = -18$, atunci $q = -3$, $x = -2$, $z = -162$. Dacă $y = 18$, atunci $q = 3$ şi $x = 2$, $z = 162$. Deci avem două progresii: $-2, 6, -18, 54, -162$ şi $2, 6, 18, 54, 162$.

Altfel. Fie q raţia progresiei. Avem $6 = xq$, $y = 6q$, $54 = yq$, $z = 54q$. Din ecuaţiile a doua şi a treia rezultă $54 = 6q^2$, iar de aici $q = \pm 3$ etc.

Probleme rezolvate

1. **Progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ de raţie q este definită prin anumite elemente date. Determinaţi, în fiecare din cazuri, elementele cerute.**

a) $b_1 = \frac{1}{4}$, $q = 4$. **Calculaţi** b_{10}. **b)** $b_{30} = \left(\frac{1}{2}\right)^{28}$, $q = -\frac{1}{2}$. **Calculaţi** b_1.

c) $b_1 = 3$, $b_9 = \frac{1}{3^7}$. **Calculaţi** $q > 0$. **d)** $b_1 = -2$, $b_3 = -\frac{1}{2}$. **Calculaţi** b_7.

e) $b_4 = -54$, $b_7 = 1458$. **Calculaţi** b_1, q. **f)** $b_5 - b_1 = 80$, $b_4 - b_2 = 24$. **Calculaţi** b_1, q.

R. a) Formula care dă termenul de rang n este $b_n = b_1q^{n-1}$. Pentru $n = 10$ avem $b_{10} = b_1 \cdot q^9 = \frac{1}{4} \cdot 4^9 = 4^8$.

b) Din $b_{30} = b_1 \cdot q^{29}$ rezultă $\left(\frac{1}{2}\right)^{28} = b_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{29}$. De aici $b_1 = -2$.

c) Avem $b_9 = b_1 \cdot q^8$ sau $\frac{1}{3^7} = 3 \cdot q^8$. De aici $q = \frac{1}{3}$.

d) Din $b_3 = b_1q^2$ rezultă $q = \pm\frac{1}{2}$, iar din $b_7 = b_1q^6$ se deduce $b_7 = -\frac{1}{2^5}$.

e) Avem egalităţile: $b_4 = b_1 \cdot q^3$, $b_7 = b_1 \cdot q^6$ sau $-54 = b_1q^3$, $1458 = b_1q^6$. Din ultimele două egalităţi, prin împărţire, membru cu membru, rezultă $q^3 = -27$ şi deci $q = -3$. Acum din $-54 = b_1q^3$ rezultă $b_1 = 2$.

f) Avem de rezolvat sistemul (în b_1 şi q): $\begin{cases} b_1q^4 - b_1 = 80 \\ b_1q^3 - b_1q = 24 \end{cases}$ sau $\begin{cases} b_1(q^4-1) = 80 \\ b_1q(q^2-1) = 24. \end{cases}$

Împărţind ecuaţiile, membru cu membru, rezultă $\frac{q^2+1}{q} = \frac{10}{3}$, iar de aici $q_1 = 3$, $q_2 = \frac{1}{3}$. Dacă $q = 3$, atunci $b_1 = 1$, iar pentru $q = \frac{1}{3}$ se obţine $b_1 = -81$.

2. **Dacă a, b, c sunt în progresie geometrică, atunci să se probeze egalitatea** $(a+c)(b^3+c^3) = (b^2+c^2)(ab+c^2)$.

R. Efectuând calculele se ajunge la: $ac^3 + cb^3 - b^2c^2 - abc^2 = 0$. Cum $b^2 = ac$, relaţia de mai sus devine $ac^3 + cb(ac) - ac^3 - abc^2 = 0$, evident. Altfel se pot lua numerele sub forma a, aq, aq^2 şi se înlocuiesc în relaţia de demonstrat, constatându-se validitatea ei.

3. **Dacă şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt progresii geometrice, atunci şirurile: $(c_n)_{n\geq 1}$, $(d_n)_{n\geq 1}$ definite prin $c_n = a_nb_n$, $d_n = \alpha a_n$, $\alpha \neq 0$ sunt progresii geometrice.**

R. Presupunem că progresia (a_n) are raţia q_1, iar progresia (b_n) are raţia q_2. Şirul (c_n) este progresie geometrică dacă raportul $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ nu depinde de n. Avem: $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+1}\cdot b_{n+1}}{a_n \cdot b_n} = q_1 \cdot q_2 = \text{constant}$, $\forall n \geq 1$. Aşadar şirul produs $(c_n)_{n\geq 1}$ a două progresii geometrice este tot o progresie geometrică de raţie produsul raţiilor celor două progresii.

Procedând analog pentru (d_n) avem: $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\alpha a_{n+1}}{\alpha a_n} = q_1 = \text{constant}$, ceea ce arată că şirul (d_n) este o progresie geometrică, de aceeaşi raţie cu şirul (a_n).

4. **Fie şirul (u_n) definit prin $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n+8}{5}$, $n \geq 0$. Arătaţi că (u_n) nu este o progresie geometrică. Considerăm şirul $(v_n)_{n\geq 0}$ definit prin $v_n = u_n - 2$, $n \geq 0$. Probaţi că şirul (v_n) este o progresie geometrică.**

R. N-avem decât să calculăm termenii u_1, u_2 pentru care $\frac{u_1}{u_0} = \frac{9}{5}$, $\frac{u_2}{u_1} = \frac{49}{25}\cdot\frac{5}{9} = \frac{49}{45}$, şi să observăm că raportul a doi termeni consecutivi, începând cu al doilea (aici u_1) nu este constant. Deci şirul (u_n) nu este progresie geometrică.

Pentru şirul (v_n) avem: $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{u_n+8}{5} - 2 = \frac{u_n-2}{5}$. Acum raportul a doi termeni consecutivi ai şirului (v_n) este: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_n-2}{5(u_n-2)} = \frac{1}{5}$, $\forall n \geq 0$, deci constant $\left(\frac{1}{5}\right)$, ceea ce arată că şirul (v_n) este o progresie geometrică.

G4. Dacă numerele $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ sunt în progresie geometrică, atunci:
$$b_1b_n = b_2b_{n-1} = \ldots = b_kb_{n-k+1},\ \forall k = \overline{1,n}$$

Produsul oricăror două numere egal depărtate de numerele extreme (b_kb_{n-k+1}) este egal cu produsul numerelor extreme (b_1b_n).

Demonstraţie. Scriem termenii în funcţie de primul termen b_1 şi raţia q. Avem:
$b_kb_{n-k+1} = (b_1q^{k-1})(b_1q^{n-k}) = b_1^2q^{n-1}$ şi $b_1b_n = b_1(b_1q^{n-1}) = b_1^2q^{n-1}$, ceea ce probează afirmaţia. ■

G5 (Suma primilor n termeni). Dacă $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică de raţie q, atunci
$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \begin{cases} b_1\dfrac{q^n-1}{q-1}, & \text{dacă } q \neq 1 \\ nb_1, & \text{dacă } q = 1. \end{cases}$$

Demonstraţie. Dacă $q = 1$, atunci $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$ şi deci $S_n = nb_1$. Fie acum $q \neq 1$. Considerăm $qS_n = b_1q + b_2q + \ldots + b_nq = b_2 + b_3 + \ldots + b_{n+1}$. Din această relaţie se scade $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ şi rezultă $S_n(q-1) = b_{n+1} - b_1$. Cum $q \neq 1$ de aici rezultă $S_n = \dfrac{b_{n+1} - b_1}{q-1} = \dfrac{b_1q^n - b_1}{q-1} = b_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$. ■

Probleme rezolvate

1. Progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ de raţie q este definită prin anumite elemente date. Determinaţi în fiecare din cazuri, elementele cerute.

a) $q = 4$, $n = 8$, $b_8 = 49152$. **Calculaţi** b_1 şi S_8; b) $q = 2$, $n = 9$, $S_9 = 1533$. **Calculaţi** b_1 şi b_9;

c) $b_1 = 1$, $b_n = -512$, $S_n = -341$. **Calculaţi** n;

d) $b_6 - b_4 = 216$, $b_3 - b_1 = 8$, $S_n = 40$. **Calculaţi** b_1, q, n;

e) $S_2 = 3$, $S_3 = 7$. **Calculaţi** S_4; f) $b_4 = 8$, $\dfrac{S_2}{S_4} = \dfrac{1}{5}$. Calculaţi b_1, q;

g) $b_{10} = 3\sqrt{3}b_7$, $S_3 = 4 + \sqrt{3}$. Calculaţi S_9; h) $S_{10} = 33 \cdot S_5$. Calculaţi $\dfrac{S_{12}}{S_6}$.

R. a) Din $b_8 = b_1 \cdot q^7$ rezultă $4^7 \cdot 3 = b_1 \cdot 4^7$, ceea ce dă $b_1 = 3$. Acum $S_8 = b_1\dfrac{q^8-1}{q-1} = 3\dfrac{4^8-1}{3} = 4^8 - 1$.

b) Din $S_9 = b_1\dfrac{q^9-1}{q-1}$ rezultă $1533 = b_1(2^9 - 1)$, iar de aici $b_1 = 3$. Acum cunoscând $b_1 = 3$ şi $q = 2$ avem $b_9 = b_1 \cdot q^8 = 3 \cdot 2^8$.

c) Din $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ deducem $q^{n-1} = -512$ sau $q^{n-1} = (-2)^9$. Din $S_n = b_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$ avem $q^n - 1 = -341(q-1)$ sau ţinând seamă de $q^{n-1} = (-2)^9$ mai putem scrie $(-2)^9 \cdot q - 1 = -341(q-1)$. De aici $q = -2$ şi din penultima egalitate $n - 1 = 9$, adică $n = 10$.

d) Rescriem relaţiile în funcţie de primul termen şi de raţie. Avem sistemul $\begin{cases} b_1q^5 - b_1q^3 = 216 \\ b_1q^2 - b_1 = 8 \\ b_1\dfrac{q^n-1}{q-1} = 40. \end{cases}$

Sistemul format cu primele două ecuaţii devine: $\begin{cases} b_1q^3(q^2-1) = 216 \\ b_1(q^2-1) = 8. \end{cases}$ Împărţind, membru cu membru, cele două ecuaţii găsim $q^3 = 27$, adică $q = 3$. Din a doua ecuaţie $b_1 = 1$. În fine din ultima ecuaţie a sistemului iniţial găsim $n = 4$;

e) Avem egalităţile (din scrierea lui S_3, S_4 cu ajutorul lui b_1 şi q) $\begin{cases} b_1 \cdot \dfrac{q^2-1}{q-1} = 3 \\ b_1 \cdot \dfrac{q^3-1}{q-1} = 7. \end{cases}$

Dacă $q = 1$, atunci $2b_1 = 3$ şi $3b_1 = 7$ devin relaţii imposibile. Prin urmare $q \neq 1$. Împărţind membru cu membru, cele două ecuaţii rezultă ecuaţia $3q^3 - 7q^2 + 4 = 0$ cu soluţiile $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = -\dfrac{2}{3}$. Reţinem doar ultimele două valori.

Dacă $q = 2$, atunci $b_1 = 1$ şi deci $S_4 = 15$, iar pentru $q = -\dfrac{2}{3}$ se obţine $b_1 = 9$ când $S_4 = \dfrac{13}{3}$.

f) Din $\dfrac{S_2}{S_4} = \dfrac{1}{5}$ rezultă $\dfrac{q^2-1}{q^4-1} = \dfrac{1}{5}$ sau $\dfrac{1}{q^2+1} = \dfrac{1}{5}$, iar de aici $q^2 = 4$ dă $q = \pm 2$. Dacă $q = -2$ şi $b_4 = b_1q^3 = 8$ găsim $b_1 = -1$, iar din $q = 2$ şi $b_4 = 8$ deducem $b_1 = 1$.

g) Pentru a exprima S_9 avem nevoie de b_1 şi q. Din egalitatea $b_{10} = 3\sqrt{3}b_7$ deducem $b_1q^9 = \sqrt{3}^3q^6b_1$ sau $q^3 = \sqrt{3}^3$, adică $q = \sqrt{3}$. Din $S_4 = 4 + \sqrt{3}$ avem $b_1\dfrac{q^4-1}{q-1} = 4 + \sqrt{3}$ sau $b_1 = 3\sqrt{3} - 1$. Acum S_9 se calculează uşor.

h) Din egalitatea $S_{10} = 33S_5$ sau $b_1\dfrac{q^{10}-1}{q-1} = 33 \cdot b_1\dfrac{q^5-1}{q-1}$ rezultă $q = 2$, iar raportul $\dfrac{S_{12}}{S_6} = \dfrac{q^{12}-1}{q^6-1}$.

2. Să se calculeze sumele:

1) $S_1 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}}$; 2) $S_2 = 1 + 2\left(\dfrac{1}{2}\right) + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \ldots + n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

R. 1) Să observăm că termenii sumei sunt în progresie geometrică de rație $q = \dfrac{1}{2}$, primul termen fiind $b_1 = 1$. În sumă avem n termeni și deci: $S_1 = 1 \cdot \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{1}{2}\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$.

2) Se calculează $(1-a)S_2$, unde $a = \dfrac{1}{2}$ și se obține $(1-a)S_2 = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} - na^n$ sau $(1-a)S_2 = \dfrac{a^n - 1}{a-1} - na^n$, iar de aici $S_2 = \dfrac{na^{n-1} - (n+1)a^n + 1}{(1-a)^2}$.

3. Să se calculeze suma $S_n = 2 + 22 + 222 + \ldots + \underbrace{222\ldots2}_{n}$.

R. Folosim scrierea zecimală a unui număr și avem:

$S_n = 2 + (2 \cdot 10 + 2) + (2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 2) + \ldots + (2 \cdot 10^{n-1} + 2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 2 \cdot 10 + 2) =$
$= 2[1 + (1 + 10) + (1 + 10 + 10^2) + \ldots + (1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1})]$.

Observăm că în fiecare paranteză rotundă avem de însumat termeni care sunt în progresie geometrică de rație $q = 10$.

Deci $S_n = 2\left[1 + \dfrac{10^2-1}{9} + \dfrac{10^3-1}{9} + \ldots + \dfrac{10^n-1}{9}\right] = 2\left[1 - \dfrac{1}{9}(n-1) + \dfrac{10^2}{9}(1 + 10 + \ldots + 10^{n-2})\right] =$

$= 2\left[1 - \dfrac{1}{9}(n-1) + \dfrac{10^2}{9} \cdot \dfrac{10^{n-1}-1}{9}\right] = \dfrac{2(10^{n+1} - 9n - 10)}{81}$.

2.4. FUNCȚIE NUMERICĂ. OPERAȚII CU FUNCȚII NUMERICE

Definiție. Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$. O funcție $f : A \to B$ se numește **funcție numerică** sau **funcție reală de variabilă reală**.

Exemple. 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ (funcția identică); 2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x$;
3) $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$; 4) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 1$; 5) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x}$.

Fie A o mulțime nevidă și $f, g : A \to \mathbb{R}$, două funcții reale ($f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$).

Definiții. 1) Funcția $f + g : A \to \mathbb{R}$ definită prin $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in A$, se numește **suma** dintre funcția f și funcția g.

2) Funcția $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ definită prin $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, $\forall x \in A$, se numește **produsul** funcțiilor f și g.

3) Funcția $\dfrac{f}{g} : A - \{x \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ definită prin $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in A$, $g(x) \neq 0$ se numește **câtul** dintre funcția f și funcția g.

4) Se definește **produsul dintre un număr real α și o funcție** $f : A \to \mathbb{R}$, ca fiind funcția $\alpha f : A \to \mathbb{R}$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in A$.

Observaţii. 1) Dacă funcţiile f, g nu au acelaşi domeniu maxim de definiţie $D_f \neq D_g$, atunci primele două funcţii (suma şi produsul) se vor defini pe $D_f \cap D_g$ (dacă această mulţime este nevidă), iar a treia funcţie (câtul) se defineşte pe o submulţime a lui $D_f \cap D_g$ pentru care $g(x) \neq 0$.

2) Similar definim suma şi produsul a n funcţii $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$,

$f_1 + f_2 + \ldots + f_n : A \to \mathbb{R}$, $(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, $\forall x \in A$.

Suma funcţiilor într-un punct este egală cu suma valorilor funcţiilor în acel punct.

Dacă funcţiile sunt egale, $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$, atunci $f + f + \ldots + f = nf$ şi $(nf)(x) = nf(x)$, $x \in A$.

Produsul celor n funcţii se defineşte astfel:

$f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n : A \to \mathbb{R}$, $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)$, $\forall x \in A$.

Produsul funcţiilor într-un punct este egal cu produsul valorilor funcţiilor în acel punct. Dacă funcţiile sunt egale, $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$, atunci $f \cdot f \cdot \ldots \cdot f = f^n$ şi $f^n(x) = (f(x))^n$, $x \in A$.

3) Dacă $f, g : A \to \mathbb{R}$, atunci definim **diferenţa** dintre funcţia f şi funcţia g ca fiind funcţia $f - g : A \to \mathbb{R}$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in A$. De fapt, diferenţa $f - g$ este suma $f + (-g)$, unde $-g = (-1)g$.

4) Dacă $f, g : A \to \mathbb{R}$, atunci definim $h, i : A \to \mathbb{R}$, $h(x) = \max(f(x), g(x))$, $i(x) = \min(f(x), g(x))$ unde

$$\max(a,b) = (a,\ a \geq b;\ b,\ a < b), \quad \min(a,b) = (a,\ a \leq b; b,\ a > b).$$

Exemple. 1) Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = -x + 3$. Atunci $f + g$, $f - g$, $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 1 - x + 3 = 2x + 4$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 3x + 1 - (-x + 3) = 4x - 2$, $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = (3x+1)(-x+3) = -3x^2 + 8x + 3$.

Pentru câtul $\frac{f}{g}$ observăm că $g(x) = 0$ pentru $x = 3$. Deci $\frac{f}{g} : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+1}{-x+3}$.

2) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, $g : [-3, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x+3}$. În acest caz $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = [-3, \infty)$. Deci $D_f \cap D_g = [-3, \infty)$. Pe mulţimea $D_f \cap D_g$ definim funcţiile $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ prin $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + 1 + \sqrt{x+3}$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x + 1 - \sqrt{x+3}$, $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = (x+1)\sqrt{x+3}$. Cum $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \in D_f \cap D_g$, se impune eliminarea lui -3 din această mulţime pentru a obţine domeniul maxim de definiţie pentru $\frac{f}{g}$.

3) Arătaţi că nu există $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) + f(2-x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Particularizăm x în relaţie. Pentru $x = 0$ şi $x = 2$, rezultă $f(0) + f(2) = 0$ şi $f(2) + f(0) = 2$, iar de aici $0 = 2$, fals.

Proprietăţi ale adunării funcţiilor

Fie $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ mulţimea funcţiilor definite pe A cu valori în $\mathbb{R}$. Atunci are loc următoarea:

Teoremă. Pentru operaţia de adunare pe $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ au loc proprietăţile:

1) $(f+g)+h = f+(g+h)$, $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ (adunarea funcţiilor este **asociativă**);

2) $f + g = g + f$, $\forall f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ (adunarea funcţiilor este **comutativă**);

3) există funcţia $\mathbf{0} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, $\mathbf{0}(x) = 0$, $\forall x \in A$ astfel încât $\mathbf{0} + f = f + \mathbf{0} = f$, $\forall f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ ($\mathbf{0}$ se numeşte **funcţia nulă** şi este **element neutru** pentru adunarea funcţiilor);

4) $\forall f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, $\exists (-f) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ astfel încât $f + (-f) = (-f) + f = \mathbf{0}$ (orice funcţie f are o **opusă** $(-f)$).

Demonstraţie. Adunarea numerelor reale se bucură de astfel de proprietăţi. ■

Proprietăţi ale înmulţirii funcţiilor

Următorul rezultat vine să faciliteze calculul algebric în care este implicată operaţia de înmulţire a funcţiilor. Mai precis, are loc următoarea:

Teoremă. Pentru operaţia de înmulţire pe $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ au loc proprietăţile:
1) $(f\cdot g)\cdot h = f\cdot(g\cdot h)$, $\forall f,g,h\in\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ (înmulţirea funcţiilor este **asociativă**);
2) $f\cdot g = g\cdot f$, $\forall f,g\in\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ (**înmulţirea funcţiilor este comutativă**);
3) există funcţia $1\in\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$, $1(x)=1$, $\forall x\in A$ astfel încât $1\cdot f = f\cdot 1 = f$, $\forall f\in\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ (1 se numeşte **funcţia unitate** pe mulţimea A şi este **element neutru** pentru înmulţirea funcţiilor).

Demonstraţie. Exerciţiu. ■

Legătura dintre cele două operaţii de adunare şi înmulţire pe $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ este dată de următoarea:

Propoziţie. Înmulţirea este **distributivă în raport cu adunarea** pe $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$, adică $f\cdot(g+h) = f\cdot g + f\cdot h$, $\forall f,g,h\in\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$.

Demonstraţie. Rezultă imediat din faptul că înmulţirea numerelor reale este distributivă în raport cu adunarea numerelor reale. ■

Proprietăţi ale înmulţirii funcţiilor cu numere reale

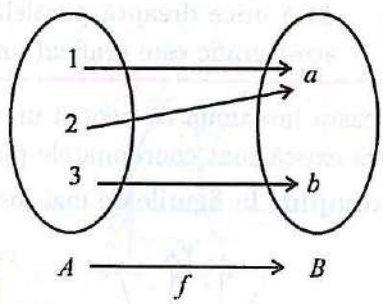
Se verifică imediat proprietăţile:
1) $(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\forall f\in\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$.
2) $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall f,g\in\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$;
3) $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\forall f\in\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$;
4) $1f = f$, $\forall f\in\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$.

2.5. REPREZENTAREA GRAFICĂ A UNEI FUNCŢII NUMERICE. GRAFICUL UNEI FUNCŢII

Definiţie. Fie o funcţie $f: A\to B$. Se numeşte **graficul funcţiei** f mulţimea de cupluri
$$G_f = \{(x,f(x)) \mid x\in A\} = \{(x,y) \mid x\in A, y = f(x)\}.$$

Se observă că $G_f\subseteq A\times B$.

Exemple. 1) Fie funcţia $f: A\to B$, definită prin diagrama de mai jos.
Graficul funcţiei f este mulţimea
$G_f = \{(1,a),(2,a),(3,b)\}$.



2) Fie funcţia numerică $f: A\to B$ definită prin tabelul de valori:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	2	3	-2	0

În acest caz, graficul lui f este mulţimea de cupluri:
$G_f = \{(-1,2),(0,3),(1,-2),(2,0)\}$.

Probleme propuse

1. **Să se determine mulţimea G_f pentru fiecare din funcţiile următoare:**

1) $f:\{-2,-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$; **2)** $f:\left\{-\frac{2}{3},\frac{1}{5},2\frac{1}{4},\frac{7}{3},5,(2)\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}$;

3) $f:\{-3,-2,1,4,5\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left[\frac{2x+1}{3x+2}\right]$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx+2m-1$, $m\in\mathbb{R}$. Să se determine m dacă $(2,3)\in G_f$.

3. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-m)x+2m$, $m\in\mathbb{R}$, dacă $(1+m,m-1)\in G_f$.

4. Graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ conţine punctele $(-1,2)$, $(2,5)$. Precizaţi dacă punctele $(-2,1)$, $(0,5)$, $(3,6)$ aparţin graficului funcţiei f.

5. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ este corect definită.

6. Să se arate că nu există funcţie care să conţină punctele $(1,-2)$, $(-1,3)$, $(1,0)$.

7. Să se arate că nu există funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, pentru care $(-1,1),(0,3),(1,5)\in G_f$.

8. Să se arate că nu există funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(x)+f(1-x)=x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

9. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=((a+b)x+1, x\leq 1; (2a-3b)x, x>1)$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $(-1,2),(2,6)\in G_f$.

Lecturi grafice

Dacă funcţia $f:A\to B$ este o **funcţie numerică**, atunci am văzut la produsul cartezian $A\times B\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ că unui cuplu (x,y) din $A\times B$ îi putem asocia în planul în care considerăm un reper cartezian (planul cartezian) un punct $M(x,y)$ (punctul M având coordonatele x, y, componentele cuplului). Cum mulţimea $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se reprezintă geometric prin planul cartezian, deducem că: **graficul unei funcţii numerice se reprezintă geometric printr-o anumită submulţime a planului.** Această submulţime a planului se numeşte **reprezentarea geometrică** a graficului funcţiei. Reprezentarea grafică a unei funcţii $f:A\to\mathbb{R}$ este, în general, o curbă, numită **curba reprezentativă a funcţiei** f şi notată $C_f=\{M(x,y)\mid x\in A, y=f(x)\}$.

Relaţia $y=f(x)$ se numeşte **ecuaţia curbei reprezentative a funcţiei** f în raport cu reperul ales. Pe scurt, prin reprezentarea grafică a unei funcţii f se înţelege reprezentarea geometrică a mulţimii G_f într-un plan cartezian. **Prin abuz de limbaj, în loc de reprezentarea geometrică a graficului unei funcţii vom spune simplu graficul funcţiei** f, iar prin scrierea $M(x,y)\in G_f$ se va înţelege $M(x,y)\in C_f$, adică $y=f(x)$.

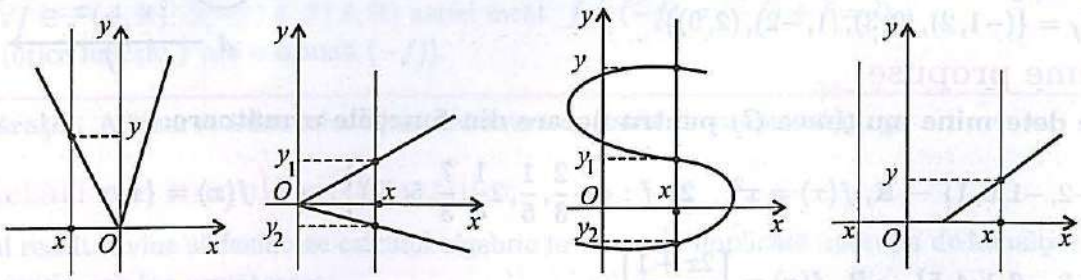
Testul liniei verticale

Dat fiind un grafic într-un reper cartezian xOy se poate stabili dacă acesta este graficul unei funcţii astfel:

> dacă orice dreaptă paralelă cu Oy, $x=m$, $m\in\mathbb{R}$, taie graficul în cel mult un punct, atunci acest grafic este graficul unei funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Aceasta înseamnă că pentru un $x=m\in\mathbb{R}$, există cel mult un $y\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=y$, unde (x,y) dacă există sunt coordonatele punctului de intersecţie între dreaptă şi grafic.

Exemplu. În figurile de mai jos doar a) şi d) sunt grafice de funcţii.

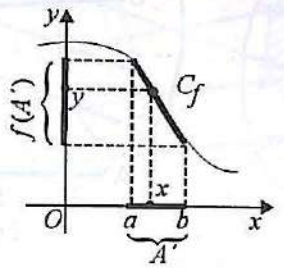


Imaginea unei funcţii. Preimaginea unei funcţii

Fie $f : A \to B$. Din definiţia funcţiei, fiecărui element $x \in A$ i se asociază prin funcţia f un unic element $f(x) \in B$, numit **imaginea lui x prin f** sau **valoarea funcţiei f în x**.

Definiţie. Fie $f : A \to B$, iar $A' \subset A$. Se numeşte imaginea lui A' prin f, notată $f(A')$, submulţimea lui B formată din elementele care sunt imagini prin f a cel puţin unui element din A'.

Deci, $f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}$ sau
$f(A') = \{y \in B \mid \exists x \in A' \text{ astfel încât } f(x) = y\}$.



Geometric, pentru a obţine $f([a,b])$ se duc dreptele $x = a$, $x = b$, paralele cu Oy, care delimitează o porţiune din graficul C_f. Se proiectează această porţiune pe axa Oy şi se obţine $f([a,b])$.

Exemple. 1) Considerăm funcţia $f : \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$ dată prin diagrama cu săgeţi (fig. 5). Fie $A' = \{1,2,3\}$. Atunci $f(A') = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{a,c\}$.

2) Fie funcţia $f : \{-1,0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3,4\}$ definită prin $f(x) = x + 1$. Dacă $A' = \{-1,2\}$, atunci $f(A') = \{f(-1), f(2)\} = \{0,3\}$, iar dacă $A' = \{-1,1,3\}$, atunci $f(A') = \{f(-1), f(1), f(3)\} = \{0,2,4\}$.

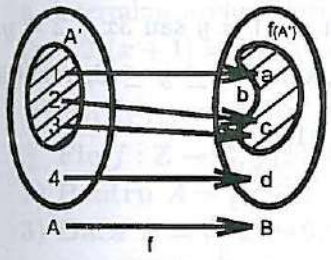


Fig. 5

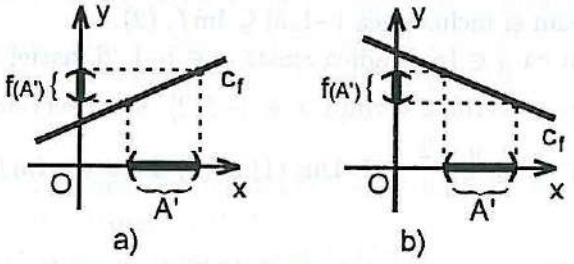
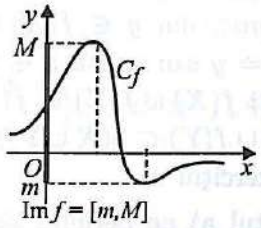


Fig. 6

Observaţie. Fie o funcţie numerică $f : A \to B$ şi $A' \subset A$. Am văzut că A este o submulţime de puncte de pe Ox, iar B este o submulţime de puncte de pe Oy. Dacă se dă graficul funcţiei f, atunci se poate intui cine este $f(A')$ (fig.6 a, b, c)

Definiţie. Fie $f : A \to B$. Se numeşte **imagine a funcţiei f**, notată $\operatorname{Im} f$ sau $f(A)$, partea lui B constituită din toate imaginile elementelor lui A.

Deci, $\operatorname{Im} f = f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ sau
$\operatorname{Im} f = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ astfel încât } f(x) = y\}$.



Să remarcăm faptul că $f(A)$ este o submulţime a codomeniului, deci a se face distincţie între codomeniul funcţiei (sau mulţimea în care funcţia ia valori) şi mulţimea valorilor funcţiei.

Geometric, pentru a obţine $f(A)$ se proiectează tot graficul funcţiei pe axa Oy. **Exemple.** 1) Fie funcţia $f : \{-1,0,1,2\} \to \{a,b,c,d,e\}$ definită cu ajutorul diagramei cu săgeţi (fig. 7). Atunci $\operatorname{Im} f = \{f(-1), f(0), f(1), f(2)\} = \{a,b,c\} \subset B$.

2) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$. Atunci $\operatorname{Im} f=\{f(x)\ x\in\mathbb{R}\}=\{0\}$.

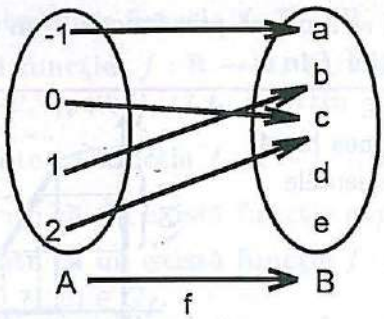


Fig. 7

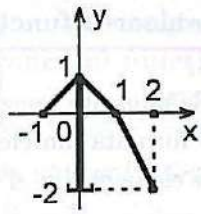


Fig. 8

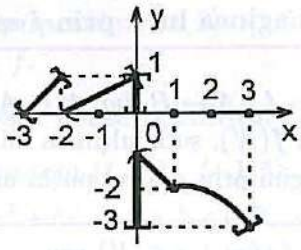


Fig. 9

3) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$. În acest caz
$\operatorname{Im} f=\{f(x)\ x\in\mathbb{R}\}=\{0,1\}$.

4) Fie funcţia $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$, având graficul din figura 8. Atunci $\operatorname{Im} f=[-2,1]$.

5) Fie funcţia $f:[-3,3]\to\mathbb{R}$, având graficul din figura 9. Avem:
$\operatorname{Im} f=\{f(x)\ x\in[-3,3]\}=[-3,-1)\cup[0,1]$.

6) Să se determine imaginea funcţiei $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$.

Din $-1\le x\le 2$ rezultă $-3\le 3x\le 6$, iar de aici (se adună 2 în toţi membrii) $-3+2\le 3x+2\le 6+2$, adică $-1\le f(x)\le 8$, ceea ce arată că
$\operatorname{Im} f\subseteq[-1,8]$, (1). Să arătăm şi incluziunea $[-1,8]\subseteq\operatorname{Im} f$, (2).
Fie $y\in[-1,8]$ şi să probăm că $y\in\operatorname{Im} f$, adică există $x\in[-1,2]$, astfel încât $f(x)=y$ sau $3x+2=y$. De aici, $x=\dfrac{y-2}{3}$. Pentru a verifica cerinţa $x\in[-1,2]$, să observăm că, din $-1\le y\le 8$, rezultă $-1-2\le y-2\le 8-2$ sau $-1\le\dfrac{y-2}{3}\le 2$. Din (1) şi (2) deducem $\operatorname{Im} f=[-1,8]$.

Problemă rezolvată

Fie $f:A\to B$ o funcţie. Să se arate că dacă $X,Y\subseteq A$, atunci:

a) $f(X\cup Y)=f(X)\cup f(Y)$; b) $f(X\cap Y)\subset f(X)\cap f(Y)$.

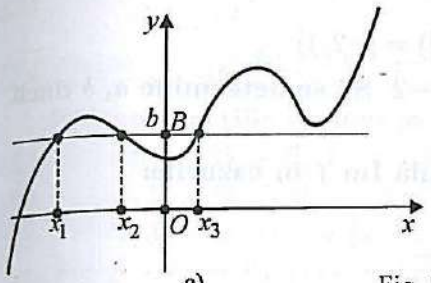
R. Pentru a demonstra egalitatea a două mulţimi utilizăm dubla incluziune.
a) Fie $y\in f(X\cup Y)$. Deci există $x\in X\cup Y$ astfel încât $f(x)=y$. Din $x\in X\cup Y$ rezultă $x\in X$ sau $x\in Y$, ceea ce dă $f(x)\in f(X)$ sau $f(x)\in f(Y)$, adică $y=f(x)\in f(X)\cup f(Y)$. Cum y a fost arbitrar din $f(X\cup Y)$, rezultă $f(X\cup Y)\subset f(X)\cup f(Y)$ (1).
Reciproc, din $y\in f(X)\cup f(Y)$ rezultă $y\in f(X)$ sau $y\in f(Y)$ şi deci există $x\in X$ astfel încât $f(x)=y$ sau există $z\in Y$ astfel ca $f(z)=y$. În ambele cazuri, $x,z\in X\cup Y$, adică $y\in f(X\cup Y)$ şi deci $f(X)\cup f(Y)\subset f(X\cup Y)$, (2) (aici, din $X,Y\subset X\cup Y$ rezultă $f(X),f(Y)\subset f(X\cup Y)$ şi deci $f(X)\cup f(Y)\subset f(X\cup Y)$). Din (1) şi (2) rezultă egalitatea.
b) Exerciţiu.

Punctul a) ne permite să calculăm imaginea unei funcţii definite pe reuniune de intervale. Dacă un element x din A este astfel încât $f(x)=y$ se spune că x **este o preimagine a lui** y.

Definiţie. Fie $f:A\to B$. Se numeşte **imaginea reciprocă a unei părţi** B' a lui B, notată $f^{-1}(B')$, submulţimea lui A formată din acele elemente ale căror imagini prin f aparţin lui B'.
Deci, $f^{-1}(B')=\{x\in A\mid f(x)\in B'\}$.

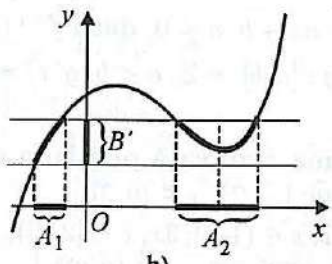
Dacă se cunoaşte graficul lui f, atunci se poate indica $f^{-1}(B')$. Dacă $B'=\{b\}$, atunci pentru a afla

$f^{-1}(B')$ se rezolvă ecuaţia $f(x) = b$ (fig. 10, a). Dacă B' este un interval (fig. 10, b), atunci se duc paralele prin capetele acestui interval la axa Ox, care delimitează porţiuni de grafic pe care le proiectăm pe axa Ox. Mulţimea acestor puncte de pe Ox constituie $f^{-1}(B')$.



a)

Fig. 10



b)

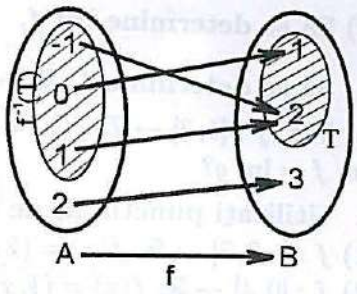


Fig. 11

Exemple. 1) Se consideră funcţia $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$ definită prin diagrama cu săgeţi (fig. 11). $T = \{1, 2\}$,
$f^{-1}(T) = \{-1, 0, 1\}$ În acest caz, $f^{-1}(\{1\}) = \{0\}$, deoarece $f(0) = 1$; $f^{-1}(\{2\}) = \{-1, 1\}$ pentru că $f(-1) = f(1) = 2$; $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{-1, 0, 1\}$, deoarece $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

2) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$. Imaginea elementului $x = 1$ prin f este $f(1) = 3$, deci o preimagine a lui $y = 3$ este $x = 1$. Cum $f(x) = 3$, adică $3x = 3$ dă $x = 1$, se deduce că $x = 1$ este singura preimagine a lui $y = 3$. Prin urmare $f^{-1}(\{3\}) = \{1\}$.

3) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$. Să determinăm preimaginea elementului $y = 2$. Aceasta revine la a determina acele valori ale lui x din $\mathbb{R}$ pentru care $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x = 2$ sau $x = -1)$. Aşadar $f^{-1}(\{2\}) = \{-1, 2\}$.

Probleme propuse

1. **Fie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x$. 1) Care din numerele -8, $-6{,}15{,}53$ aparţin Im f?**
2) Pentru $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$ determinaţi $f(A)$.
3) Dacă $B = \{-24, -9, 18, 24\}$ atunci determinaţi $f^{-1}(B)$.

2. **Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1, x \in \mathbb{Q}; 0, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q})$ (funcţia lui Dirichlet).**
1) Care din numerele -2, -1, 0, 1, 2, $\sqrt{3}$ aparţin Im f?
2) Dacă $A_1 = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$, $A_2 = \{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ atunci determinaţi $f(A_1)$, $f(A_2)$.
3) Calculaţi $\sum_{k=1}^{10} \left[f(\sqrt{k}) + f(-\sqrt{k})\right]$.

3. **Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1, x \in \mathbb{Z}; 2, x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}; 3, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q})$.**
1) Pentru $A = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}\right\}$, determinaţi $f(A)$. **2) Pentru $A = \left\{-3, \frac{1}{2}, \frac{6}{7}\right\}$ calculaţi $f(A)$.**
3) Dacă $A = \left\{-\frac{1}{3}, -\sqrt{2}, 1\right\}$ atunci precizaţi $f(A)$.
4) Determinaţi $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{1, 2\})$, $f^{-1}(\{2, 3\})$, $f^{-1}(\{1, 3\})$, $f^{-1}(\{1, 2, 3\})$.

4. **Fie $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$.**
1) Să se determine Im f.
2) Să se precizeze $f^{-1}(\{-3\})$, $f^{-1}(\{-3, -2\})$, $f^{-1}(\{-3, 0\})$, $f^{-1}(\{-2, 1\})$.
3) Care din perechile $\left(-\frac{5}{2}, -3\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$, $\left(\frac{11}{5}, 2\right)$, aparţin graficului lui f ?

5. **Să se determine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, dacă $f([0, 3]) = [-1, 5]$.**

6. Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{Z}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

1) Să se arate că nu există $x>1$ pentru care $f(x)=-1$.

2) Să se determine Im f. **3)** Să se determine $f^{-1}\left(\left\{0,\dfrac{1}{2}\right\}\right)$, $f^{-1}(\{2,3\})$.

7. Să se determine $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$, dacă $f^{-1}([2,5])=[-2,1]$.

8. Fie $f:[1,3]\to\mathbb{Z}$, $f(x)=2x+3$ şi $g:[a,b]\to\mathbb{Z}$, $a<b$, $g(x)=3x+2$. Să se determine a, b dacă Im $f=$ Im g?

9. Utilizaţi punctul a) de la problema rezolvată pentru a calcula Im f în cazurile:

1) $f:[-2,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2x, x\in[-2,0]; 1-2x, x\in(0,3])$;

2) $f:[0,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1, x\in[0,1]; -1, x\in(1,2); 3x, x\in[2,4])$;

3) $f:[0,1]\cup(2,3)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2x, x\in[0,1]; -2x, x\in(2,3))$.

Schema analizării unui grafic

1) Domeniul şi mulţimea de valori ale funcţiei

Dacă $f:A\to B$ este o funcţie numerică, atunci în reperul xOy mulţimea A este o submulţime de puncte de pe axa Ox, iar B este o submulţime de puncte de pe axa Oy ($M(x,y)\in C_f$, unde $x\in A$, $y\in B$) (fig. 12.a)) (am ţinut seama de corespondenţa dintre mulţimea $\mathbb{R}$ şi mulţimea punctelor de pe axa reală – unei submulţimi din $\mathbb{R}$ îi va corespunde o submulţime de puncte de pe axa reală).

Geometric, mulţimea A este proiecţia graficului pe axa Ox (fig. 12. b)), iar mulţimea valorilor funcţiei $f(A)=\{f(x)|\,x\in A\}\subseteq B$ este proiecţia graficului funcţiei pe axa Oy (fig. 12. c)) $f(A)=[m,M]$.

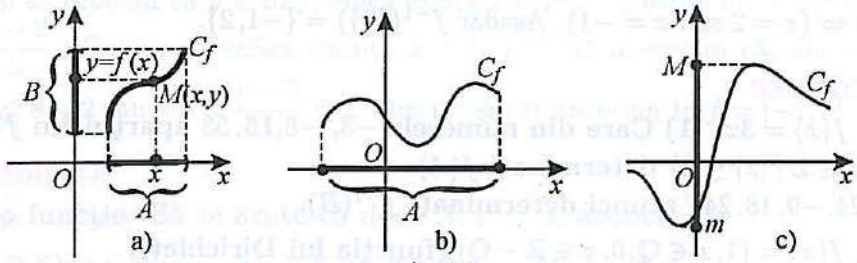
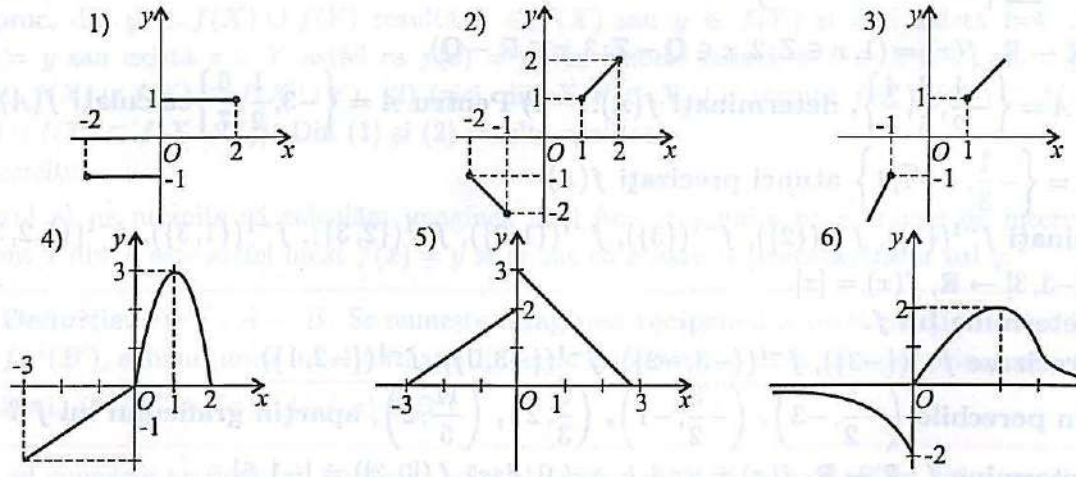


Fig. 12

Probleme propuse

1. Pentru curbele asociate unor funcţii precizaţi domeniul de definiţie şi mulţimea de valori.



2. Pentru următoarele funcţii stabiliţi domeniul maxim de definiţie.

1) $f(x)=x^3-3x+5$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}$;

4) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$; 5) $f(x)=\sqrt{2-x}$; 6) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$;

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$; 8) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x}}$; 9) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x+3}}$.

3. Pentru funcţiile de mai jos stabiliţi $\mathrm{Im}f$.

1) $f:\{-2,0,1,3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+1$; 2) $f:[-2,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x+1]$;

3) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x+1|-2$;

5) $f:[-3,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2, x\in[-3,-1];2x+1, x\in(-1,2);1-3x, x\in[2,3])$.

4. Fie $f:D_f\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$, $g:D_g\to\mathbb{R}$, $g(x)=2-x$. Determinaţi D_f, D_g, astfel încât $f=g$.

5. 1) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcţiile $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x+m}\sqrt{x-m}$ să aibă acelaşi domeniu de definiţie.

2) Stabiliţi pentru ce $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$.

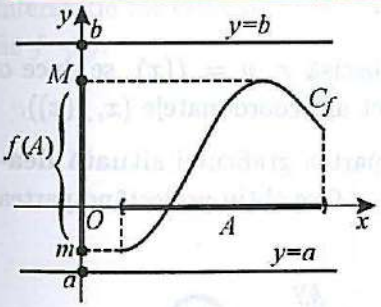
6. Fie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$, $f(k)=$ restul împărţirii lui k la 7. Să se determine $f(\mathbb{Z})$, $\sum_{k=1}^{2000} f(k)$.

7. Dacă $\dfrac{2}{7}=0,a_1a_2\ldots a_k\ldots$, iar $f(k)=a_k$, atunci calculaţi $\sum_{k=1}^{2008} f(k)$.

---

2) **Mărginirea unei funcţii numerice.** Fie funcţia $f:A\to B$, $A,B\subseteq\mathbb{R}$.

Definiţie. Spunem că funcţia f este **mărginită**, dacă există două numere reale a, b, astfel încât $a\le f(x)\le b$, $\forall x\in A$.



Geometric, funcţia f este mărginită dacă mulţimea $f(A)=\mathrm{Im}f$ este mărginită, deci dacă pe axa Oy există numerele reale a, b, astfel încât $f(A)\subseteq[a,b]$.

Altfel spus, funcţia este mărginită dacă graficul ei este cuprins între dreptele paralele cu axa Ox, $y=a$ şi $y=b$.

---

3) **Intersecţia graficului cu axele de coordonate**

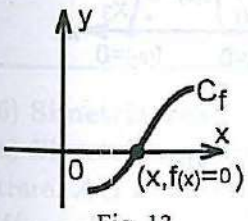


Fig. 13

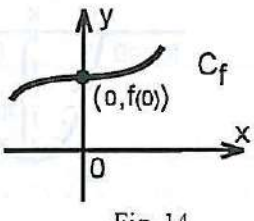


Fig. 14

Intersecţia graficului funcţiei $f:A\to B$ cu axa Ox, dacă există, este formată din punctele de pe axa Ox ale căror abscise sunt soluţiile ecuaţiei $f(x)=0$ (fig. 13).

Intersecţia graficului cu axa Oy se obţine dacă $0\in A$ când avem punctul $(0,f(0))$ (fig. 14).

Probleme propuse

1. Să se determine intersecţiile graficelor funcţiilor de mai jos cu axele de coordonate.

1) $f(x)=3x-2$; 2) $f(x)=x-3$; 3) $f(x)=x^2-1$; 4) $f(x)=x^2+3$; 5) $f(x)=x^2-3x$;

6) $f(x)=x^2-3x+2$; 7) $f(x)=|x-1|$; 8) $f(x)=|x-1|-1$; 9) $f(x)=|x-1|+|x^2-x|$;
10) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$; 11) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$; 12) $f(x)=\sqrt{x-2}$; 13) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$;
14) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; 15) $f(x)=\sqrt{x^2-5x}$; 16) $f(x)=(x-3, x\leq 1; x+2, x>1)$;
17) $f(x)=(x^2-1, x\leq 2; x-3, x>2)$.

2. **Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care intersecţiile graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$ cu axele de coordonate sunt (pe rând): 1) $(-1,0)$, $(0,3)$ 2) $(a-1,0)$, $(0,b^2)$.**

3. **Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x-1)(x-2)+1$. Determinaţi punctele de pe grafic: 1) de abscisă 0, 1 şi respectiv 2; 2) de ordonată 1.**

4. **Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x^2-2x|+|x-a|$, $a\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât: 1) $G_f\cap Oy=\{(0,3)\}$; 2) $G_f\cap Ox\neq\emptyset$.**

---

4) **Semnul funcţiei**

Dacă un punct al graficului, $M(x,f(x))$ **este situat deasupra axei** Ox, atunci $f(x)>0$ (şi reciproc) (fig. 15 a).

Dacă un punct al graficului, $M(x,f(x))$ **este situat sub axa** Ox, atunci $f(x)<0$ (şi reciproc) (fig. 15 b).

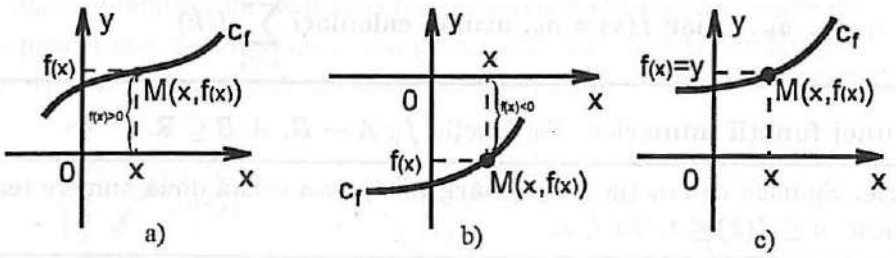


Fig. 15

Pentru un $x\in A$ pentru a obţine ordonata punctului de pe grafic de abscisă x, $y=f(x)$, se duce o paralelă la Oy prin x (fig. 15, c)) până intersectează curba C_f. Acest punct are coordonatele $(x,f(x))$.

Geometric, pentru a obţine soluţiile inecuaţiei $f(x)>0$ se proiectează partea graficului **situată deasupra axei** Ox pe această axă (fig. 16.a). Analog, soluţiile inecuaţiei $f(x)<0$ se obţin proiectând partea graficului situată sub axa Ox pe această axă (fig. 16.b).

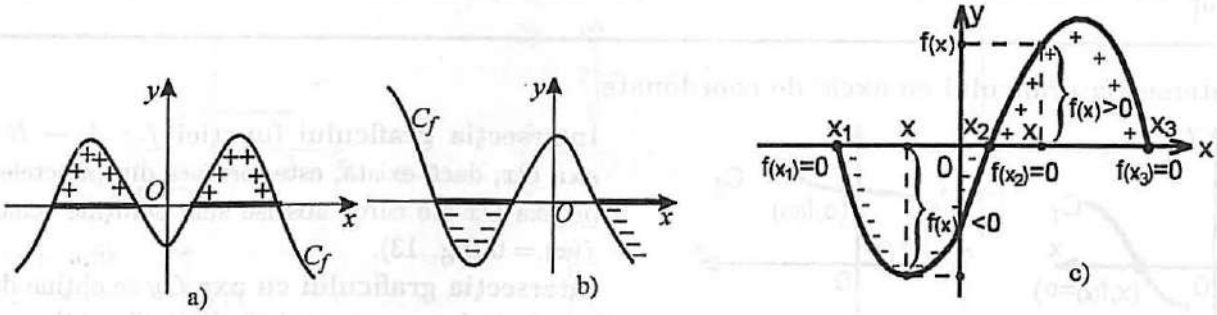


Fig. 16

A determina semnul unei funcţii numerice $f:A\to B$, înseamnă a determina valorile lui x din A pentru care $f(x)>0$ şi valorile lui x din A pentru care $f(x)<0$. A determina aceste mulţimi pentru x înseamnă a rezolva inecuaţiile $f(x)>0$ şi respectiv $f(x)<0$.

Spunem că ($I\subseteq A$):

f este	pozitivă pe I	negativă pe I	strict pozitivă pe I	strict negativă pe I	nulă pe I
dacă pentru oricare $x \in I$ avem:	$f(x) \geq 0$	$f(x) \leq 0$	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) = 0$
Poziția graficului față de axa Ox	deasupra sau tangent	sub sau tangent	strict deasupra	strict sub	taie axa Ox

Soluțiile ecuației $f(x) = 0$ se numesc **zerourile funcției** f. Legătura între graficul funcției $f : A \to \mathbb{R}$ și semnul funcției este prezentată în fig. 16, c).

Exemple. 1) Fie funcția f definită prin tabelul de valori

x	-3	-2	-1	0	1	3
$f(x)$	0	1	-3	0	-2	5

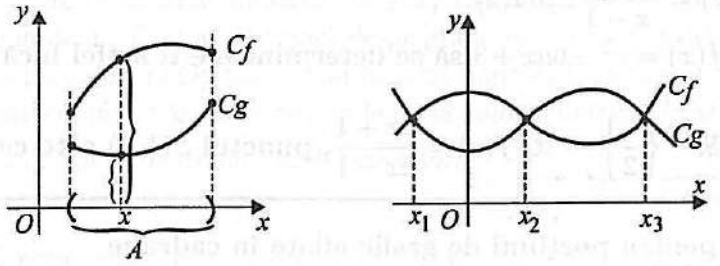
Atunci: $f(x) > 0$ dacă $x \in \{-2, 3\}$;
$f(x) < 0$ dacă $x \in \{-1, 1\}$;
$f(x) = 0$ dacă $x \in \{-3, 0\}$.

2) Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -5x + 1$.

Să observăm că $f(x) > 0 \Leftrightarrow -5x + 1 > 0 \Leftrightarrow -5x > -1 \Leftrightarrow 5x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{5}$. Deci $f(x) > 0$ dacă $x \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$; $f(x) < 0$ dacă $x \in \left(\frac{1}{5}, \infty\right)$; $f(x) = 0$ pentru $x = \frac{1}{5}$.

---

5) **Compararea funcțiilor. Rezolvări de inecuații, ecuații.** Reprezentarea grafică din fig. 17, a) spune că pe mulțimea A (graficul lui f este „deasupra graficului" lui g) are loc inegalitatea $f(x) > g(x)$, $\forall x \in A$, adică în orice punct din A valoarea lui f este mai mare decât valoarea lui g în același punct. Din fig. 17, b), observăm că punctele în care f, g au aceeași valoare, sunt date abscisele punctelor de intersecție ale celor două curbe. Mai mult, între două astfel de puncte consecutive, are loc relația $f > g$, fie $f < g$.



$f(x) > g(x)$, $\forall x \in A$ a)

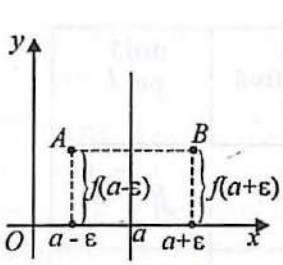
$f(x_i) = g(x_i)$, $i = \overline{1,2,3}$ b)

Fig. 17

---

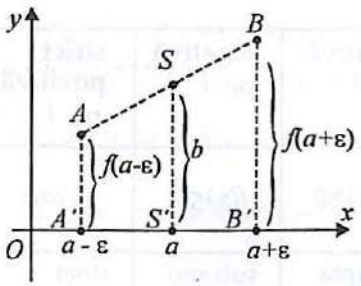
6) **Simetrizarea graficului.**

a) **Simetrizarea în raport cu o dreaptă** . În fig. 18, a), am (marcat) reprezentat două puncte arbitrare, A și B, ale unei reprezentări grafice simetrice în raport cu dreapta $x = a$. Condiția se exprimă prin $f(a - \varepsilon) = f(a + \varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$ pentru care $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$ aparțin domeniului funcției f, pentru a avea sens scrierile $f(a - \varepsilon)$, $f(a + \varepsilon)$.



$x = a$ axă de simetrie
dacă $f(a-\varepsilon) = f(a+\varepsilon), \forall \varepsilon$

a)



$S(a,b)$ este centrul de simetrie
dacă $b = \dfrac{f(a+\varepsilon)+f(a-\varepsilon)}{2}, \forall \varepsilon$

b)

Fig. 18

b) **Simetrizarea în raport cu un punct.** În fig. 18, b) este ilustrată situaţia centrului de simetrie pentru o reprezentare grafică din care noi am reţinut două puncte arbitrare, A, B, simetrice în raport cu S. Din trapezul dreptunghic $AA'B'B$ şi expresia lungimii liniei mijlocii $[SS']$, deducem $b = \dfrac{f(a+\varepsilon)+f(a-\varepsilon)}{2}$, $\forall \varepsilon > 0$, cu aceleaşi comentarii ca mai sus.

Probleme propuse

1. **Dreapta $x = a$ este axă de simetrie pentru graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Leftrightarrow f(a-x) = f(a+x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Determinaţi axele de simetrie pentru funcţiile ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$):**
1) $f(x) = x^2 - 4x$; **2)** $f(x) = x^2 - 6x$; **3)** $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$;
4) $f(x) = |x-2|$; **5)** $f(x) = |2x-1|$; **6)** $f(x) = |\sqrt[3]{x}|$.

2. **Arătaţi că graficele funcţiilor de mai jos au ca centre de simetrie punctul indicat alăturat.**
1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$, $S(0,-1)$; **2)** $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $S(1,1)$;
3) $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-1}$, $S(1,3)$.

3. **Pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6ax + 3$ să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta $x = 3$ să fie axă de simetrie.**

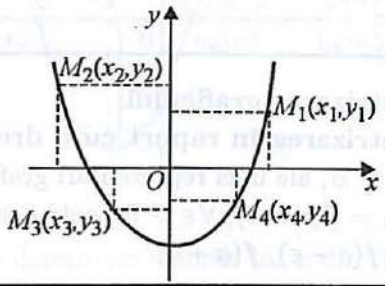
4. **Pentru funcţia $f : \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$, punctul $S(1,3)$ este centru de simetrie ?**

---

7) Condiţii algebrice pentru porţiuni de grafic aflate în cadrane

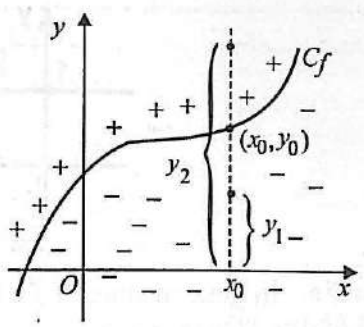
În figura alăturată graficul funcţiei „traversează" cele patru cadrane. Semnele coordonatelor punctelor în cele patru cadrane sunt date în tabelul următor.

Cadran / $M(x,y)$	x	y
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−



---

8) **Caracterizarea punctelor nesituate pe C_f.** În desenul alăturat, sunt trei puncte situate pe aceeaşi dreaptă verticală, $x = x_0$, având ordonatele y_1 (punctul de „sub" grafic), y_0 (punctul „de pe" grafic) şi respectiv y_2 (punctul de „deasupra" graficului). Atunci relaţia de ordine dintre ordonate este $y_1 < y_0 < y_2$. Punctele de pe grafic, de coordonate $(x, y = f(x))$ verifică relaţia $y - f(x) = 0$. Ce se întâmplă cu expresia $E(x, y) = y - f(x)$, când punctul nu mai este pe curba C_f?



$y_2 > y_0 > y_1$,

Dacă punctul (x_0, y_1) este sub curbă, atunci $E(x_0, y_1) = y_1 - f(x_0) = y_1 - y_0 < 0$. Deci, orice punct de sub curba C_f, face expresia $E(x, y)$ negativă, iar orice punct de deasupra curbei C_f face expresia $E(x, y)$ pozitivă.

Am analizat la funcţii implicite ecuaţia $x^2 + y^2 = 1$, care are ca reprezentare cercul cu centrul în O şi de rază 1 (numit **cercul unitate**) (fig. 19).

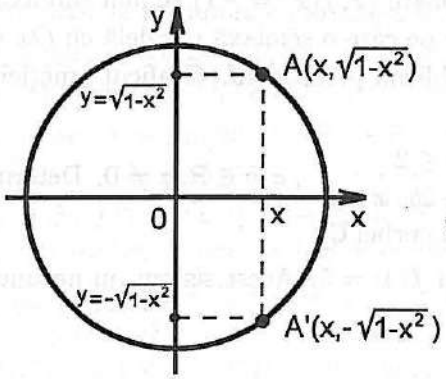


Fig. 19

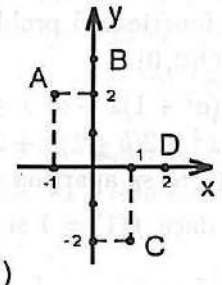


Fig. 20

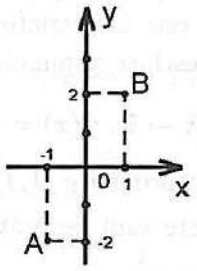


Fig. 21

Pentru $x \in (-1, 1)$ se poate determina valoarea lui $f(x)$ ducând prin x (din domeniul de definiţie) o paralelă la Oy care taie graficul. Prin acest punct de pe grafic se duce o paralelă la Ox care taie pe Oy, obţinând astfel $f(x)$. Aici paralela la Oy taie cercul în două puncte. Deci desenul din figură nu reprezintă graficul unei funcţii deoarece unui x îi vor corespunde două valori pentru y $(\pm\sqrt{1 - x^2})$.

Exemple. 1) Fie funcţia $f : A \to B$ având tabelul de valori:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	2	3	-2	0

Am văzut că graficul funcţiei este $G_f = \{(-1, 2), (0, 3), (1, -2), (2, 0)\}$, ceea ce arată că reprezentarea grafică a funcţiei f este formată din patru puncte: $A(-1, 2)$, $B(0, 3)$, $C(1, -2)$ $D(2, 0)$ (fig. 20).

2) Funcţia $f : \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ are graficul $G_f = \{(-1, -2), (0, 0), (1, 2)\}$, iar reprezentarea grafică este formată din trei puncte: $A(-1, -2)$, $O(0, 0)$, $B(1, 2)$ (fig. 21).

3) Să se reprezinte grafic funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$. Observăm că $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 > 0$, ceea ce înseamnă că graficul lui f este situat deasupra axei Ox. Punctele care aparţin graficului au coordonatele $(x, f(x) = 1)$, iar acestea sunt situate pe dreapta paralelă cu Ox, care trece prin punctul $(0, 1)$ de pe Oy (fig. 22). În acest caz ecuaţia dreptei este $y = 1$.
Dacă $y = 0$, atunci dreapta este chiar axa Ox.

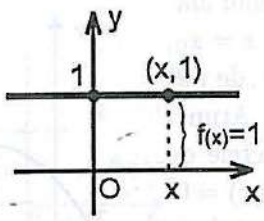


Fig. 22

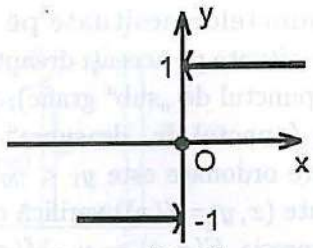


Fig. 23

Observaţie. În general funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ = constant are ca grafic o dreaptă paralelă cu axa Ox, iar ecuaţia ei este $y = c$.

4) Să se reprezinte grafic funcţia sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, numită **funcţia semn.**

R. Pentru $x > 0$, $f(x) = 1 > 0$, arată că punctele de coordonate $(x, f(x) = 1)$ se află deasupra axei Ox, iar pentru $x < 0$, $f(x) = -1 < 0$, punctele de coordonate $(x, f(x) = -1)$ se află sub axa Ox. Mai mult, pentru fiecare caz în parte aceste puncte sunt situate pe câte o semiaxă paralelă cu Ox (fig. 23). Pentru $x > 0$, funcţia sgn este o restricţie a funcţiei din problema precedentă. Graficul funcţiei este format din două semidrepte deschise şi punctul $O(0, 0)$.

5) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (a^2+1)x + a, & x \leq 2 \\ x^2 - 2(b+1)x + 2b, & x > 2 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Determinaţi a, b, astfel încât punctele de coordonate $(1, 1)$, $(3, 5)$ să aparţină curbei C_f.

R. Cele două puncte sunt pe grafic, dacă $f(1) = 1$ şi $f(3) = 5$. Acest sistem, în necunoscutele a, b, are soluţia $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$.

Funcţie pară, funcţie impară

Definiţie. O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte **simetrică în raport cu 0** (zero) dacă pentru orice $x \in A$ şi $-x \in A$.

Exemple. 1) Următoarele mulţimi sunt simetrice în raport cu 0:
$(-1, 1)$; $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$; $(-5, -3) \cup (3, 5)$; $(-\infty, \infty)$ etc.
2) Următoarele mulţimi nu sunt simetrice în raport cu 0:
$(-1, 2)$; $(-\infty, -3) \cup [3, \infty)$; $(-5, -3) \cup (1, 5)$ etc.

Definiţii. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime simetrică în raport cu 0. Funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte **pară** dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$.

Funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte **impară** dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$.

Ce se poate spune despre graficul unei funcţii pare sau impare?
Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie pară, atunci din $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$, rezultă că punctele de coordonate $(-x, f(-x))$, $(x, f(x))$ de pe graficul funcţiei sunt simetrice în raport cu axa Oy (fig. 24). Altfel spus, dacă graficul funcţiei pare conţine punctul de coordonate $(x, f(x))$, atunci va conţine şi simetricul lui faţă de Oy, $(-x, f(-x))$.

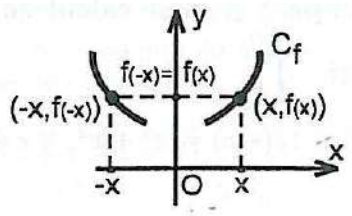


Fig. 24

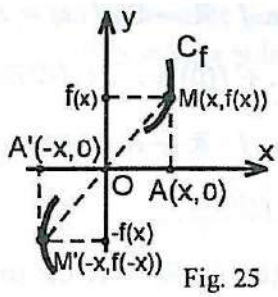


Fig. 25

Aceasta arată că graficul unei funcţii pare este simetric faţă de Oy. Prin urmare este suficient să trasăm graficul unei funcţii pare pentru $x \in [0,\infty)$ (sau o submulţime a acestui interval, $A \cap [0,\infty)$) şi apoi să-l simetrizăm în raport cu Oy pentru a genera tot graficul funcţiei.

Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie impară, atunci din $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$, rezultă că punctele de coordonate $(-x, f(-x))$, $(x, f(x))$ de pe graficul funcţiei sunt simetrice în raport cu originea O a reperului cartezian. Aceasta rezultă din congruenţa triunghiurilor OAM şi $OA'M'$ (fig. 25). Deci graficul unei funcţii impare este simetric în raport cu originea O a reperului cartezian. Prin urmare este suficient să trasăm graficul funcţiei pentru $x \in [0,\infty)$ (sau o submulţime a acestui interval, $A \cap [0,\infty)$) şi apoi să luăm simetricul acestuia faţă de O, când se obţine tot graficul funcţiei f.

Exemple. 1) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ este pară, în timp ce funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ este impară.

Într-adevăr, avem: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deci f este funcţie pară.

Din $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ se deduce că g este funcţie impară.

2) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ nu este nici pară, nici impară.

Calculăm $f(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1$. Pentru $x = 1$ avem $f(-1) = -1$, iar pentru $x = 1$ se obţine $f(1) = 3$. Deci $f(-1) = -1 \neq 3 = f(1)$. Prin urmare, nu pentru oricare $x \in \mathbb{R}$ avem $f(-x) = -f(x)$ sau $f(-x) = f(x)$.

Observaţii. Ţinând seama de operaţiile algebrice de adunare şi înmulţire ale funcţiilor, în cele de mai jos precizăm compatibilitatea lor cu proprietăţile de paritate şi imparitate. Fie $f, g : A \to \mathbb{R}$ şi $f + g$, $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$, funcţiile sumă şi produs:

1) Dacă f, g sunt funcţii pare (impare), atunci $f + g$ este pară (impară);

2) Dacă f, g sunt funcţii pare (impare), atunci $f \cdot g$ este pară;

3) Dacă f, g au parităţile diferite, atunci $f \cdot g$ este impară;

4) Fie $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$, $h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$, $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că g este pară, iar h este impară. În plus, $f(x) = g(x) + h(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Probleme propuse

1. Să se stabilească paritatea funcţiilor de mai jos.

1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(k) = (-1)^{k(k+1)}$; 2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x$; 3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$;

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$; 5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + |x|$; 6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1| + |x+1|$;

7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$; 8) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$; 9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|+3}$;

10) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \in [-1.0] \\ 1-2x, & x \in (0,1] \end{cases}$.

2. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$, este impară şi să se calculeze $f(-2009)+f(-2008)+\ldots+f(0)+\ldots+f(2008)+f(2009)$ şi $\prod_{k=-2009}^{2009} f(k)$.

3. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x)-2f(-x)=x^4+x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, este pară şi să se calculeze $\prod_{k=-100}^{100} f(k)$.

4. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $2f(x)-3f(-x)=x^3+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, este impară şi să se calculeze $\prod_{k=-10}^{10} f(k)$.

5. Determinaţi simetricele punctelor $A(1,5)$, $B(-2,1)$, $C(-3,-2)$, $D(2,-1)$ în raport cu Oy şi apoi în raport cu punctele $O(0,0)$ şi $S(2,3)$.

6. Determinaţi simetricele punctelor $A(3,1)$, $B(5,3)$, $C(2,0)$, $D(0,-3)$ în raport cu dreapta $x=3$ şi apoi în raport cu dreapta $y=3$.

Funcţii periodice

O categorie importantă de funcţii o constituie funcţiile periodice, care modelează fenomene, procese care se repetă identic după o perioadă de timp $T>0$.

Definiţie. Fie $f:A\to R$, $A\subseteq\mathbb{R}$. Spunem că funcţia f se numeşte **periodică**, dacă există $T>0$, astfel încât $\forall x\in A$ să avem $x+T\in A$ şi $f(x+T)=f(x)$.

Numărul T se numeşte **perioadă** a funcţiei f.

Dacă există o cea mai mică perioadă $T>0$, atunci aceasta se numeşte **perioadă principală** a funcţiei f.

Exemple. 1. (Funcţia lui Dirichlet.) Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ are perioadă orice $T\in\mathbb{Q}_+^*$.

Într-adevăr, fie $T\in\mathbb{Q}_+^*$ şi $x\in\mathbb{Q}$, atunci $f(x+T)=f(x)=1$, iar dacă $x\notin\mathbb{Q}$, atunci $x+T\notin\mathbb{Q}$ şi $f(x+T)=f(x)=0$. Deci $\forall x\in\mathbb{R}$ se verifică egalitatea $f(x+T)=f(x)$.

Cum mulţimea $\{T|T\in\mathbb{Q}_+^*\}$ nu are cel mai mic element, nu putem vorbi de perioadă principală în cazul acestei funcţii.

2. (Funcţia parte fracţionară) Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}=x-[x]$, numită funcţia parte fracţionară este periodică, de perioadă principală $T=1$.

Avem $f(x+1)=\{x+1\}=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=f(x)$.

Faptul că o funcţie este periodică, ne permite să reducem studiul unor proprietăţi la un interval de lungimea unei perioade T, de exemplu $[0,T)$. Dacă o proprietate are loc pe intervalul $(a,b)\subset[0,T)$, atunci submulţimea lui $\mathbb{R}$ pe care această proprietate este adevărată, se obţine adăugând la capetele intervalului (a,b) multiplu de T, adică $(a+kT,b+kT)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Această ultimă afirmaţie este adevărată, deoarece are loc următoarea:

Propoziţie. Dacă $f:A\to\mathbb{R}$ este periodică, de perioadă T, atunci $\forall x\in A$ şi $\forall k\in\mathbb{Z}$, astfel încât $x+kT\in A$, avem: $f(x+kT)=f(x)$.

Avem, succesiv, $f(x)=f(x+T)=f((x+T)+T)=f(x+2T)=\ldots$ şi $f(x+T)=f(x)=f(x-T)=f(x-2T)=\ldots$.

Graficul unei funcţii periodice este suficient să fie trasat pe un interval de lungimea unei perioade T, iar generarea lui pe tot domeniul de definiţie se face translatându-l la stânga şi la dreapta, de-a lungul axei Ox, pe intervale de lungimea T.

De exemplu, graficul funcţiei parte fracţionară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}=x-[x]$ $x\in[0,1)$, $[x]=0$ (şi $f(x)=x$; $x\in[1,2)$, $[x]=1$ şi $f(x)=x-1$; $x\in[-1,0)$, $[x]=-1$ şi $f(x)=x+1\ldots$) este suficient să-l trasăm pe intervalul $[0,1)$, când $f(x)=x$. Se obţine uşor trasarea graficului pe $\mathbb{R}-[0,1)$ (fig. 26).

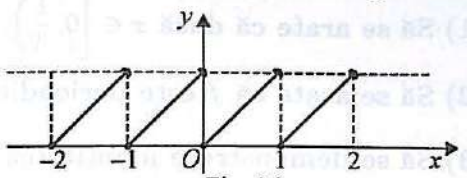


Fig. 26

Problemă rezolvată

Arătaţi că, dacă graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are două axe de simetrie, $x=a$, $x=b$, $b>a$, atunci funcţia f este periodică.

R. Scriem condiţia ca dreptele $x=a$, $x=b$ să fie axe de simetrie pentru graficul lui f. Avem (vezi lecturi grafice) $f(a-x)=f(a+x)$, $f(b-x)=f(b+x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Cu acestea are loc şirul de egalităţi:

$f(x)=f(x+a-a)=f(a+x-a)=f(a-(x-a))=f(2a-x)=f(2a-x-b+b)=f(b+2a-x-b)=$
$=f(b-(2a-x-b))=f(x+2(b-a))$.

Deci $T=2(b-a)>0$ este perioada funcţiei.

Probleme propuse

1. 1) **Fie $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$, $f(n)=$ ultima cifră a lui 2^n. Să se arate că f este periodică, având perioada principală $T_0=4$ şi apoi să se calculeze $S=\sum_{n=1}^{100}f(n)$.**

2) **Dacă $\frac{1}{7}=0,a_1a_2\ldots a_k\ldots$, iar $f(k)=a_k$, atunci calculaţi $\sum_{k=1}^{2008}f(k)$.**

2. **Fie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$, $f(k)=$ rstul împărţirii lui k prin 5. Să se arate că f este periodică, având perioada principală $T_0=5$ şi apoi să se calculeze $S=\sum_{k=-100}^{100}f(k)$.**

3. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1,x\in\mathbb{Z};2,x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z})$. Arătaţi că orice $T\in\mathbb{Z}$ este perioadă a lui f, dar $T\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ nu este perioadă. Determinaţi perioada principală T_0. Să se calculeze $S=\sum_{k=1}^{100}f(\sqrt{k})$.**

4. **Fie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-2,x=2k;2,x=2k+1,k\in\mathbb{Z})$. Să se arate că $T\in\mathbb{Z}$, T par, este perioadă pentru f şi $T_0=2$ este perioada principală.**

5. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-1,x\in\mathbb{Q};1,x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q})$. Arătaţi că f este periodică, dar nu admite perioadă principală.**

6. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-5,x\in\mathbb{Z};5,x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z})$. Arătaţi că funcţia este periodică şi precizaţi perioada principală T_0.**

7. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$, $x\in[0,2)$ şi $f(x+2)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Să se calculeze $f\left(\frac{10}{3}\right)$, $f\left(-\frac{39}{5}\right)$, $f(2009)$ şi $S=\sum_{k=0}^{100}f(k)$.**

8. **Arătaţi că pentru funcţiile de mai jos perioada este cea indicată alăturat.**

1) $f(x)=\{3x\}$, $T_0=\frac{1}{3}$; 2) $f(x)=\left\{\frac{x}{3}\right\}$, $T_0=3$.

9. **Se consideră funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]-[3x]$.

1) Să se arate că dacă $x\in\left[0,\frac{1}{3}\right)$, **atunci** $f(x)=0$.

2) Să se arate că f **este perioadică, de perioadă** $T_o=\frac{1}{3}$.

3) Să se demonstreze identitatea lui Hermite: $[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

10. **Dacă** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **cu** $f(x+3)\le f(x)+3$ **şi** $f(x+2)\ge f(x)+2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, **atunci** $g(x)=f(x)-x$ **este periodică** ($g(x+6)\le g(x)$, $g(x+6)\ge g(x)$).

Funcţii particulare

1. Funcţia constantă

Definiţie. O funcţie $f:A\to B$ se numeşte **funcţie constantă** dacă mulţimea $\operatorname{Im} f$ se reduce la un singur element.

Exemple. 1) Funcţia $f:\{-2,-1,0,1\}\to\{-1,0,3\}$ definită prin $f(x)=0$, $\forall x\in A$ este o funcţie constantă căci $\operatorname{Im} f=\{0\}$. Diagrama cu săgeţi a lui f este redată în fig. 27.

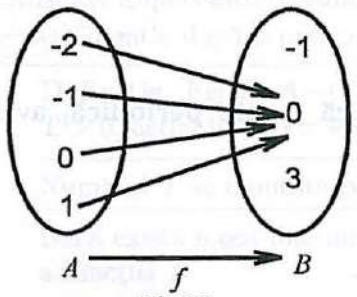


Fig.27

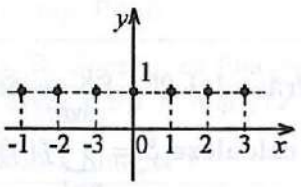


Fig. 28

2) Funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$, $f(x)=1$, $\forall x\in\mathbb{Z}$ este o funcţie constantă căci $\operatorname{Im} f=\{1\}$. Graficul acestei funcţii este redat în fig. 28 şi este format din puncte situate pe aceeaşi dreaptă orizontală de ecuaţie $y=1$.

3) Funcţia $\operatorname{sgn}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ nu este o funcţie constantă deoarece $\operatorname{Im} f=\{-1,0,1\}$ are mai mult de un element (aici trei elemente). Dar restricţiile acestei funcţii pe mulţimile $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$ sunt funcţii constante deoarece $\operatorname{Im} f_{|(-\infty,0)}=\{-1\}$ şi respectiv $\operatorname{Im} f_{|(0,\infty)}=\{1\}$.

2. Funcţia identică a unei mulţimi

Definiţie. Fie $A\neq\emptyset$. Funcţia $f:A\to A$, $f(x)=x$, $\forall x\in A$ se numeşte **funcţia identică** a mulţimii A.

Notaţie. Pentru funcţia identică a mulţimii A, utilizăm notaţia $1_A:A\to A$, $1_A(x)=x$, $\forall x\in A$.

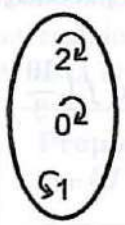


Fig. 29

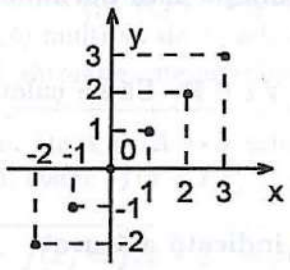


Fig.30

Observaţie. Pe diagrama cu săgeţi a aplicaţiei identice 1_A a mulţimii A avem o buclă pentru fiecare element din A. Dacă $A=\{0,1,2\}$, atunci diagrama cu săgeţi arată ca în fig. 29.

Exemple. Funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$ este aplicaţia identică a mulţimii $\mathbb{Z}$. Deci $f=1_{\mathbb{Z}}$. Graficul acestei funcţii este redat în fig. 30.

3. Funcţia caracteristică a unei mulţimii

Fie $X \neq \emptyset$ şi $\mathcal{P}(X) = \{A \subseteq X\}$, clasa tuturor submulţimilor lui X.

Pentru fiecare $A \in \mathcal{P}(X)$ definim **funcţia caracteristică a mulţimii** A,

$$\varphi_A : X \to \{0,1\}, \quad \varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \notin A. \end{cases}$$

Reciproc, fiecărei funcţii caracteristice i se asociază o unică mulţime din $\mathcal{P}(X)$.

Deci (demonstraţia nu este riguroasă) avem atâtea elemente în $\mathcal{P}(X)$, câte funcţii se pot defini pe X cu valori în $\{0,1\}$. Se ştie că $n(\mathcal{P}(X)) = 2^{n(X)}$.

Proprietăţi ale funcţiei caracteristice. 1) $\varphi_\Phi = 0$; 2) $\varphi_X = 1$; 3) $\varphi_A \cdot \varphi_A = \varphi_A$; 4) $A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi_A \leq \varphi_B$; $A = B \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$ - reprezintă un criteriu de a demonstra că două mulţimi sunt egale; 5) $\varphi_{A-B} = \varphi_A(1-\varphi_B)$; $\varphi_{\complement A} = 1-\varphi_A$; 6) $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A \cdot \varphi_B$; 7) $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A\varphi_B$; 8) $\varphi_{A\Delta B} = \varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A\varphi_B$, unde $A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$ este diferenţa simetrică a mulţimilor A, B.

Monotonia funcţiilor numerice. Intervale de monotonie

Problema care ne interesează în continuare este aceea a modului în care o funcţie numerică $f : A \to B$ $A, B \subseteq \mathbb{R}$ îşi modifică valoarea atunci când se modifică argumentul său. Mai precis dacă între două argumente oarecare $x_1, x_2 \in A$, avem relaţia $x_1 < x_2$, atunci ce relaţie avem între valorile funcţiei în aceste puncte, $f(x_1)$ şi $f(x_2)$. Este interesantă situaţia în care funcţia f păstrează relaţia de ordine dintre argumente, adică $f(x_1) < f(x_2)$ (sau $f(x_1) \leq f(x_2)$) sau funcţia f schimbă relaţia de ordine dintre argumente, adică $f(x_1) > f(x_2)$ (sau $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Definiţii. Fie $f : A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ şi $I \subseteq A$.

1) Spunem că funcţia f este **strict crescătoare pe** I dacă şi numai dacă:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x_1, x_2 \in I \\ x_1 < x_2 \end{array}\right] \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Spunem că funcţia strict crescătoare „conservă" relaţia de ordine dintre argumente şi pentru valorile funcţiei în aceste puncte.

Faptul că f este strict crescătoare pe I se marchează într-un tabel de forma:

x	I
$f(x)$	$\nearrow$ $\nearrow$ $\nearrow$

2) Spunem că funcţia f este **strict descrescătoare pe** I dacă şi numai dacă:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x_1, x_2 \in I \\ x_1 < x_2 \end{array}\right] \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Faptul că f este strict descrescătoare pe I se marchează într-un tabel de forma:

x	I
$f(x)$	$\searrow$ $\searrow$ $\searrow$

O funcţie **strict crescătoare pe** I sau **strict descrescătoare pe** I se numeşte **funcţie strict monotonă pe** I.

1') Spunem că funcţia f este **crescătoare pe** I dacă şi numai dacă:

$$\left.\begin{array}{l}\forall x_1, x_2 \in I \\ x_1 < x_2\end{array}\right] \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

2') Spunem că funcţia f este **descrescătoare pe** I dacă şi numai dacă:

$$\left.\begin{array}{l}\forall x_1, x_2 \in I \\ x_1 < x_2\end{array}\right] \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

O funcţie **crescătoare pe** I sau **descrescătoare pe** I se numeşte **funcţie monotonă pe** I.

Spunem că funcţia strict descrescătoare schimbă relaţia de ordine dintre argumente pentru valorile funcţiei.

Dacă f este **strict monotonă** (sau **monotonă**) pe A (deci pe domeniul de definiţie), atunci spunem simplu că f este **strict monotonă** (sau **monotonă**) fără a mai indica mulţimea.
O funcţie **strict monotonă** (**monotonă**) pe A rămâne de aceeaşi monotonie pe orice submulţime a lui A.

A studia monotonia unei funcţii $f : A \to \mathbb{R}$ revine la a preciza:
1) submulţimea lui A pe care f este **strict crescătoare** (sau **crescătoare**) şi
2) submulţimea lui A pe care f este **strict descrescătoare** (sau **descrescătoare**).

Pentru a proba că $f : A \to \mathbb{R}$ **nu este monotonă** pe A, găsim $x_1, x_2, x_3 \in A$, $x_1 < x_2 < x_3$ şi arătăm că $f(x_1) \leq f(x_2) \geq f(x_3)$ sau $f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$.

Procedee pentru studiul monotoniei unei funcţii

1. Procedeul diferenţei valorilor

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ şi $I \subseteq A$. Pentru a studia monotonia funcţiei f pe I se consideră două elemente arbitrare $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ şi se calculează diferenţa $f(x_2) - f(x_1)$. Se compară această diferenţă cu zero.
Dacă $f(x_2) - f(x_1) > 0$, adică $f(x_1) < f(x_2)$, atunci f este strict crescătoare pe I. La nivelul interpretării geometrice, graficul lui f „urcă" privit de la stânga la dreapta, aşa cum am considerat şi argumentele $x_1 < x_2$ (fig. 31, a)).
Dacă $f(x_2) - f(x_1) < 0$, adică $f(x_1) > f(x_2)$, atunci f este strict descrescătoare pe I (fig. 31, b)). În acest caz, graficul lui f „coboară" privit de la stânga la dreapta.

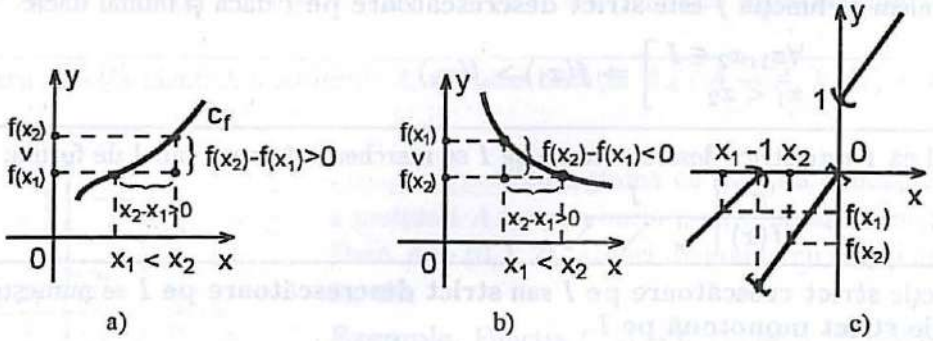


Fig. 31

Exemple. 1) Fie funcţiile f, g definite prin tabelele de valori:

a)
x	-3	-1	0	5
$f(x)$	-6	-3	1	4

b)
x	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	2
$g(x)$	1	1	$\frac{3}{2}$	4	4

În cazul a) avem $-3 < -1 < 0 < 5$ şi $f(-3) < f(-1) < f(0) < f(5)$, ceea ce arată că f este strict crescătoare. Tabelul de valori se poate completa cu monotonia funcţiei obţinându-se **tabelul de variaţie a funcţiei.**

x	-3		-1		0		5
$f(x)$	-6	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	1	$\nearrow$	4

În cazul b) avem $-\frac{3}{2} < -1 < 0 < 1 < 2$ şi $g\left(-\frac{3}{2}\right) = g(-1) = 1 < g(0) = \frac{3}{2} < g(1) = g(2) = 4$, adică g este crescătoare. Tabelul de variaţie a funcţiei g este:

x	$-\frac{3}{2}$		-1		0		1	2
$g(x)$	1		1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	4	4

2) Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie strict descrescătoare, atunci stabiliţi semnul diferenţelor: $f(-5) - f(-1)$, $f(6) - f(1)$.

Cum $-5 < -1$, iar f este strict descrescătoare, atunci $f(-5) > f(-1)$ şi deci $f(-5) - f(-1) > 0$. Din $1 < 6$ şi f strict descrescătoare rezultă $f(1) > f(6)$, adică $f(6) - f(1) < 0$.

3) Pentru a studia monotonia funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$, se procedează astfel. Se consideră $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ şi se calculează diferenţa $f(x_2) - f(x_1) = 3x_2 - 1 - (3x_1 - 1) = 3(x_2 - x_1) > 0$. De aici $f(x_1) < f(x_2)$, care arată că f este funcţie strict crescătoare.

Tabelul de variaţie a funcţiei arată astfel:

x	$-\infty$		∞
$f(x)$		$\nearrow$ $\nearrow$	

4) Fie funcţia multiformă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, al cărei grafic este prezentat în figura 31, c). Pe intervalele $(-\infty, -1)$, $[-1, 0]$, $(0, \infty)$ funcţia este strict crescătoare. Dar nu se poate trage concluzia că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr, luând $x_1 < -1 \leq x_2$, x_1, x_2 „apropiate" de -1 avem $f(x_1) > f(x_2)$.

Pentru a proba că o funcţie multiformă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq a \\ h(x), & x > a \end{cases}$ este **strict crescătoare pe** $\mathbb{R}$ se procedează astfel:

1) se arată că f este strict crescătoare pe $(-\infty, a]$; 2) se arată că f este strict crescătoare pe (a, ∞);

3) pentru $x_1 \in (-\infty, a]$ şi $x_2 \in (a, \infty)$ (are loc cerinţa $x_1 < x_2$) se arată că $f(x_1) < f(x_2)$.

Acum se poate afirma că $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ implică $f(x_1) < f(x_2)$.

Observaţie. Formulaţi cerinţele ca f să fie strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

5) Să arătăm că funcţia $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nu este strict monotonă. Pentru aceasta să găsim trei numere $x_1, x_2, x_3 \in [-2, 3]$, $x_1 < x_2 < x_3$ pentru care arătăm că $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ sau $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Alegem $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ când $f(-1) = 1 > f(0) = 0 < f(2) = 4$.

În încercarea de a studia monotonia lui f considerăm $x_1, x_2 \in [-2, 3]$ şi calculăm diferenţa $f(x_2) - f(x_1)$. Avem: $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$. Dacă $x_2 - x_1 > 0$, atunci despre celălalt factor, $x_2 + x_1$, nu putem afirma nimic în legătură cu semnul lui. Pentru $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ avem $x_1 + x_2 = -1 < 0$, iar dacă $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, atunci $x_2 + x_1 = 1 > 0$. Din acest motiv nu putem preciza monotonia lui f pe întreg intervalul $[-2, 3]$. Dacă însă luăm restricţia lui f la $[-2, 0]$, atunci factorul $x_1 + x_2$, care apare în diferenţa $f(x_2) - f(x_1)$, este negativ şi deci $f(x_2) - f(x_1) < 0$, adică $f(x_1) > f(x_2)$. Aceasta arată că pe $[-2, 0]$, f este strict descrescătoare. Dacă se ia restricţia lui f la $[0, 3]$, atunci factorul $x_1 + x_2 > 0$ şi deci $f(x_2) - f(x_1) > 0$, adică $f(x_1) < f(x_2)$, când f este strict crescătoare. Intervalele $[-2, 0]$, $[0, 3]$ sunt intervalele de monotonie ale funcţiei.

2. Procedeul raportului de variaţie: $R(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie numerică, $I \subseteq A$. Pentru studiul monotoniei lui f pe I am luat, prin primul procedeu, $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ şi am comparat diferenţa $f(x_2) - f(x_1)$ cu zero.
Procedeul care urmează a fi prezentat pentru a proba monotonia funcţiei f pe I utilizează raportul:

$R(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, numit **raportul de variaţie asociat funcţiei** f **şi numerelor** x_1, x_2 **sau rata creşterii** (dacă $R > 0$) sau **descreşterii** (dacă $R < 0$) a lui f.

Diferenţa $x_2 - x_1$ se numeşte **variaţia argumentului**, iar diferenţa $f(x_2) - f(x_1)$ se numeşte **variaţia funcţiei.**

Aşadar raportul $R(x_1, x_2)$ reprezintă câtul dintre variaţia funcţiei şi variaţia argumentului.
Acum avem un rezultat privind monotonia funcţiei f pe I dat prin intermediul raportului $R(x_1, x_2)$ sub următoarea formă:

Teoremă. Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ şi $I \subseteq A$.
1) f este **strict crescătoare** pe $I \Leftrightarrow R(x_1, x_2) > 0$, $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$.
2) f este **strict descrescătoare** pe $I \Leftrightarrow R(x_1, x_2) < 0$, $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$.

1') f este **crescătoare** pe $I \Leftrightarrow R(x_1, x_2) \geq 0$, $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$.
2') f este **descrescătoare** pe $I \Leftrightarrow R(x_1, x_2) \leq 0$, $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$.

Demonstraţie. 1) Dacă f este strict crescătoare pe I, atunci pentru $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) < f(x_2)$ şi deci $R(x_1, x_2) > 0$.
Reciproc, fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ şi $R(x_1, x_2) > 0$. Cum $x_2 - x_1 > 0$ din semnul raportului se deduce $f(x_2) - f(x_1) > 0$, adică $f(x_1) < f(x_2)$, ceea ce arată că f este strict crescătoare pe I.
Analog se demonstrează celelalte echivalenţe. ■

Exemple. 1) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ (**funcţia constantă**), $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Atunci $R(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{c - c}{x_2 - x_1} = 0$, ceea ce arată că funcţia constantă poate fi gândită atât ca o funcţie crescătoare cât şi descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

2) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ şi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Raportul $R(x_1, x_2)$ are expresia

$$R(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{5x_2 - 3 - (5x_1 - 3)}{x_2 - x_1} = \frac{5(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 5 > 0,$$

ceea ce arată că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

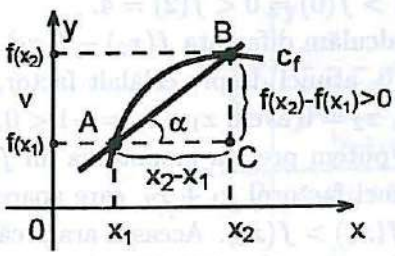


Fig. 32

Observaţie. Să remarcăm că $R(x_1, x_2) = 5$ coincide cu coeficientul 5 al lui x din structura funcţiei.

Interpretarea geometrică a raportului $R(x_1, x_2)$. Fie $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ două puncte ale graficului lui f (fig. 32).
Raportul $R(x_1, x_2)$ reprezintă panta dreptei determinată de punctele A şi B. În triunghiul dreptunghic ACB,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Operaţii cu funcţii strict monotone

La începutul acestui capitol am definit operaţiile cu funcţii numerice. Este interesant de văzut cum se comportă funcţiile strict monotone faţă de aceste operaţii. Mai precis are loc următoarea:

Teoremă. Fie $f, g : A \to \mathbb{R}$ două funcţii numerice şi $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
1) Dacă f este **strict crescătoare (strict descrescătoare)**, atunci:
- dacă $\alpha > 0$, funcţia αf este **strict crescătoare (strict descrescătoare)**;
- dacă $\alpha < 0$, funcţia αf este **strict descrescătoare (strict crescătoare)**.

(Înmulţirea unei funcţii strict monotone cu o constantă pozitivă îi păstrează monotonia, iar înmulţirea unei funcţii monotone cu o constantă negativă îi schimbă monotonia)

2) Dacă f, g sunt **strict crescătoare (strict descrescătoare)**, atunci $f + g$ este **strict crescătoare (strict descrescătoare)**.
(Suma a două funcţii strict crescătoare (descrescătoare) este o funcţie strict crescătoare (descrescătoare)).

Demonstraţie. 1) Să arătăm că dacă f este strict crescătoare şi $\alpha < 0$, atunci αf este strict descrescătoare. Fie $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$. Să arătăm că $(\alpha f)(x_1) > (\alpha f)(x_2)$. Din $x_1 < x_2$ şi f strict crescătoare rezultă $f(x_1) < f(x_2)$. Înmulţind această inegalitate cu $\alpha < 0$ se schimbă sensul relaţiei şi avem $\alpha f(x_1) > \alpha f(x_2)$ sau $(\alpha f)(x_1) > (\alpha f)(x_2)$.

2) Presupunem că f, g sunt strict crescătoare şi să arătăm că $f+g$ este strict crescătoare. Fie $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$. Să probăm $(f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$. Din $x_1 < x_2$ şi f, g strict crescătoare rezultă $f(x_1) < f(x_2)$ şi $g(x_1) < g(x_2)$. Adunând aceste ultime inegalităţi, membru cu membru, se obţine $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$ sau $(f + g)(x_1) < (f + g)(x_2)$. ■

Exemplu. Ştiind că funcţiile $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x - 2$ sunt strict crescătoare, rezultă că $f + g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x - 2$ este tot strict crescătoare. Funcţia $(-3)f$ este strict descrescătoare.

Observaţii. a) Arătaţi că dacă $f, g : A \to [0, \infty)$ sunt funcţii crescătoare (descrescătoare), atunci fg este crescătoare (descrescătoare).

b) Arătaţi că dacă $f, g : A \to (-\infty, 0]$ sunt funcţii crescătoare (descrescătoare), atunci fg este descrescătoare (crescătoare).

Valori extreme ale unei funcţii. Funcţie mărginită

Fie funcţia numerică $f : A \to \mathbb{R}$, $I \subseteq A$.

Definiţie. Dacă există $x_0 \in I$ astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I$, atunci $f(x_0)$ se numeşte **maximul funcţiei f pe mulţimea I** şi scriem $f(x_0) = \max_{x \in I} f(x)$.

Punctul x_0 pentru care se obţine valoarea maximă a lui f pe I se numeşte **punct de maxim pentru funcţia f pe I** (fig. 33).

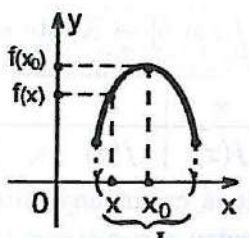


Fig. 33

Definiţii. Dacă există $x_1 \in I$ astfel încât $f(x) \geq f(x_1)$, $\forall x \in I$, atunci $f(x_1)$ se numeşte **minimul funcţiei f pe mulţimea** I şi scriem $f(x_1) = \min\limits_{x \in I} f(x)$.

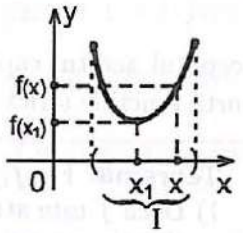


Fig. 34

Punctul x_1 pentru care se obţine valoarea minimă a lui f pe I se numeşte **punct de minim pentru funcţia f pe I** (fig. 34).

Valoarea maximă sau minimă a lui f pe I se numeşte **valoare extremă a funcţiei f pe I.**

Punctul x_0 de maxim sau x_1 de minim se numeşte **punct de extrem pentru funcţia f pe I.**

Exemple. 1) Funcţia f definită prin tabelul de valori

x	-6	-4	-1	0	1	2
$f(x)$	8	3	-1	-5	0	1

are valoarea maximă egală cu 8 şi se atinge pentru $x = -6$. Deci $\max f = f(-6) = 8$. Uneori scriem $f_{max} = 8$. Punctul $x = -6$ este punct de maxim pentru funcţie.

Valoarea minimă a lui f este egală cu -5 şi se obţine pentru $x = 0$. Deci $\min f = f(0) = -5$. Punctul $x = 0$ este punct de minim pentru funcţie.

În final, valorile extreme ale funcţiei sunt -5 şi 8, iar punctele de extrem sunt 0 şi respectiv -6.

2) Fie funcţia $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$. Am văzut că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5x - 3$ este strict crescătoare. Atunci şi restricţia lui g la $[-2, 3]$, adică f îşi păstrează monotonia. Prin urmare, f este strict crescătoare. Deci din $-2 \leq x \leq 3$ se obţine $f(-2) = -13 \leq f(x) \leq f(3) = 12$, ceea ce arată că $f(-2) = -13$ este valoarea minimă, iar $f(3) = 12$ este valoarea maximă a funcţiei f.

Observaţii. 1) Pentru $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, funcţie **strict crescătoare**, avem $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, $\forall x \in [a, b]$. Deci $f(a)$, adică valoarea lui f în capătul din stânga al intervalului $[a, b]$, dă valoarea minimă a lui f, iar $f(b)$ reprezintă valoarea maximă a lui f (fig. 35). Tabelul de variaţie este

x	a		b
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$

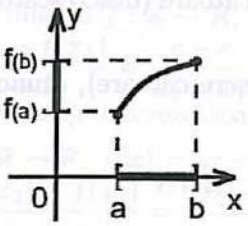


Fig. 35

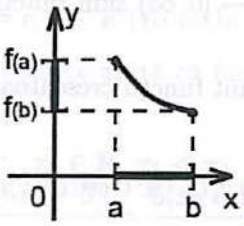


Fig. 36

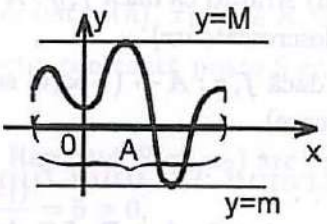


Fig. 37

2) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este **strict descrescătoare**, atunci $f(a) \geq f(x) \geq f(b)$, $\forall x \in [a, b]$. În acest caz, $f(a)$ este valoarea maximă a lui f, iar $f(b)$ este valoarea minimă a lui f (fig. 36). Tabelul de variaţie este

x	a		b
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$

În cele două cazuri analizate se spune că valorile extreme ale funcţiei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se ating la capete (adică pentru $x = a$ şi $x = b$).

3) Dacă $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, iar $x_0 \in (a, b)$ este unicul punct de extrem pentru f, atunci tabelul de variaţie a funcţiei este:

x	a		x_0		b
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

(pentru x_0 **punct de minim**) sau

x	a		x_0		b
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	

(pentru x_0 **punct de maxim**).

Definiţie. (Mărginirea unei funcţii) O funcţie numerică $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte **mărginită** dacă există două numere reale m, M astfel încât $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in A$.

Semnificaţia geometrică a unei funcţii mărginite este aceea că graficul funcţiei este cuprins între dreptele orizontale $y = m$, $y = M$ (fig. 37), ceea ce înseamnă că $\mathrm{Im} f \subseteq [m, M]$.

Dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \leq M$, $\forall x \in A$ se spune că funcţia f este **mărginită superior** pe A.
Dacă există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq f(x)$, $\forall x \in A$ se spune că funcţia f este **mărginită inferior** pe A.
Deci f **este mărginită** pe $A \Leftrightarrow$ f **este mărginită inferior şi superior.**

O funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ nu este mărginită $\Leftrightarrow$ [(este nemărginită inferior, adică $\forall m \in \mathbb{R}$, $\exists x \in A$ astfel încât $f(x) < m$) sau (este nemărginită superior, adică $\forall M \in R$, $\exists x \in A$ astfel încât $f(x) > M$)].
În cazul funcţiei nemărginite inferior spunem că funcţia poate lua valori oricât de mici, iar în cazul funcţiei nemărginite superior aceasta poate lua valori oricât de mari.

Exemple. 1) Funcţia f definită prin tabelul de valori

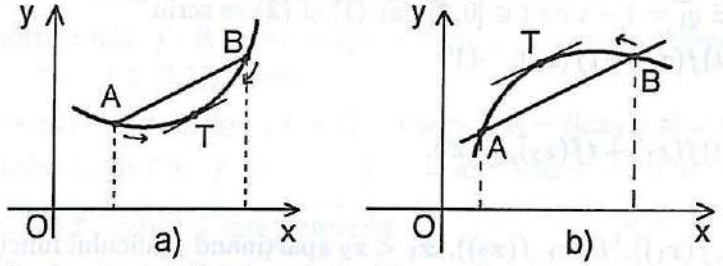
x	-2	3	5
$f(x)$	11	-3	0

este o funcţie mărginită deoarece pentru $m = -3$, $M = 11$ avem $-3 \leq f(x) \leq 11$.

2) Funcţia $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ analizată mai sus este mărginită deoarece pentru $m = -13$ şi $M = 12$ avem: $-13 \leq f(x) \leq 12$, $\forall x \in [-2, 3]$.

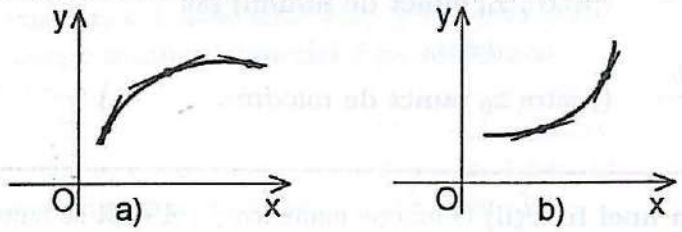
Funcţii convexe (şi concave)

După clasa funcţiilor monotone (**crescătoare** sau **descrescătoare**) pe o mulţime, trebuie subliniată clasa aşa numitelor funcţii **convexe** şi **concave**.
Atragem atenţia că abordarea riguroasă a unor concepte din acest paragraf va fi realizată în cadrul cursului de analiză matematică.
(Presupunem că în fiecare punct al graficului se poate construi tangenta la grafic).
Începem pregătirea acestui paragraf prin câteva remarci:
1) Fie o porţiune din graficul funcţiei $y = f(x)$ şi A, B două puncte de pe acest grafic. Considerăm coarda AB de pantă m_{AB}.
Dacă se „coboară" această coardă păstrând panta m_{AB} a dreptei iniţiale AB, punctele A, B se vor „apropia" pe grafic din ce în ce mai mult până coincid în punctul T. Spunem că dreapta devine tangentă în punctul T la graficul funcţiei. În această situaţie graficul este situat „deasupra" tangentei (fig. a)).



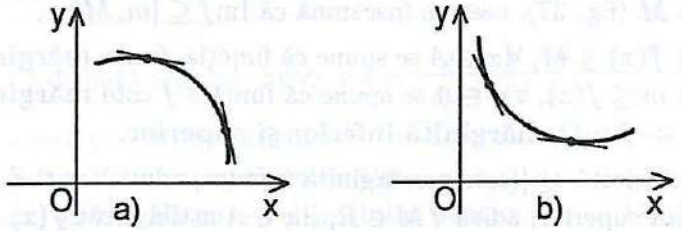
În figura b) graficul este situat sub tangenta în T la grafic.

2) O funcţie poate fi **strict crescătoare** în două moduri (fig. a)-b))



În cazul a) graficul se află sub tangenta în fiecare punct al său, iar în cazul b) graficul se află deasupra fiecărei tangente în fiecare punct al său.

De asemenea o funcţie poate fi **strict descrescătoare** în două moduri (fig. a)-b))



Aceleaşi observaţii de la funcţia strict crescătoare privind poziţia graficului în raport cu tangentele în punctele sale se pot face şi aici.

Definiţie. Fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, I interval. Se spune că funcţia f este **convexă** pe I dacă $\forall x_1, x_2 \in I$ şi $\forall q_1, q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 = 1$ avem: $f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$. (1)

Funcţia f se numeşte **concavă** pe I dacă $\forall x_1, x_2 \in I$ şi $\forall q_1, q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 = 1$ avem:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2). \quad (2)$$

Observaţii. **1)** Dacă în inegalităţile (1), (2) avem inegalitate strictă se spune că funcţia f este **strict convexă** şi respectiv **strict concavă** pe I.

2) Noţiunea de funcţie convexă (concavă) a fost introdusă de Jensen, care a pornit de la o relaţie mai particulară decât (1) sau (2) şi anume

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{ şi respectiv } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

care corespunde lui $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$.

Pentru funcţiile pe care le analizăm ($f(x) = ax+b$, $f(x) = ax^2+bx+c$), această definiţie este echivalentă cu cea dată în text.

3) Dacă f este **convexă** pe I, atunci $(-f)$ este **concavă** pe I.

4) Dacă punem $q_2 = t$, atunci $q_1 = 1 - t$ cu $t \in [0, 1]$, iar (1) şi (2) se scriu

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad (1')$$

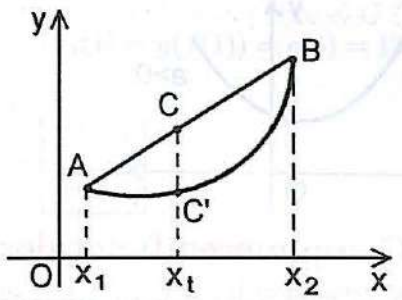
şi respectiv

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad (2').$$

Interpretare geometrică

Să considerăm punctele $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $x_1 < x_2$ aparţinând graficului funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$, $I =$ interval şi punctul $x_t = (1-t)x_1 + tx_2$.

Acest punct parcurge intervalul $[x_1, x_2]$ când $t \in [0,1]$.
Într-adevăr trebuie să arătăm că $x_1 \leq (1-t)x_1 + tx_2 \leq x_2$.
Prima inegalitate se scrie echivalent $x_1 \leq (1-t)x_1 + tx_2 \Leftrightarrow 0 \leq t(x_2 - x_1)$, evident. Analog a doua inegalitate devine $(1-t)x_1 + tx_2 \leq x_2 \Leftrightarrow (1-t)x_1 + (t-1)x_2 \leq 0 \Leftrightarrow (1-t)(x_1 - x_2) \leq 0$, adevărat deoarece $t \leq 1$ şi $x_1 < x_2$.



Dreapta AB are ecuaţia (determinată de două puncte):

$$y = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2).$$

Fie punctul C de abscisă x_t care are ordonata

$$y_C = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_t - x_2) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Punctul C' de pe graficul funcţiei are abscisa x_t şi ordonata $y_{C'} = f(x_t)$.
Pentru forma graficului prezentată în figură avem: $y_{C'} < y_C$ sau $f(x_t) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$, ceea ce corespunde funcţiei convexe.
Semnificaţia inegalităţii $f(x_t) \leq y_C$, cazul funcţiei convexe este:

> Graficul **funcţiei convexe între două puncte ale graficului** este situat sub coarda determinată de cele două puncte.

sau dacă ţinem seamă de remarcile prezentate la început

> Graficul **funcţiei convexe** este situat deasupra oricărei tangente duse într-un punct al graficului.

Semnificaţia inegalităţii $f(x_t) \geq y_C$, cazul funcţiei concave este:

> Graficul **funcţiei concave între două puncte ale graficului** este situat deasupra coardei determinate de cele două puncte.

sau

> Graficul **funcţiei concave** este situat sub orice tangentă dusă într-un punct al graficului.

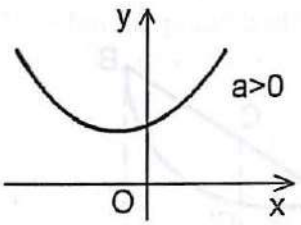
Se mai spune despre funcţia convexă că are graficul o **curbă convexă**, iar despre funcţia concavă că are graficul o **curbă concavă**.
Un punct al graficului în care se schimbă forma convexă cu concavă sau concavă cu convexă se numeşte **punct de inflexiune** al graficului.
În limbajul trivial spunem despre graficul convex, având forma secţiunii unui vas cu gura în sus, că „ţine apa", în timp ce graficul concav „nu ţine apa".

Exemple

1) Funcţia de gradul întâi, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ este atât convexă cât şi concavă deoarece (pentru $x_1 < x_2$, $t \in [0,1]$) avem:
$f((1-t)x_1 + tx_2) = a[(1-t)x_1 + tx_2] + b = (1-t)[ax_1 + b] + t[ax_2 + b] = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.

2) Funcţia de gradul al doilea, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

> 1) Dacă $a > 0$, atunci f este **convexă**.
> 2) Dacă $a < 0$, atunci f este **concavă**.



1) Dacă $a > 0$ şi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$, atunci $f((1-t)x_1+tx_2) \leq$ $\leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2) \Leftrightarrow a((1-t)x_1+tx_2)^2+b((1-t)x_1+tx_2)+c \leq$ $\leq (1-t)(ax_1^2+bx_1+c)+t(ax_2^2+bx_2+c) \Leftrightarrow a(1-t)t(x_1-x_2)^2 \geq 0$, evident.

2) Analog.

Compunerea funcţiilor

Date fiind două funcţii numerice $f, g : A \to \mathbb{R}$, am construit alte funcţii cu ele utilizând operaţiile „aritmetice": adunarea şi înmulţirea.

O altă operaţie care se poate efectua asupra a două funcţii este cea de **compunere**. Fie $f : A \to B$, $g : B \to C$, două funcţii cu următoarea particularitate: **codomeniul lui f este egal cu domeniul lui g.** Cu ajutorul acestor funcţii se poate construi o altă funcţie $h : A \to C$. Într-adevăr pentru $a \in A$, $f(a) \in B$ (fig. 38). Deci are sens să vorbim de imaginea sa prin g, de elementul $g(f(a)) \in C$. Recapitulând avem: pentru $a \in A$, există unic elementul $g(f(a)) \in C$. Prin urmare $h(a) = g(f(a))$, $a \in A$. Funcţia h astfel definită se notează $h = g \circ f$ (citim: „g compus cu f") şi reprezintă compunerea funcţiei g cu f (în această ordine). Funcţia $g \circ f$ **are domeniul lui f** (prima funcţie care acţionează în compunere) şi **codomeniul lui g** (ultima care acţionează în compunere). Acum putem formula următoarea

Definiţie. Fie A, B, C mulţimi nevide şi funcţiile $f : A \to B$, $g : B \to C$. Se numeşte **compusa funcţiei g cu funcţia f** (sau **funcţia compusă** din f şi din g), considerată în această ordine, funcţia notată $g \circ f$ (citim: „g rond f"), definită astfel: $g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$.

Observaţii. 1) Funcţia compusă $g \circ f$ a două funcţii f, g nu poate fi definită decât dacă codomeniul lui f coincide (sau este inclus) cu domeniul de definiţie a lui g.

2) Dacă $f : A \to B$, $g : B \to A$, atunci are sens $f \circ g$ şi $g \circ f$. În general însă $f \circ g \neq g \circ f$.

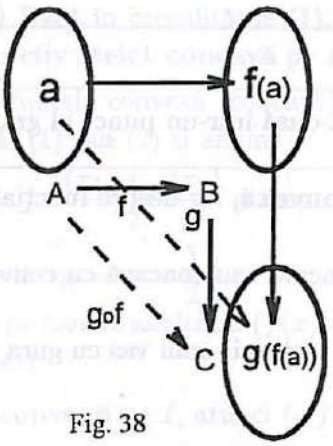


Fig. 38

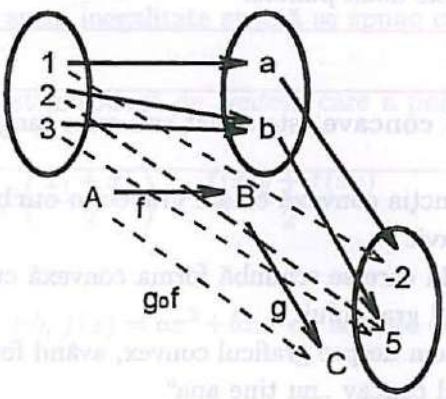


Fig. 39

3) Dacă $\mathcal{F}(A)$ reprezintă mulţimea funcţiilor definite pe A cu valori în A ($A \neq \emptyset$), adică $\mathcal{F}(A) = \{f : A \to A\}$, atunci are sens întotdeauna $f \circ g$, $g \circ f$.

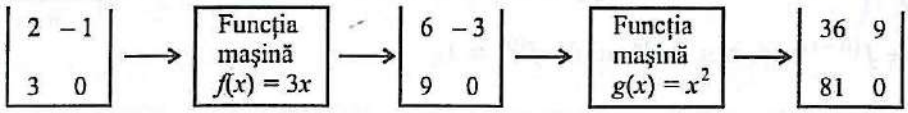
Exemple. 1) Fie funcţiile f, g definite prin diagramele cu săgeţi (fig. 39). Să observăm că fiecare element din A are o imagine unică în B prin funcţia f, şi fiecare element din B are o unică imagine în C prin funcţia g. Aplicând succesiv f şi apoi g se poate face să corespundă fiecărui element din A un unic element din C. Am marcat prin săgeţi „întrerupte" rezultatele compunerii.

Avem: $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = -2$, $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = 5$, $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = 5$.

2) Fie $f : \{-2, 0, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(-2) = 3$, $f(0) = -3$, $f(1) = 5$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 2$. Să determinăm

$g \circ f : \{-2, 0, 1\} \to \mathbb{R}$. Avem:
$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(3) = 7$, $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-3) = -11$, $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(5) = 13$.

3) Să ilustrăm compunerea funcţiilor utilizând funcţiile maşină.



Considerăm că introducem în maşina f mulţimea de numere $\{-1, 0, 2, 3\}$ şi apoi luăm ieşirile din această maşină şi le introducem în maşina g. Funcţia compusă $g \circ f$ are domeniul $\{-1, 0, 2, 3\}$ şi mulţimea de valori $\{0, 9, 36, 81\}$

4) Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x - 3$, $g(x) = 3x + 1$. Să determinăm $f \circ g$, $g \circ f$.
Evident $f \circ g, g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Avem pentru $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+1) = -(3x+1)-3 = -3x-4$ (am explicitat mai întâi pe g şi apoi pe f), iar $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-x-3) = 3(-x-3)+1 = -3x-8$ (am explicitat mai întâi pe f şi apoi pe g).
Se constată uşor că $f \circ g \neq g \circ f$ (funcţii diferite - există $x = 0$, de exemplu, pentru care $(f \circ g)(0) = -4 \neq -8 = (g \circ f)(0)$), ceea ce arată că **operaţia de compunere a funcţiilor nu este comutativă.**
Observaţie. Funcţia compusă $g \circ f$ se poate determina şi astfel (prin explicitarea lui g şi apoi a lui f): $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3f(x) + 1 = 3(-x - 3) + 1 = -3x - 8$ şi analog $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (prin explicitarea lui f şi apoi a lui g), $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -g(x) - 3 = -(3x + 1) - 3 = -3x - 4$.

Proprietăţi ale compunerii funcţiilor

Are loc următoarea:

Teoremă. 1) Compunerea funcţiilor este **asociativă**, adică
$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, $\forall f \in \mathcal{F}(A, B)$, $\forall g \in \mathcal{F}(B, C)$, $\forall h \in \mathcal{F}(C, D)$.
2) Pentru orice funcţie $f : A \to B$, avem:
$f \circ 1_A = f$, $1_B \circ f = f$, unde 1_X este funcţia identică a mulţimii X.

Demonstraţie. 1) Avem de arătat egalitatea a două funcţii. Prin urmare, trebuie să verificăm cele trei cerinţe de la egalitatea a două funcţii.
a) **Funcţiile $(h \circ g) \circ f$, $h \circ (g \circ f)$ au acelaşi domeniu de definiţie, A.**
Într-adevăr, în funcţia $(h \circ g) \circ f$, compusa funcţiei $h : C \to D$ cu funcţia $g : B \to C$ este funcţia $h \circ g : B \to D$; compusa funcţiei $h \circ g : B \to D$ cu funcţia $f : A \to B$ este funcţia $(h \circ g) \circ f : A \to D$.
Funcţia $g : B \to C$ compusă cu funcţia $f : A \to B$ este funcţia $g \circ f : A \to C$, iar compusa funcţiei $h : C \to D$ cu funcţia $g \circ f : A \to C$ este funcţia $h \circ (g \circ f) : A \to D$.
b) **Funcţiile $(h \circ g) \circ f$, $h \circ (g \circ f)$ au acelaşi codomeniu, D.**
c) Să arătăm că **punctual funcţiile coincid**, adică $[(h \circ g) \circ f](x) = [h \circ (g \circ f)](x)$, $\forall x \in A$. Avem $[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h[g(f(x))]$ şi $[h \circ (g \circ f)](x) = h[(g \circ f)(x)] = h[g(f(x))]$.
Deci orice $x \in A$ are aceeaşi imagine prin funcţiile $(h \circ g) \circ f$, $h \circ (g \circ f)$.
Operaţia de compunere a funcţiilor fiind asociativă, ne spune că nu are importanţă cum se face gruparea funcţiilor în compunere, altfel spus se poate renunţa la paranteze şi scriem simplu $h \circ g \circ f$ (în general, prezenţa parantezelor într-o scriere impune o ordine de efectuare a operaţiilor).
2) Arătăm doar prima egalitate (pentru a doua egalitate se procedează analog). Avem de demonstrat, din nou, egalitatea a două funcţii, $f \circ 1_A$ şi f.
Cele două funcţii au acelaşi domeniu de definiţie A, acelaşi codomeniu A şi pentru orice $x \in A$, $(f \circ 1_A)(x) = f(1_A(x)) = f(x)$, ceea ce arată că punctual funcţiile coincid. ■

Având în vedere că am discutat funcţii particulare, este interesant de văzut cum se comportă acestea faţă

de operaţia de compunere. Pentru simplificarea prezentării, vom aborda următorul rezultat cu funcţii din $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Aici are sens atât $g \circ f$ cât şi $f \circ g$.
Stabilim următoarea convenţie în privinţa notaţiei: $f \circ f = f^{(2)}$, $f \circ f \circ f = f^{(3)}$, $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}} = f^{(n)}$.

Să observăm că $f^{(n)} = f^{(n-1)} \circ f$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $f^{(0)} = 1_{\mathbb{R}}$.
Are loc următoarea:

Teoremă. 1) Dacă $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ sunt **funcţii pare**, atunci $g \circ f$ este **funcţie pară**. (Compunerea a două funcţii pare este funcţie pară.)

2) Dacă $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ sunt **funcţii impare**, atunci $g \circ f$ este **funcţie impară**. (Compunerea a două funcţii impare este funcţie impară.)

3) Dacă $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ au **parităţi diferite**, atunci $g \circ f$ este **funcţie pară**.

4) Dacă $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ au **aceeaşi monotonie**, atunci $g \circ f$ este **crescătoare**. (Compunerea a două funcţii de aceeaşi monotonie este o funcţie crescătoare.)

5) Dacă $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ au **monotonii diferite**, atunci $g \circ f$ este **descrescătoare**. (Compunerea a două funcţii de monotonii diferite este o funcţie descrescătoare.)

Demonstraţie. 4) Presupunem că f, g sunt descrescătoare şi să arătăm că $g \circ f$ este crescătoare, adică să probăm că dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, atunci $(g \circ f)(x_1) \leq (g \circ f)(x_2)$.
Din $x_1 < x_2$ şi f descrescătoare rezultă $f(x_1) \geq f(x_2)$. Din această ultimă inegalitate şi g descrescătoare se obţine $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$ sau $(g \circ f)(x_1) \leq (g \circ f)(x_2)$. ■

Probleme rezolvate

1) **a) Fie** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$. **Să se calculeze** $f \circ f = f^{(2)}$, $f \circ f \circ f = f^{(3)}$, $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. **Să se calculeze** $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

R. a) Avem $f \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = af(x) = a(ax) = a^2x$.
Analog, $f^{(3)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{(3)}(x) = (f^{(2)} \circ f)(x) = f^{(2)}(f(x)) = a^2 f(x) = a^3x$.
Afirmăm că, are loc propoziţia $P(x) : f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = a^n x$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Acest rezultat îl probăm prin metoda inducţiei matematice.

Verificarea. Pentru $n = 1$, $P(1) : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, este adevărată.
Demonstraţia. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Avem $P(k) : f^{(k)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = a^k x$, iar propoziţia de demonstrat este $P(k+1) : f^{(k+1)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{(k+1)}(x) = a^{k+1}x$.
Într-adevăr, avem $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)} \circ f)(x) = f^{(k)}(f(x)) = a^k f(x) = a^k(ax) = a^{k+1}x$. Deci, $P(k+1)$ este adevărată.

Concluzie. Propoziţia $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătaţi, prin inducţie matematică, propoziţia:
$P(n) : f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = a^n x + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \ldots + ab + b$.

2. **Arătaţi că nu există funţie monotonă** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **cu proprietatea:** $(f \circ f)(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
R. Într-adevăr, dacă f este monotonă, atunci $f \circ f$ este monoton crescătoare, în timp ce funcţia din membrul drept $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x$, este descrescătoare.

Probleme propuse

1. Să se calculeze $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ în cazurile:

1) $\begin{array}{c|cccc} x & -2 & 0 & 1 & 3 \\ \hline f(x) & 1 & 3 & 0 & -2 \end{array}$, $\begin{array}{c|cccc} x & -2 & 0 & 1 & 3 \\ \hline g(x) & 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}$; 2) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3$, $g(x) = 5$; 4) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4$, $g(x) = 6x$;

5) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x$, $g(x) = 3x$;

6) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ 1 - x, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = 3x - 2$;

7) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1 + x, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$, $g(x) = 2x + 1$;

8) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ x + 2, & x \not\geq 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x \not\geq 1 \end{cases}$;

9) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \geq 0 \\ -x, & x \not\geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq -1 \\ 2x, & x \not\geq -1 \end{cases}$;

10) $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ par} \\ \frac{n+1}{2}, & n \text{ impar} \end{cases}$, $g(n) = \begin{cases} 2n, & n \text{ par} \\ 2n - 1, & n \text{ impar} \end{cases}$;

11) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{2}, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{3}, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$;

12) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x\sqrt{2}, & x \in \mathbb{Q} \\ 2x, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$.

2. Dacă $f(2x + 3) = 4x - 1$, atunci determinaţi $f(3)$, $f(-1)$, $f(7)$ şi apoi $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Să se determine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în fiecare din cazurile:

1) $f(1 - x) - 2f(x) = -6x - 1$; 2) $3f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = -10x + \frac{15}{x}$, $x \neq 0$.

4. Să se determine parametrul real m dacă pentru $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2m$, $g(x) = x - 3m + 1$ avem $(g \circ f)(1) = 3$.

5. Fie $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 2x - 3$.

1) Să se determine a, b astfel încât să se poată defini $f \circ g$.

2) Să se determine a, b astfel încât să se poată defini $g \circ f$.

6. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$ să se determine două funcţii $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel ca $f = g \circ h$.

7. Să se determine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, astfel ca $(f \circ f)(x) = 4x + 3$.

8. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Să se determine a, b astfel încât $f \circ g = g \circ f$.

9. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ şi $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Să se determine g.

10. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ şi $(g \circ f)(x) = 4x - 5$, $x \in \mathbb{R}$. Să se determine g.

11. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $f \circ f = g$, unde $g(x) = x^2 - x + 1$.

1) Să se arate că $f(x^2 - x + 1) = f^2(x) - f(x) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) Să se calculeze $f(1)$.

Ecuaţie

Fie $f, g : A \to B$ două funcţii numerice.

Condiţia $f(x) = g(x)$ este o **ecuaţie** definită pe mulţimea A. Elementul x din A se numeşte **necunoscută**.
A rezolva această ecuaţie înseamnă a determina mulţimea elementelor din A care au aceeaşi imagine prin f şi g în B.
Orice element din această **mulţime** este o **soluţie** a ecuaţiei.

2.6. FUNCŢIA $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

Definiţie. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ se numeşte **funcţie afină**.
Dacă $a \neq 0$, atunci f se numeşte **funcţie de gradul întâi de coeficienţi** a, b.
Dacă $a \neq 0$ şi $b = 0$, atunci f se numeşte **funcţie liniară** ($f(x) = ax$).
Dacă $a = 0$, atunci f se numeşte **funcţie constantă** ($f(x) = b$).

Pentru funcţia de gradul întâi, ax se numeşte **termenul de gradul întâi**, iar b, **termenul liber** al funcţiei.

Ecuaţia $ax + b = 0$ se numeşte **ecuaţia ataşată funcţiei** f.

Exemple. 1) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + \sqrt{5}$ este funcţie de gradul întâi cu coeficienţii $a = -3$, $b = \sqrt{5}$.
2) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x$ este funcţie liniară cu $a = 4$, $b = 0$.
3) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3$ este funcţie constantă când $a = 0$, $b = 3$.

Observaţii. 1) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ se numeşte funcţia de gradul întâi deoarece este funcţia asociată polinomului de gradul întâi cu coeficienţi reali $aX + b$.
2) Funcţia de gradul întâi **este bine determinată dacă se cunosc coeficienţii** $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
3) Deoarece domeniul şi codomeniul lui f coincid cu $\mathbb{R}$, funcţia de gradul întâi este o **funcţie numerică**.

Reprezentarea grafică a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$

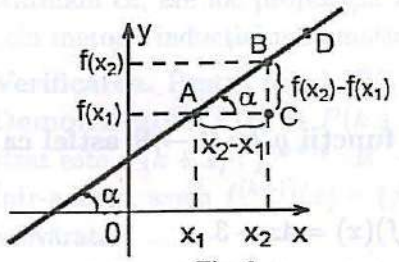


Fig. 1

Să considerăm în reperul cartezian xOy punctele $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $x_1 \neq x_2$ (fig. 1) situate pe graficul funcţiei f. Ducem prin A o paralelă la axa Ox, care intersectează perpendiculara din B pe Ox în punctul C. În triunghiul ACB avem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = a. \quad (1)$$

Fie $D(x, f(x))$ un alt punct al graficului funcţiei, diferit de A şi B. Unim A cu D şi facem aceeaşi construcţie de mai sus şi obţinem triunghiul $AC'D$.

Avem: $\operatorname{tg}\alpha' = \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \dfrac{ax + b - (ax_1 + b)}{x - x_1} = a.$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $\alpha = \alpha'$ şi deci punctele A, B, D sunt coliniare (situate pe aceeaşi dreaptă). Cum punctul D a fost ales arbitrar, deducem că toate punctele din reprezentarea grafică a funcţiei f se află pe dreapta AB. Deci,

Graficul funcţiei de gradul întâi este o dreaptă.
Ecuaţia dreptei este $y = ax + b$, $a \neq 0$.

Observaţii. 1) Dreapta AB taie axa Ox şi face cu aceasta unghiul α (unghiuri corespondente). Coeficientul

$a = \operatorname{tg}\alpha$ se numeşte **panta (coeficientul unghiular) dreptei.**

2) Ştim că orice dreaptă este bine determinată de două puncte distincte. Deci pentru trasarea ei se aleg două valori distincte $x_1 \neq x_2$ şi se calculează $f(x_1)$, $f(x_2)$. Reprezentăm în plan punctele $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ şi trasăm dreapta determinată de aceste puncte. De obicei aceste puncte sunt punctele de intersecţie cu axele de coordonate.

Intersecţia cu axa Ox: $y = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$. Deci $\left(-\frac{b}{a}, 0\right) \in Ox$.

Intersecţia cu axa Oy: $x = 0 \Rightarrow f(0) = b$. Deci $(0, b) \in Oy$.

Valoarea $f(0) = b$ se numeşte **ordonata la origine.**

Punctele în care dreapta taie axele de coordonate se numesc **tăieturile dreptei.**

Exemplu. Trasaţi graficul fiuncţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$.

R. Determinăm punctele de intersecţie ale dreptei cu axele de coordonate. Avem

$G_f \cap Ox$: $y = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Deci punctul $A(1, 0) \in Ox$.

$G_f \cap Oy$: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -1$.

Deci punctul $B(0, -1) \in Oy$.

Graficul funcţiei este cel din fig. 2.

Dacă $b = 0$, atunci graficul funcţiei liniare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \neq 0$ este o dreaptă care trece prin origine, deoarece $f(0) = 0$.

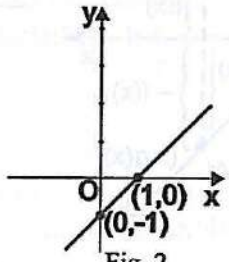


Fig. 2

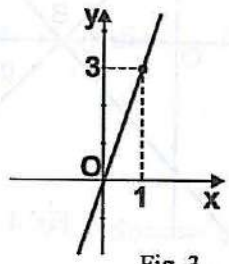


Fig. 3

Atunci, pentru a trasa graficul funcţiei liniare mai avem nevoie de încă un punct $(x_1, f(x_1))$, cu $x_1 \neq 0$.

Exemplu. Trasaţi graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$.

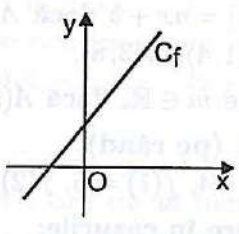
R. Graficul este o dreaptă care trece prin originea O a reperului cartezian xOy. Pentru trsarea ei mai avem nevoie de încă un punct. Fie $x = 1$, pentru care $f(1) = 3$. Graficul funcţiei este dat în fig. 3.

Asupra graficului funcţiei de gradul întâi vom reveni. În continuare ne preocupăm de studiul câtorva proprietăţi importante ale funcţiei de gradul întâi.

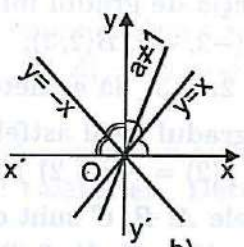
Poziţii particulare ale dreptei în plan

Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, atunci graficul lui f este o dreaptă care intersectează axele de coordonate (fig. a).

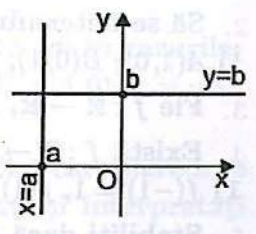
Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \neq 0$, atunci graficul lui f este o dreaptu a care conţine originea (evident, taie axele Ox, Oy în O (fig. b)). În particular, pentru



a)



b)



c)

$a = 1$, $y = x$ reprezintă **ecuaţia primei bisectoare** (bisectoarea unghiurilor $\widehat{xOy}$, $\widehat{x'Oy'}$); pentru $a = -1$, $y = -x$ reprezintă **ecuaţia celei de a doua bisectoare** (bisectoarea unghiurilor $\widehat{x'Oy}$, $\widehat{y'Ox}$); pentru $a = 0$, $b \neq 0$, $y = b$ reprezintă **ecuaţia unei drepte paralele cu Ox** (fig. c)). Dreapta de ecuaţie $x = a$

caracterizează punctele din plan care au aceeaşi abscisă egală cu a şi este **ecuaţia unei drepte paralele cu Oy**. Prin urmare proiecţiile acestor puncte pe Ox coincid cu punctul a de pe Ox (fig. c)).

Simetrizarea graficului în raport cu axele

Simetrizarea în raport cu Ox.

Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcţii de gradul întâi. Care este legătura între funcţii, astfel încât graficele lor să fie simetrice faţă de axa Ox? Dacă $A(x, f(x))$ este punct pe dreapta lui f, atunci simetricul lui în raport cu Ox este punctul $A'(x, -f(x))$ (fig. 4). Pe de altă parte, acest punct trebuie să fie pe dreapta lui g, adică $g(x) = -f(x)$. Aşadar, **condiţia ca graficele funcţiilor f, g să fie simetrice faţă de axa Ox este:** $g(x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

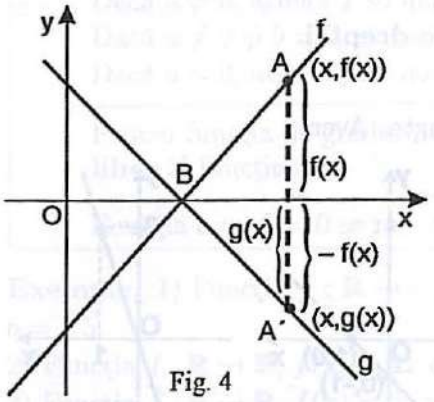


Fig. 4

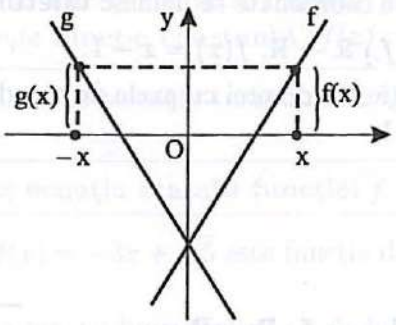


Fig. 5

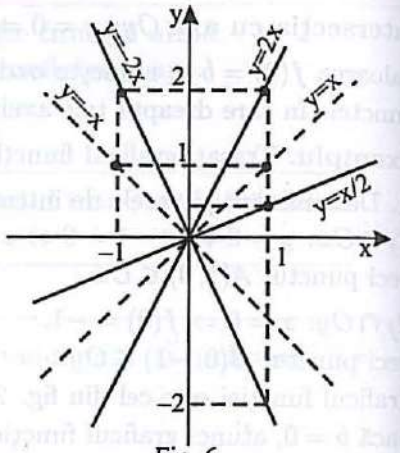


Fig. 6

Simetrizarea în raport cu axa Oy

Condiţia ca graficele funcţiilor f, g să fie simetrice în raport cu axa Oy este (fig. 5): $g(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

În fig. 6, avem mai multe grafice ale unor funcţii liniare. Dreapta de ecuaţie $y = x$, reprezintă **prima bisectoare**; dreapta $y = -x$ este **a doua bisectoare**; dreptele $y = 2x$, $y = -2x$ **sunt simetrice în raport** cu Ox şi Oy; dreptele $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$ sunt simetrice în raport cu prima bisectoare.

Probleme propuse

1. **Să se traseze graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în cazurile:**

1) $f(x) = 2x$; **2)** $f(x) = x - 1$; **3)** $f(x) = 1 - 2x$; **4)** $f(x) = \sqrt{3} - 3x$.

2. **Să se determine funcţia de gradul întâi $f(x) = ax + b$ dacă $A, B \in G_f$ în cazurile:**

1) $A(1,0)$; $B(0,1)$; 2) $A(-2,-1)$, $B(2,3)$; 3) $A(1,4)$, $B(3,8)$.

3. **Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, dacă $A(m+1, m-1) \in G_f$.**

4. **Există $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de gradul întâi astfel încât (pe rând):**

1) $f(-1) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = -3$; **2)** $f(-2) = -4$, $f(1) = 5$, $f(2) = 8$.

5. **Stabiliţi dacă punctele A, B, C sunt coliniare în cazurile:**

1) $A(-2,8)$, $B(0,2)$; $C(1,-1)$; **2)** $A(-3,3)$, $B(-1,1)$; $C(2,5)$.

6. **Să se determine panta m_{AB} a dreptei determinată de punctele:**

1) $A(1,1)$, $B(2,5)$; **2)** $A(-1,2)$, $B(1,-7)$; **3)** $A\left(-2, \frac{1}{3}\right)$, $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$; **4)** $A(\sqrt{2}, -3)$, $B(\sqrt{2}, 1)$.

7. Să se determine panta m_d a dreptei (d) care face cu axa Ox unghiul α egal cu:
1) $\alpha = 0°$; 2) $\alpha = 30°$; 3) $\alpha = 60°$; 4) $\alpha = 90°$; 5) $\alpha = 120°$.

8. Să se determine panta dreptei având ecuaţia:
1) $y = -\sqrt{3}x$; 2) $y = -3x$; 3) $y = 1 - 3x$; 4) $y = 5x - 1$; 5) $y + 2x - 1 = 0$;
6) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $x = \frac{1}{4}$; 8) $2x + 3y = 0$; 9) $5x - 2y + 3 = 0$.

9. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuaţie $(2m+1)x + (1-3m)y + 3 = 0$ să aibă panta egală cu 3.

10. Stabiliţi care din perechile de drepte sunt paralele (au aceeaşi pantă).
1) $y = 2x - 3$, $2y = 4x + 1$;; 2) $y = 3$, $y = -2$; 3) $y = 2x$, $2y = x$; 4) $x = -1$, $x = 1$;
5) $x + 2y - 3 = 0$, $3x + 6y - 5 = 0$; 6) $2x - y + 1 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$.

11. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + b$, $g(x) = ax + 3$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ dacă graficele asociate funcţiilor conţin punctul $A(-2, 1)$.

12. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - 2m)x + 4m$, $g(x) = (3m - 4)x + 2 + 2m$, $m \in \mathbb{R}$.
1) Să se determine m astfel încât $f = g$
2) Să se determine m astfel încât graficul lui f să fie paralel cu axa Ox.
3) Să se determine m astfel încât punctul $A(0, 4)$ să fie punctul de intersecţie al graficelor f, g.

13. Fie $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = (m-1)x + 2m - 3$, $m \in \mathbb{R}$.
1) Pentru ce m funcţia este constantă?
2) Arătaţi că graficele funcţiilor f_m trec printr-un punct fix.

14. Să se determine aria şi perimetrul triunghiului determinat de axele de coordonate şi dreapta $4x + 3y - 12 = 0$.

15. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Dacă $A(\sqrt{3}, \sqrt{2}) \in G_f$, atunci f este constantă.

16. Trasaţi graficele funcţiilor: 1) f şi $(-f)$, unde a) $f(x) = 5x$; b) $f(x) = -2x + 3$; c) $f(x) = 3$;
2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, $\forall x \geq 0$, dacă f este pară;
3) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$, $\forall x > 0$, dacă f este impară;
4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x$, $\forall x < 2$, dacă $x = 2$ este axă de simetrie;
5) $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$.

17. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} mx + 1, & x \leq 1 \\ 2x + n, & x > 1. \end{cases}$ Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ dacă graficul intersectează axa Ox în punctele $A(-2, 0)$, $B(3, 0)$.

18. 1) Determinaţi ecuaţia dreptei determinată de A şi de pantă m în cazurile:
a) $A(1, 2)$, $m = 3$; b) $A(-2, 3)$, $m = -2$; c) $A(-1, -1)$, $m = \sqrt{2}$.
2) Scrieţi ecuaţia dreptei care conţine punctul A şi este paralelă cu dreapta (d) în cazurile:
a) $A(-2, 3)$, $x + 2y - 1 = 0$; b) $A(4, -1)$, $4x - 2y + 3 = 0$; c) $A(-5, 0)$, $y = -1$; d) $A(4, 0)$, $x = \sqrt{5}$.

Aplicaţii practice

1. Funcţia $s(t) = 400 - 80t$ dă distanţa (în km) rămasă pentru un automobilist care parcurge distanţa Bucureşti-Blaj după t ore de la începutul călătoriei. Determinaţi şi interpretaţi intersecţia graficului lui s cu axele de coordonate.

2. Funcţia $S(t) = 1000 - 50t$ dă suma rămasă în contul bancar al unui elev după t luni. Care este semnificaţia intersecţiei graficului acestei funcţii cu axele de coordonate?

3. Temperatura (T în °C) a unei căni cu suc luată din frigider se poate modela după $T(x) = 3x - 6$, x este numărul de minute după ce cana a fost scoasă din frigider. Determinaţi intersecţia graficului cu axele de coordonate şi precizaţi semnificaţia lor.

4. După ce o paraşută se deschide, ecuaţia care modelează înălţimea paraşutistului deasupra pământului este $h(t) = -10t + 2800$, la t secunde după deschiderea paraşutei. Determinaţi intersecţia graficului lui h cu axele de coordonate şi precizaţi semnificaţia lor.

5. Există o relaţie între numărul de sunete produse de un greier pe minut (y) şi temperatura mediului înconjurător (x în °C) dată de $y = 7x - 30$. Determinaţi intersecţia graficului cu axele de coordonate şi precizaţi semnificaţia lor. Care este temperatura mediului dacă numărul de sunete produse de greier într-un minut este egal cu 117.

6. O persoană a cumpărat în 2005 un automobil cu preţul de 15000 €. După 3 ani îl vinde cu 9000€. Determinaţi panta dreptei determinată de punctul $A(2005, 15000)$, $B(2008, 9000)$ şi interpretaţi semnificaţia ei. Determinaţi funcţia liniară care arată relaţia între anul de vânzare şi preţul automobilului.

7. (Ecuaţia cererii) Presupunem că solicitarea săptămânală a unui produs este de 100 unităţi dacă preţul este de 58€/unitate şi 200 de unităţi dacă preţul este de 51€/unitate. Determinaţi ecuaţia cererii dacă ea este liniară.

8. (Dieta găinilor) S-a constatat că dieta aplicată puilor de găină determină o creştere în greutate (în grame) ca funcţie liniară după numărul z de zile, $0 \leq z \leq 50$ de la începerea aplicării dietei. Presupunem că la începutul aplicării dietei greutatea (g) a puilor este de 40 g, iar după 25 zile de dietă este 675 g.

1) Să se determine g în funcţie de z.

2) Să se determine greutatea unui pui după $z = 10$ zile.

9. (Gimnastică aerobică) Numărul minim şi maxim de bătăi ale inimii pe minut, după efectuarea unor exerciţii fizice de gimnastică aerobică de o jumătate de oră este dat de $n(a) = 0,65(220 - a)$ şi $N(a) = 0,85(220 - a)$ bătăi/min, unde a este vârsta persoanei.

1) Pentru $a = 18$ ani, determinaţi $n(a)$ şi $N(a)$.

2) Care este vârsta persoanei pentru care $N(a) = 153$?

Monotonia funcţiei de gradul întâi

Relativ la monotonia acestei funcţii are loc următoarea

Teoremă. Funcţia de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ este:

1) **strict crescătoare** dacă $a > 0$, iar tabelul de variaţie a funcţiei este:

x	$-\infty$			$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

2) **strict descrescătoare** dacă $a < 0$, iar tabelul de variaţie a funcţiei este:

x	$-\infty$			$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\searrow$	$-\infty$

Demonstraţie. Pentru a proba monotonia funcţiei vom utiliza rata creşterii (descreşterii) lui f,

$$R(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a \text{ pentru } x_1 \neq x_2.$$

Dacă $a > 0$, atunci f este strict crescătoare, iar dacă $a < 0$, atunci f este strict descrescătoare. ■

Observaţii. 1) Să reţinem că **semnul lui a precizează monotonia funcţiei de gradul întâi.**

2) Studiaţi monotonia funcţiei utilizând diferenţa valorilor funcţiei.

Interpretarea geometrică. Am văzut la proprietăţile generale ale funcţiilor că dacă f este o funcţie strict crescătoare, atunci graficul este o curbă care „urcă", iar în cazul unei funcţii strict descrescătoare,

graficul este o curbă care „coboară".
Pentru funcţia de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a>0$, graficul este o dreaptă „ascendentă" (fig. 7a)) (privind de la stânga la dreapta în lungul axei Ox).
Dacă $a<0$, atunci graficul este o dreaptă „descendentă" (fig. 7 b)).

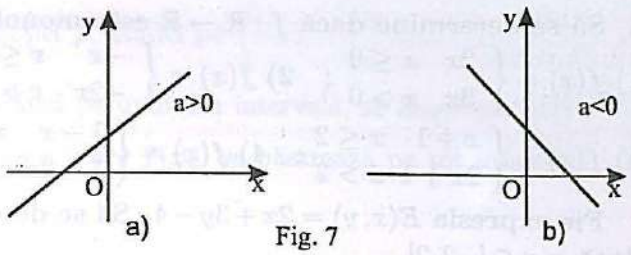


Fig. 7

3) Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este strict crescătoare (descrescătoare), iar $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$, atunci $f([\alpha,\beta])=[f(\alpha),f(\beta)]$ $(f([\alpha,\beta])=[f(\beta),f(\alpha)])$.
Într-adevăr, din $\alpha\le x\le\beta$ şi f strict crescătoare (descrescătoare), rezultă $f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)$ $(f(\alpha)\ge f(x)\ge f(\beta))$.

Exemple. 1) Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+6$, unde $a=3>0$ este o funcţie strict crescătoare cu tabelul de variaţie:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\nearrow$	9	$\nearrow$	

şi $f([-1,1])=[3,9]$.

2) Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-5x+1$, unde $a=-5<0$ este o funcţie strict descrescătoare. Tabelul de variaţie este:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	6	$\searrow$	1	$\searrow$	

şi $f([-1,0])=[1,6]$.

3) Funcţia $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=5x$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$ deoarece este restricţia funcţiei de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x$, cu $a=5>0$, care este strict crescătoare.

4) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2001x+1$. Să se stabilească semnul diferenţei $f(-3000)-f(1)$.
Cum f este strict crescătoare, iar $-3000<1$ se deduce $f(-3000)<f(1)$ şi deci diferenţa este negativă.

5) Fie $x_1,x_2,x_3\in[0,1]$. Să se arate că $x_1+x_2+x_3-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3\le 1$.

R. Se pune x în locul lui x_1 şi se obţine funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+x_2+x_3-xx_2-xx_3-x_2x_3$ sau $f(x)=(1-x_2-x_3)x+x_2+x_3-x_2x_3$ este o funcţie de gradul întâi pentru $1-x_2-x_3\neq 0$. Cea mai mare valoare pe $[0,1]$ este luată la unul din capete: $f(0)=1-(1-x_3)(1-x_2)\le 1$ sau $f(1)\le 1$. Deci $f(x)\le 1$, $\forall x\in[0,1]$.

Probleme propuse

1. **Precizaţi monotonia următoarelor funcţii** ($f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{R}$):
1) $f(x)=2x$; 2) $f(x)=3x$; 3) $f(x)=3x+5$; 4) $f(x)=1-2x$; 5) $f(x)=(m-2)x$;
6) $f(x)=(1-2m)x+3$; 7) $f(x)=\dfrac{1}{m+2}x$, $m\neq -2$; 8) $f(x)=\dfrac{m}{m+1}x+2m$, $m\neq -1$.

2. **Dacă f este liniară şi**
1) $f(2)=7$, $f(5)=12$, **atunci poziţionaţi $f(4)$ faţă de 7 şi 12. Determinaţi semnul diferenţei** $f(-100)-f(100)$;
2) $f(1)=13$, $f(4)=9$, **atunci poziţionaţi $f(3)$ faţă de 9 şi 13. Determinaţi semnul diferenţei** $f(2009)-f(2008)$;
3) $f(2)=3$, $f(5)=9$, **atunci poziţionaţi $f^{-1}(6)$ faţă de 2 şi 5. Precizaţi semnul diferenţei** $f^{-1}(4)-f^{-1}(6)$;
4) $f(5)=-1$, $f(9)=-3$, **atunci poziţionaţi $f^{-1}(-2)$ faţă de două numere. Determinaţi semnul diferenţei** $f^{-1}(-3)-f^{-1}(0)$;
5) $f^{-1}(-2)=5$, $f^{-1}(0)=-3$, **atunci poziţionaţi $f(0)$ între două numere. Determinaţi semnul diferenţei** $f(1)-f(2)$.

3. Să se determine dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este monotonă în cazurile:

1) $f(x)=\begin{cases}2x & x\le 0\\ 3x & x>0\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}-x & x\le 1\\ -2x & x>1\end{cases}$;

3) $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 2\\ 2x+1 & x>2\end{cases}$; 4) $f(x)=\begin{cases}1-x & x\le -1\\ 1-2x & x>-1\end{cases}$, $f(-1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

4. Fie expresia $E(x,y)=2x+3y-4$. Să se determine valoarea minimă şi maximă a expresiei, dacă $x,y\in[-2,2]$.

5. Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, determinaţi mulţimile scrise alături (utilizaţi $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$):

1) $f(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ 1 & x\ge -1\end{cases}$, $f((-2,-1))$, $f([-1,1))$, $f((-2,1))$, $\mathrm{Im}f$;

2) $f(x)=\begin{cases}-x+1 & x\le 1\\ 2x-1 & x>1\end{cases}$, $f([-2,1])$, $f((-2,1])$, $f((1,3])$, $f([-2,3])$; $\mathrm{Im}f$;

3) $f(x)=\begin{cases}x+2 & x\le 0\\ 3x & x>0\end{cases}$, $f([-1,0])$, $f((0,1])$, $f([-1,1])$, $\mathrm{Im}f$;

4) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\le \frac{1}{2}\\ 1-4x & x>\frac{1}{2}\end{cases}$, $f([-2,-1])$, $f([1,2])$, $f\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\right]$, $\mathrm{Im}f$.

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx-3$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie strict crescătoare şi graficul funcţiei să conţină punctul $(m,2m)$.

Semnul funcţiei de gradul întâi

Aşa cum am văzut, prin stabilirea semnului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ înseamnă determinarea valorilor $x\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x)>0$ precum şi a valorilor $x\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x)<0$. În acest scop vom utiliza soluţia ecuaţiei ataşate lui f precum şi monotonia lui f. Are loc următoarea:

Teoremă. Funcţia de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$ are zeroul $x=-\frac{b}{a}$, iar semnul funcţiei este dat în tabelul de semn

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$	semn contrar lui a		0	acelaşi semn cu a	

Numărul $x=-\frac{b}{a}$ este rădăcina ecuaţiei ataşate $ax+b=0$.

Spunem că până în rădăcină, adică pentru $x<-\frac{b}{a}$, f are semn contrar lui a, iar dincolo de rădăcină, adică pentru $x>-\frac{b}{a}$, f are semnul lui a.

Demonstraţie. Analizăm cazul $a>0$. Cazul $a<0$ se tratează analog.

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ este strict crescătoare. Deci pentru $x<-\frac{b}{a}$ rezultă $f(x)<f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$. Deci pentru $x\in\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right)$, $f(x)<0$, adică semnul lui f este contrar semnului lui a (>0). Dacă $x>-\frac{b}{a}$, atunci $f(x)>f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ şi deci pentru $x\in\left(-\frac{b}{a},\infty\right)$, $f(x)>0$, adică semnul lui f este acelaşi cu semnul lui a (>0). ■

Observaţie. Se constată că dacă am găsit zeroul funcţiei f, atunci pe $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ funcţia are un semn, iar pe $\left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$ are semn contrar. Pentru a găsi semnul pe unul din intervale, se alege un element x_1 din acest interval şi se calculează $f(x_1)$. Semnul pe care îl are $f(x_1)$ se păstrează pe tot intervalul. Pe celălalt interval avem semn contrar.

Interpretarea geometrică

Am văzut la graficul unei funcţii numerice că dacă pentru $x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) > 0$, atunci punctul $M(x, f(x))$ aparţinând graficului se află situat „deasupra" axei Ox, iar dacă $f(x) < 0$, atunci punctul este situat „sub" axa Ox (fiind valabilă şi reciproca). În fig. 8 (a,b) am marcat cu „$-$" de-a lungul dreptei faptul că funcţia ia valori negative şi cu „$+$" valorile pozitive ale funcţiei. Aceste valori sunt luate pentru x situat la stânga sau la dreapta punctului $x = -\frac{b}{a}$. În fig. 8 a) pentru $x < -\frac{b}{a}$, $f(x) < 0$, iar pentru $x > -\frac{b}{a}$, avem $f(x) > 0$. În fig. 8 b) pentru $x < -\frac{b}{a}$, avem $f(x) > 0$, iar pentru $x > -\frac{b}{a}$, avem $f(x) > 0$.

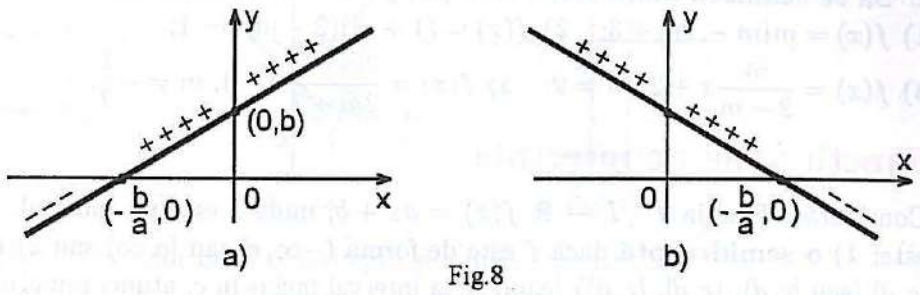


Fig.8

Pentru a obţine submulţimea lui $\mathbb{R}$ pe care $f > 0$, se proiectează pe Ox porţiunea din dreaptă situată deasupra axei Ox, iar pentru a determina submulţimea lui $\mathbb{R}$ pe care $f < 0$ se proiectează pe axa Ox porţiunea din dreaptă situată sub axa Ox.

Exemple. Să se studieze semnul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 6$. Pentru început, se determină zeroul funcţiei rezolvând ecuaţia ataşată funcţiei, $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$. Cum $a = 3 > 0$, tabelul de semn al funcţiei este:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x) = 3x - 6$		$-$	0	$+$	

Deci, $f(x) < 0$ dacă $x \in (-\infty, 2)$; $f(x) > 0$ dacă $x \in (2, \infty)$.

Altfel. După ce am determinat zeroul $x = 2$ al funcţiei, calculăm în $x = 0 \in (-\infty, 2)$ valoarea $f(0) = -6 < 0$. Deci pentru $x < 2$, $f(x) < 0$, adică funcţia ia valori negative. Dacă $x > 2$, $f(x) > 0$ (funcţia îşi schimbă semnul).

2) Să se studieze semnul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1$. Zeroul funcţiei f se obţine rezolvând ecuaţia ataşată lui f. Avem $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Cum $a = -2 < 0$, se obţine tabelul de semn al funcţiei

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x) = -2x + 1$		$+$	0	$-$	

Deci, pentru $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $f(x) > 0$, iar pentru $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, $f(x) < 0$.

Probleme propuse

1. **Să se determine semnul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:**

1) $f(x) = x - 1$; **2)** $f(x) = 2 - x$; **3)** $f(x) = 3x + 1$; **4)** $f(x) = 2 - 4x$.

2. **a) Să se determine semnul produselor ($x \in \mathbb{R}$):**

1) $x(x + 1)$; **2)** $-x(1 - x)$; **3)** $(x + 1)(x - 2)$; **4)** $(2x + 3)(4 - x)$; **5)** $x(x - 1)(x - 2)$;

b) **Să se determine semnul fracţiilor:**

1) $\frac{-1}{x+1}$, $x \neq -1$; 2) $\frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$; 3) $\frac{1-x}{x+1}$, $x \neq -1$;

3. **Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determinaţi semnul funcţiei pentru fiecare formă.**

1) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$; 2) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \geq -2 \\ 1-3x, & x < -2 \end{cases}$; 3) $f(x) = \begin{cases} 4x-3, & x < 2 \\ 2-3x, & x \geq 2 \end{cases}$.

4. **Să se studieze monotonia funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în cazurile:**

1) $f(x) = m(m-1)x + 3$; 2) $f(x) = (1+m)(2-m)x - 1$;

3) $f(x) = \frac{m}{2-m}x + 2$, $m \neq 2$; 4) $f(x) = \frac{2m-1}{2m+1}x - 3$, $m \neq -\frac{1}{2}$.

Funcţii afine pe intervale

Considerăm funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde I este un interval. Atunci graficul acestei funcţii este: 1) **o semidreaptă** dacă I este de forma $(-\infty, c]$ sau $[c, \infty)$ sau 2) **un segment** dacă I are forma $[c, d]$ (sau $[c, d)$, $(c, d]$, (c, d)) (când se ia interval închis în c, atunci punctul $M(c, f(c))$ aparţine graficului lui f, iar pentru interval deschis în c punctul $M(c, f(c))$ nu aparţine graficului lui f). Semidreptele sau segmentul au ca dreaptă suport dreapta de ecuaţie $y = ax + b$.

Dreapta de ecuaţie $y = x$ se numeşte **prima bisectoare** (a unghiurilor $\widehat{xOy}$ şi $\widehat{x'Oy'}$), iar dreapta de ecuaţie $y = -x$ se numeşte **a doua bisectoare** (a unghiurilor $\widehat{x'Oy}$ şi $\widehat{y'Ox}$).

Exemple. 1) Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$; b) $f : (-\infty, -2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x - 1$;

c) $f : [-2, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$; d) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3$; e) $f : (-1, 3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2$.

R. a) Graficul lui f este semidreapta $[AB$ (fig. 9), unde $A(1, 3)$, $B\left(\frac{3}{2}, 4\right)$.

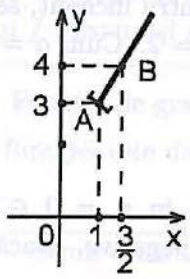


Fig. 9

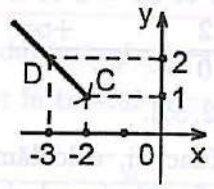


Fig. 10

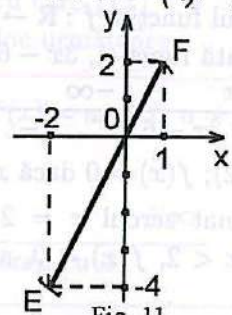


Fig. 11

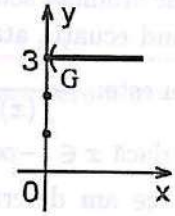


Fig. 12

b) Graficul lui f este semidreapta $(CD$, unde $C(-2, 1)$, $D(-3, 2)$ (fig. 10).

c) Graficul lui f este segmentul $[EF)$, unde $E(-2, -4)$, $F(1, 2)$ (fig. 11).

d) Graficul lui f este semidreapta paralelă cu Ox care trece prin $G(0, 3)$ (fig. 12).

e) Graficul lui f este segmentul deschis (HJ) paralel cu Ox, unde $H(-1, -2)$, $J(3, -2)$ (fig. 13).

2) Să se reprezinte grafic funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > 1 \\ -3, & x \in [-1, 1] \\ -x+2, & x < -1 \end{cases}$.

R. a) Graficul lui f pe intervalul: 1) $[1, \infty)$ este semidreapta (ce are ca dreaptă suport, dreapta de ecuaţie $y = 2x$) cu originea în $A(1, 2)$ (fig. 14); 2) $(-\infty, 1)$ este semidreapta (ce are ca suport dreapta de ecuaţie $y = 1 - x$) cu originea în $B(1, 0)$. În final, graficul lui f este format din reuniunea celor două semidrepte.

b) Pe intervalul: 1) $(1, \infty)$ graficul lui f este o semidreaptă (având ca dreaptă suport dreapta de ecuaţie

$y = 2x + 1$) cu originea în $A(1, 3)$ (fig. 15); 2) $[-1, 1]$ graficul este segmentul $[BC]$ paralel cu Ox, unde $B(-1, -3)$, $C(1, -3)$; 3) $(-\infty, -1)$ graficul este semidreapta (ce are ca dreaptă suport, dreapta de ecuaţie $y = -x + 2$) cu originea în $D(-1, 3)$.

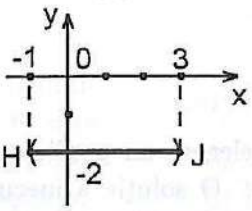


Fig. 13

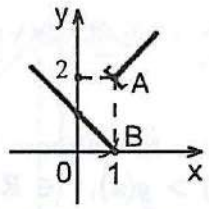


Fig. 14

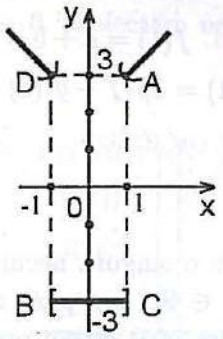


Fig. 15

Graficul lui f este format din reuniunea celor două semidrepte şi a unui segment.

Probleme propuse

1. **Să se reprezinte grafic funcţiile:**

1) $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$; 2) $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3$; 3) $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$; 4) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$; 5) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$; 6) $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x - 1$;

7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$; 8) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$;

9) $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \in [-3, 0] \\ -1, & x \in (0, 2] \end{cases}$; 10) $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \in [0, 2] \\ 2 - x, & x \in (2, 3] \end{cases}$;

11) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x \le -2 \\ 2x, & x \in (-2, 1) \\ 1 - 3x, & x \in [1, \infty) \end{cases}$; 12) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 2x, & x \in (1, 3) \\ -3x & x \ge 3 \end{cases}$;

13) $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 4x + 5, & x \le -2 \\ -3 - 2x, & x \in (-2, -1) \\ x + 2, & x \in [-1, 1] \end{cases}$;

14) $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} [x], & x \in [-5, -1] \\ 2x + 1, & x \in (-3, 3) \\ 2 - 3x, & x \in [3, 5] \end{cases}$; 15) $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \in [-1, 1] \\ -2x, & x \in (1, 2] \\ 1, & x \in (2, 3] \end{cases}$.

2. **Să se expliciteze funcţiile şi să se reprezinte grafic pe intervalul indicat.**

1) $f(x) = 1 + |x|$, $[-2, 2]$; 2) $f(x) = x + |x|$, $[-1, 1]$; 3) $f(x) = x + \sqrt{(x-2)^2}$, $[-2, 3]$;
4) $f(x) = |x| + |x - 1|$, $[-3, 2]$; 5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{4 - 4x + x^2}$, $[0, 3]$.

3. **Fie** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x - a, & x \le 2 \\ ax + 3, & x > 2 \end{cases}$. **Să se determine** $a \in \mathbb{R}$, **dacă** $f(1) = f(3)$. **Calculaţi** $f(-2)$, $f(-1)$, $f(2)$.

4. **Fie** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (ax + b, x \le 1; bx + a, x > 1)$. **Să se determine** $a, b \in \mathbb{R}$ **dacă punctele** $A(1, 1)$, $B(2, 5)$ **aparţin graficului funcţiei, apoi tasaţi graficul şi calculaţi** $f(1) + f(2) + \ldots + f(100)$.

5. **Fie** $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = (x + 3, x \le 2; 1 - x, x > 2)$. **Calculaţi** $f + g$, $(f + g)(1)$, $(f + g)(3)$, $f \cdot g$, $(f \cdot g)(-3)$, $(f \cdot g)(3)$, $3f - g$, $(3f - g)(0)$, $(3f - g)(4)$.

Aceleaşi cerinţe pentru $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - x, x \le 0; x + 2, x > 0)$, $g(x) = (x + 1, x \le 1; 2x, x > 1)$.

6. **În reperul xOy fie punctele $A(-2,0)$, $B(1,0)$ şi $M(x,0)$ variabil. Considerăm funcţia $f(x)=MA+MB$.**
1) Să se arate că $f(x)=|x+2|+|x-1|$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 2) Să se reprezinte grafic f.

R. 3. $a=-\frac{1}{4}$. 4. $f(1)=a+b=4$, $f(2)=2b+a=5\Rightarrow a=3$, $b=1$. 5 $(f+g)(x)=(3x, x\le 2; x-2, x>2)$, $(f+g)(1)=3$, $(f+g)(3)=1$. 6. $MA=\sqrt{(x+2)^2}=|x+2|$, $MB=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$.

Inecuaţii de forma $ax+b\ge(>,\le,<)\,0$. Sisteme de inecuaţii

Prin inecuaţie cu o singură necunoscută x în mulţimea $\mathbb{R}$ înţelegem un predicat unar de forma $p(x)$: „$f(x)\ge g(x), x\in\mathbb{R}$“ sau $p(x)$: „$f(x)>g(x), x\in\mathbb{R}$“, etc. O soluţie a inecuaţiei este acel număr $\alpha\in\mathbb{R}$ pentru care $p(\alpha)$ este o propoziţie adevărată, altfel spus se verifică inegalitatea $f(\alpha)\ge g(\alpha)$ sau $f(\alpha)>g(\alpha)$ etc.

A rezolva o inecuaţie pe o mulţime înseamnă a-i determina toate soluţiile în acea mulţime.

Două inecuaţii se numesc **echivalente** pe o mulţime dacă au aceeaşi mulţime de soluţii (în mulţimea dată).

Ca şi în cazul ecuaţiilor şi pentru inecuaţii acestea se transformă, aducându-se la o formă cât mai simplă prin transformări echivalente.

Cele mai utile transformări sunt: 1) $x\le y+z\Leftrightarrow x-y\le z$ **(un termen trece dintr-un membru în altul cu semn schimbat**, aici y);

2) $x\le y, a>0\Leftrightarrow(ax\le ay, a>0)$ (ceea ce înseamnă că **dacă o inecuaţie o înmulţim cu un număr pozitiv se obţine o nouă inecuaţie echivalentă cu cea dată** şi de acelaşi sens); 3) $x\le y, a<0\Leftrightarrow(ax\ge ay,\ a<0)$ **(prin înmulţirea ambilor membri ai unei inecuaţii cu un număr negativ se obţine o inecuaţie echivalentă cu cea dată, dar de sens contrar).**

Rezolvarea inecuaţiei $ax+b\ge 0, a\ne 0$

Metoda 1 (prin transformări echivalente) Distingem două cazuri după semnul lui a.

1) Dacă $a>0$, atunci avem echivalenţele: $ax+b\ge 0\Leftrightarrow ax\ge -b\Leftrightarrow x\ge -\frac{b}{a}$.

Deci mulţimea de soluţii a inecuaţiei (în $\mathbb{R}$) este $S=\left[-\frac{b}{a},\infty\right)$.

2) Dacă $a<0$, atunci inecuaţia se transformă echivalent: $ax+b\ge 0\Leftrightarrow ax\ge -b\Leftrightarrow x\le -\frac{b}{a}$.

În acest caz mulţimea de soluţii a inecuaţiei este $S=\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right]$.

Observaţie. **Dacă rezolvarea ecuaţiei se face pe o mulţime $A\subseteq\mathbb{R}$, atunci mulţimea de soluţii a inecuaţiei este $S\cap A$, cu S determinat mai sus.**

Metoda 2 (utilizând semnul funcţiei de gradul întâi). Este interesant cazul $a\ne 0$, când inecuaţia se numeşte de gradul întâi în necunoscuta x. A rezolva această inecuaţie în $\mathbb{R}$ înseamnă să găsim mulţimea de numere reale x care satisfac inegalitatea $ax+b\ge 0$, adică să determinăm acele valori reale x pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\ne 0$ este nenegativă, adică $f(x)\ge 0$. În final se cere determinarea acelor $x\in\mathbb{R}$ pentru care semnul lui f este nenegativ (problemă abordată mai sus).

Analog se rezolvă şi celelalte inecuaţii $ax+b>0, ax+b\le 0, ax+b<0, a\ne 0$.

Dacă $a=0$, inecuaţia $ax+b\ge 0$ se reduce la $0\cdot x\ge -b$ sau $0\cdot x\le b$. Dacă $b\ge 0$, atunci oricare $x\in\mathbb{R}$ o verifică şi deci $S=\mathbb{R}$. Dacă $b<0$, atunci $S=\emptyset$.

Interpretarea geometrică Am văzut că într-un reper xOy graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, este o dreaptă. Dacă pentru un $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ (fig. 16, 17), aceasta înseamnă că punctul $(x, f(x))$ este deasupra axei Ox şi reciproc, dacă punctul $(x, f(x))$ este situat deasupra axei Ox, atunci $f(x) > 0$. Prin urmare, pentru a afla x de pe Ox, pentru care $f(x) > 0$, proiectăm ortogonal punctul $(x, f(x))$ pe Ox.

Deci, pentru a vizualiza soluţiile inecuaţiei $f(x) > 0$, este suficient să proiectăm ortogonal pe Ox punctele dreptei situate deasupra axei Ox.

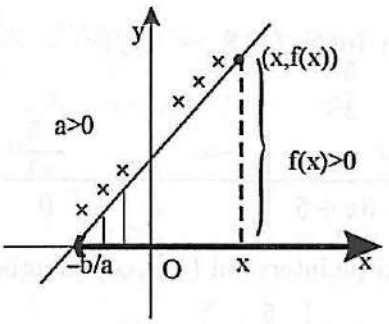


Fig. 16

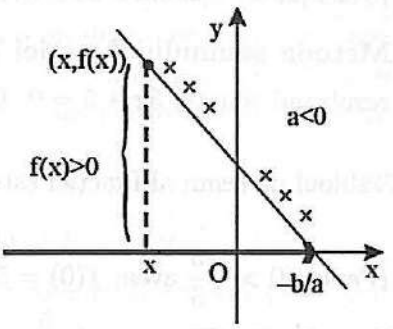
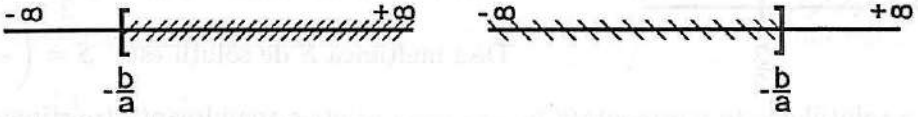


Fig. 17

O abordare similară poate fi realizată pentru inecuaţia $f(x) < 0$, când punctul $(x, f(x))$ este situat sub axa Ox.

Dacă $f(x) \geq 0$, atunci punctul $(x, f(x))$ este situat deasupra axei Ox sau pe axa Ox. Analog, dacă $f(x) \leq 0$, atunci punctul $(x, f(x))$ este situat sub axa Ox sau pe axa Ox.

Observaţie. Mulţimea soluţiilor unei inecuaţii de gradul întâi cu o necunoscută este un interval nemărginit al mulţimii $\mathbb{R}$ (dacă rezolvarea se face pe $\mathbb{R}$), iar din punct de vedere geometric este o semidreaptă a dreptei reale (zona haşurată)



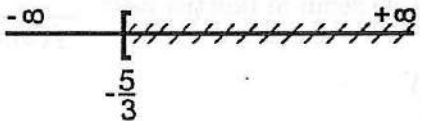
Exemple. Să se rezolve inecuaţiile: a) $3x + 5 \geq 0$; b) $-2x + 3 > 0$.

R. a) **Metoda transformărilor echivalente.** Avem inecuaţiile echivalente:

$$3x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{3}.$$

Deci mulţimea de soluţii este $S = \left[-\frac{5}{3}, \infty\right)$.

Mulţimea S a soluţiilor este reprezentată pe axa numerelor printr-o semidreaptă (porţiunea haşurată)



Interpretarea geometrică. Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 5$ este redat în fig. 18.

Observăm că soluţiile inecuaţiei sunt abscisele punctelor de pe dreaptă, care au ordonata nenegativă. Acestea sunt punctele de pe semidreapta închisă la stânga cu originea în $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ (semidreapta este desenată mai îngroşat). Proiecţia ortogonală a semidreptei pe Ox ne dă tocmai mulţimea de soluţii $\left[-\frac{5}{3}, \infty\right)$. Dacă s-ar fi cerut rezolvarea inecuaţiei pe mulţimea $(-2, 0)$, atunci mulţimea de soluţii

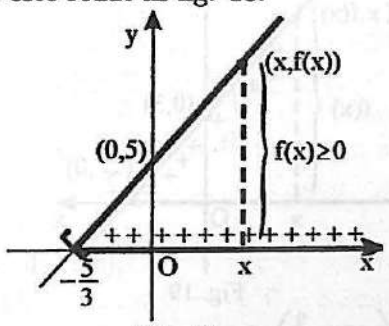


Fig. 18

ar fi egală cu $(-2,0)\cap\left[-\frac{5}{3},\infty\right)=\left[-\frac{5}{3},0\right)$ şi pe dreaptă ar fi corespuns absciselor punctelor segmentului determinat de punctele $\left(-\frac{5}{3},0\right)$ (inclusiv) şi (0,5) (exclusiv).

Proiecţia ortogonală a acestui segment pe Ox ne dă mulţimea de soluţii $\left[-\frac{5}{3},0\right)$.

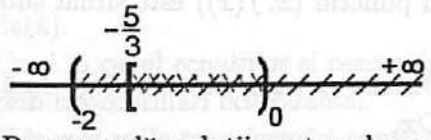
Metoda semnului funcţiei de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+5$. Zeroul funcţiei se obţine rezolvând ecuaţia $3x+5=0$. Găsim $x=-\frac{5}{3}$.

Tabloul de semn al funcţiei este:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(x)=3x+5$		$-$	0	$+$	

(Pentru $0>-\frac{5}{3}$ avem $f(0)=5>0$ şi deci pe intervalul $(-\frac{5}{3},\infty)$ funcţia are acelaşi semn ca în $x=0$).

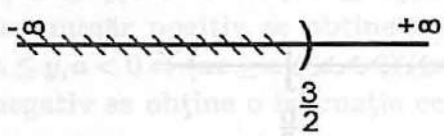
Deci $f(x)\geq 0$ dacă $x\in[-\frac{5}{3},\infty)$. În final, $S=\left[-\frac{5}{3},\infty\right)$.



Dacă rezolvarea inecuaţiei se face în mulţimea $(-2,0)$, atunci din mulţimea de soluţii de pe $\mathbb{R}$, se vor reţine acelea care sunt situate în această mulţime.

Pe axa reală, soluţii sunt acelea care fac parte din zona dublu haşurată.

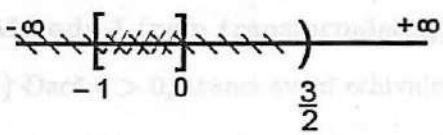
b) **Metoda transformărilor echivalente.** Inecuaţia se transformă echivalent:



$$-2x+3>0\Leftrightarrow -2x>-3\Leftrightarrow x<\frac{3}{2}.$$

Deci mulţimea S de soluţii este $S=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$.

Mulţimea S a soluţiilor este reprezentată pe axa reală printr-o semidreaptă (porţiunea haşurată).



Dacă rezolvăm inecuaţia pe mulţimea $[-1,0]$, atunci din mulţimea de soluţii de pe $\mathbb{R}$, se reţin acelea care aparţin mulţimii $[-1,0]$. Pe axa reală, soluţii sunt acelea care aparţin zonei dublu haşurate.

Metoda semnului funcţiei de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+3$.

Zeroul funcţiei este $x=\frac{3}{2}$. Tabelul de semn al funcţiei este:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)=-2x+3$		$+$	0	$-$	

De aici $f(x)>0$ dacă $x\in(-\infty,\frac{3}{2})$.

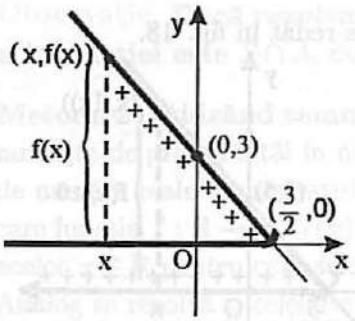


Fig. 19

Interpretare geometrică. Graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+3$ este redat în fig. 19.

Soluţiile inecuaţiei sunt abscisele punctelor de pe dreaptă, care au ordonata strict pozitivă. Punctele acestea formează semidreapta, având originea punctul $\left(\frac{3}{2},0\right)$ (exclusiv) (pe figură, această semidreaptă apare desenată mai gros). Proiecţia ortogonală a semidreptei pe axa Ox ne dă tocmai intervalul $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$. Dacă rezolvarea inecuaţiei se realiza pe intervalul $[-1,0]$, atunci soluţiile inecuaţiei constituie

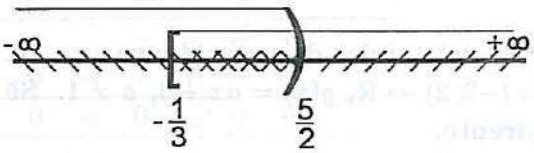
mulţimea $[-1,0] \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) = [-1,0]$, iar pe dreaptă ar fi corespuns absciselor punctelor segmentului închis, determinat de punctele $(-1, f(-1) = 5)$ şi (0,3).
Proiecţia acestui segment pe Ox ne dă mulţimea de soluţii $[-1,0]$.

Inecuaţii care se reduc la inecuaţii de forma $ax + b \geq 0$

Dacă necunoscuta x figurează în cei doi membri ai inecuaţiei se prelucrează echivalent inecuaţia. Utilizând transformările echivalente prezentate la începutul acestui paragraf se aduce inecuaţia la una din formele $ax + b \geq (>, \leq, <)\ 0$, $a \neq 0$ şi se aplică tehnicile de rezolvare prezentate mai sus pentru aceste inecuaţii.
Exemple. Să se rezolve inecuaţiile:
a) $3x + 1 \geq -x + 5$; b) $\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} + 1 < \frac{1}{6}$.
R. a) Scriem inecuaţia echivalent: $3x + 1 \geq -x + 5 \Leftrightarrow 4x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 1$. Deci $S = [1, \infty)$.
b) Inecuaţia devine echivalent: $\frac{x+1}{2} - \frac{1}{3} + 1 < \frac{1}{6} \Leftrightarrow 3(x+1) - 2x + 6 < 1 \Leftrightarrow 3x + 3 - 2x + 6 < 1 \Leftrightarrow x < -8$.
Prin urmare mulţimea de soluţii a inecuaţiei este $S = (-\infty, -8)$.

Sisteme de inecuaţii de gradul întâi

Un sistem de inecuaţii de gradul întâi este format din două sau mai multe inecuaţii de gradul întâi.
O soluţie a sistemului este un număr real α care verifică fiecare inecuaţie a sistemului. Prin urmare mulţimea soluţiilor sistemului se obţine intersectând mulţimile soluţiilor inecuaţiilor care compun sistemul.
Exemplu. Să se rezolve sistemul de inecuaţii: $\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ -2x + 5 > 0. \end{cases}$
R. Prima inecuaţie a sistemului are mulţimea de soluţii $S_1 = \left[-\frac{1}{3}, \infty\right)$, iar a doua inecuaţie are mulţimea de soluţii $S_2 = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$.
Mulţimea S de soluţii a sistemului este $S = S_1 \cap S_2 = \left[-\frac{1}{3}, \infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)$. Reprezentând pe axa reală mulţimile de soluţii S_1 şi S_2, mulţimea S de soluţii este porţiunea din axă dublu haşurată (corespunde intersecţiei lui S_1 cu S_2, adică părţii comune a celor două mulţimi).



Probleme propuse

1. **Să se rezolve inecuaţiile:**
1) $2x + 1 \leq 0$; 2) $-3x + 5 > 0$; 3) $2x + 3 < 4x + 5$; 4) $-3x + 1 \geq -x + 3$; 5) $x(x-1) < (x+2)(x-3)$;
6) $(x-1)^2 + 2(x-2)^2 \geq 2(x+1)^2 + (x+2)^2$; 7) $\frac{x}{2} - \frac{3x}{5} + 1 > -\frac{x}{5} + 2$; 8) $\frac{x+1}{3} - \frac{2x-1}{6} \leq 1$;
9) $mx - x + 1 \geq 0$, $m \in \mathbb{R}$; 10) $(m-1)x + 3 < 0$, $m \in \mathbb{R}$; 11) $x - 2 \leq m(1 - 2x)$, $m \in \mathbb{R}$;
12) $3x + 1 > m(1 + x)$, $m \in \mathbb{R}$; 13) $m(2 - x) + 1 \geq 2x + 3$, $m \in \mathbb{R}$.
2. **Să se expliciteze funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi să se traseze graficul:**
1) $f(x) = \min(1, 2x + 1)$; 2) $f(x) = \max(-2, 1 - 3x)$; 3) $f(x) = \min(x, 3 - 2x)$;
4) $f(x) = \max(1 - x, 2x - 5)$; 5) $f(x) = \operatorname{sgn}(2x)$; 6) $f(x) = \operatorname{sgn}(1 - 3x)$.

3. Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3x-2, x\le 2; 9-4x, x>2)$ să se rezolve inecuaţiile:
1) $f(x)\ge 1$; 2) $f(x)\le -1$.

4. Să se rezolve inecuaţiile:
1) $1+|x|\ge 2x$; 2) $2x-|x|\le x+1$; 3) $|x-1|-2x>1+x$;
4) $|x|-2|x-1|<3x+2$; 5) $3x+1-2|x-2|\le 2|x-1|+5$.

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2m+1)x+m-1$, $m\in\mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât (pe rând):
1) $f(-1)=f(2)$; 2) $f(-1)>f(2)$; 3) $f(-1)<f(2)$.

6. Să se reprezinte grafic funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$, $g(x)=-3x+2$ şi să se determine grafic soluţiile pentru:
1) $f(x)=g(x)$; 2) $f(x)>g(x)$; 3) $f(x)\le g(x)$.

7. Să se rezolve sistemele de inecuaţii:

1) $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ 2x-3\le 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x+1>x-2 \\ 5x-1\le x+23 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 4x+1\ge 2x-7 \\ 3(x-1)\le 2x \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 1-2x>x-5 \\ 3-x<1-3x \end{cases}$.

5) $\begin{cases} 3x-5\le -x+3 \\ -\frac{x}{3}+2>x+\frac{1}{2} \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x-3<2x-5 \\ 4x+1>2x+3 \end{cases}$.

8. Pentru $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\ge 0 \\ 1-x, & x<0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 1-2x, & x\le 1 \\ 3x, & x>1 \end{cases}$ să se calculeze:
$f\circ g$; $g\circ f$; $f\circ f$, $g\circ g$.

9. Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ studiaţi monotonia în cazurile:

1) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ 2x+3, & x>0 \end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 1 \\ -4x+1, & x>1 \end{cases}$;

3) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le 1 \\ 3x-2, & x>1 \end{cases}$. 4) $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\le -1 \\ x+2, & x\in(-1,1) \\ 3x, & x\ge 1 \end{cases}$.

10. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} mx+2m+4, & x\le 1 \\ -x+2, & x>1 \end{cases}$ este strict monotonă.

11. Pentru funcţiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=\begin{cases} (m+1)x+3, & x\le 3 \\ (-2m+3)x+1-m, & x>3 \end{cases}$, să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât pe rând:
1) f este strict crescătoare; 2) f este strict descrescătoare.

12. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$, $g:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $g(x)=ax+3$, $a\ne 1$. Să se determine a astfel încât graficele lui f, g să fie concurente.

13. Să se expliciteze funcţia f în cazurile:
1) $f(x)=[2x+1]$, $x\in[-2,2]$; 2) $f(x)=\left[\frac{x-2}{3}\right]$, $x\in[1,5]$; 3) $f(x)=2x+[2x]$, $x\in[0,2]$;
4) $f(x)=\left[x-\frac{1}{2}\right]$, $x\in[-1,2]$; 5) $f(x)=\left[\frac{x+1}{2}\right]$, $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$; 6) $f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$, $x\in[-2,2]$.

14. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $[x+1]=2$; 2) $[x-1]=-1$; 3) $[3x]=x+2$; 4) $\left[\frac{2x+1}{5}\right]=x+1$; 5) $\left[\frac{x-3}{4}\right]=\left[\frac{x-4}{3}\right]$.

15. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât să existe un triunghi cu laturile egale cu $x-1$, $x+1$, $5-x$.

Determinarea semnului expresiei $E(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Pentru a determina semnul expresiei $E(x)$ se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax+b, g(x) = cx+d$ şi se studiază semnul acestor funcţii într-un tabel de forma

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		
$g(x)$		
$E(x)$		

Se completează tabelul cu semnul funcţiilor f, g şi apoi al câtului $E(x)$, ţinându-se seama de regula semnelor.

Exemple. 1) Să se determine semnul expresiilor: a) $E(x) = \dfrac{-3x+5}{2x+1}$; b) $E(x) = x^3 - 7x + 6$.

R. a) Considerăm funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x+5$, $g(x) = 2x+1$ şi construim tabelul cu semnele acestor funcţii şi ale câtului $E(x)$. Avem:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(x) = -3x+5$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$g(x) = 2x+1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$E(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Din tabel rezultă că $E(x) > 0$ dacă $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right)$;

2) $E(x) < 0$ dacă $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$;

3) $E(x) = 0$ dacă $x = \frac{5}{3}$; 4) $E(x)$ nu are sens pentru $x = -\frac{1}{2}$.

b) Expresia se descompune în factori de gradul întâi:

$E(x) = x^3 - x - 6x + 6 = x(x^2-1) - 6(x-1) = (x-1)(x^2+x-6) = (x-1)(x-2)(x+3)$.

Fie $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x-1$, $g(x) = x-2$, $h(x) = x+3$. Pentru stabilirea semnului lui $E(x)$ se studiază semnul fiecărei funcţii şi apoi al expresiei $E(x)$ cu ajutorul tabelului de semn.

x	$-\infty$		-3		1		2	$+\infty$
$f(x) = x-1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(x) = x-2$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$h(x) = x+3$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$E(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Deci: 1) $E(x) > 0$ dacă $x \in (-3, 1) \cup (2, \infty)$;
2) $E(x) < 0$ dacă $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$;
3) $E(x) = 0$ dacă $x \in \{-3, 1, 2\}$.

2) Să se rezolve inecuaţia: $\dfrac{2x}{1-3x} \geq 3$.

R. Se impune condiţia $1 - 3x \neq 0$, adică $x \neq \frac{1}{3}$. Pe mulţimea $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ se scrie echivalent inecuaţia:

$$\frac{2x}{1-3x} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{2x}{1-3x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 3(1-3x)}{1-3x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{11x-3}{1-3x} \geq 0.$$

Pentru rezolvarea ultimei inecuaţii se face tabelul de semn al expresiei $E(x) = \dfrac{11x-3}{1-3x}$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{11}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$11x-3$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$1-3x$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$E(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Deci $E(x) \geq 0$ dacă $x \in \left[\frac{3}{11}, \frac{1}{3}\right)$.

Observaţie. Dacă s-ar fi scris $\frac{2x}{1-3x} \geq 3 \Leftrightarrow 2x \geq 3(1-3x)$ ar fi fost greşit deoarece ultima inecuaţie se obţine din prima prin înmulţire cu expresia $1-3x$ căreia nu-i putem preciza semnul (mai precis pentru $x < \frac{1}{3}$ avem $1-3x > 0$, iar pentru $x > \frac{1}{3}, 1-3x < 0$). Dacă se cerea rezolvarea inecuaţiei pe $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ (sau o submulţime a acesteia) atunci $1-3x > 0$ şi deci are loc echivalenţa

$$\frac{2x}{1-3x} \geq 3 \Leftrightarrow 2x \Leftrightarrow 3(1-3x) \Leftrightarrow 2x \geq 3-9x \Leftrightarrow 11x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{11}.$$

Dintre aceste valori vor fi soluţii ale inecuaţiei acelea situate în intervalul de studiu $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, adică $S = \left[\frac{3}{11}, \infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) = \left[\frac{3}{11}, \frac{1}{3}\right)$.

Probleme propuse

1. **Să se studieze semnul funcţiei f în cazurile:**

1) $f(x) = \frac{1}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$; 2) $f(x) = \frac{x}{1-x}, x \neq 1$; 3) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}, x \neq 3$;

4) $f(x) = \frac{4-2x}{3x-6}, x \neq 2$; 5) $f(x) = \frac{-x-1}{-2x+4}, x \neq 2$.

2. **Să se rezolve inecuaţiile:**

1) $\frac{1}{x+3} > 1$; 2) $\frac{1}{1-x} - 1 \leq 0$; 3) $\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2} < 0$; 4) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} < 0$; 5) $\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-2} > 0$.

3. **Să se studieze monotonia funcţiei f în cazurile:**

1) $f(x) = \frac{1}{m+1}x + 3, m \neq -1$; 2) $f(x) = \frac{m}{m-2}x + m - 1, m \neq 2$;

3) $f(x) = \frac{m+1}{m-1}x + 2m, m \neq 1$; 4) $f(x) = \frac{m-2}{m-3}x, m \neq 3$.

4. **Să se determine mulţimile:**

1) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \frac{x+3}{x-5} \leq 0\right\}$; 2) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{x-1}{3-x} \geq 0\right\}$;

3) $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{x-1}{x+1} \leq 0\right\}$; 4) $D = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \left[\frac{x-2}{2x+3}\right] = 1\right\}$.

5. **Să se arate că dacă $a, b > 0$, $x, y \geq 1$, atunci** $\frac{xa}{x+1} + \frac{yb}{y+1} \geq \sqrt{ab}$.

Compunerea funcţiei de gradul întâi cu alte funcţii

1. Funcţia parte întreagă compusă cu funcţia de gradul întâi, $f(x) = [ax+b], a \neq 0$.

Exemple. 1) Să se rezolve ecuaţiile: a) $[x+1] = 2$; b) $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = x - 2$.

R. a) Ţinând seama de definiţia părţii întregi avem: $2 \leq x+1 < 3$, o dublă inecuaţie echivalentă cu sistemul $\begin{cases} x+1 < 3 \\ x+1 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$. De aici $x \in [1,2)$. Deci $S = [1,2)$.

b) Membrul stâng al ecuaţiei este un număr întreg. Pentru ca egalitatea să aibă loc este necesar ca $x-2$ să fie, de asemenea, număr întreg. Din $x - 2 \in \mathbb{Z}$ rezultă $x \in \mathbb{Z}$. Utilizăm definiţia părţii întregi şi avem

de rezolvat dubla inecuaţie

$$x-2\le\frac{2x-1}{3}<(x-2)+1\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\le\dfrac{2x-1}{3}\\ \dfrac{2x-1}{3}<x-1\end{cases}.$$

Prima inecuaţie are mulţimea de soluţii $S_1=(-\infty,5]$, iar a doua inecuaţie are mulţimea de soluţii $S_2=(2,\infty)$. Deci mulţimea de soluţii a sistemului este $S=S_1\cap S_2=(2,5]$. Cum $x\in S$ trebuie să fie număr întreg rezultă $x\in S\cap\mathbb{Z}=(2,5]\cap\mathbb{Z}=\{3,4,5\}$

2) Să se expliciteze funcţia $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=[2x]$.
R. Dacă $x\in[0,2]$, atunci $0\le 2x\le 4$, când avem:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le 2x<1\\ 1, & 1\le 2x<2\\ 2, & 2\le 2x<3\\ 3, & 3\le 2x<4\\ 4, & 4=2x\end{cases}=\begin{cases}0, & 0\le x<\dfrac{1}{2}\\ 1, & \dfrac{1}{2}\le x<1\\ 2, & 1\le x<\dfrac{3}{2}\\ 3, & \dfrac{3}{2}\le x<2\\ 4, & x=2.\end{cases}$$

2. **Funcţia modul compusă cu funcţia de gradul întâi,** $f(x)=|ax+b|$, $a\neq 0$.

Exemple. 1) Să se expliciteze funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|2x-3|$.
R. Din definiţia modulului avem:

$$|2x-3|=\begin{cases}2x-3, & 2x-3\ge 0\\ -(2x-3), & 2x-3<0\end{cases}=\begin{cases}2x-3, & x\ge\dfrac{3}{2}\\ -(2x-3), & x<\dfrac{3}{2}\end{cases}.$$

De obicei explicitarea funcţiei se trece într-un tabel

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)=\lvert 2x-3\rvert$		$-(2x-3)$	0	$2x-3$	

2) Să se expliciteze funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|-2|x+3|$.
R. Se explicitează fiecare modul în tabelul următor

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$-x$			0	x	
$\lvert x+3\rvert$		$-(x+3)$	0	$x+3$			

Observăm că valorile -3 şi 0 care apar în prima linie a tabelului (din explicitările modulelor) împart domeniul de definiţie $\mathbb{R}$ a funcţiei în intervalele $(\infty,-3)$, $[-3,0]$, $(0,\infty)$.
Pe intervalul $(-\infty,-3)$ din tabel luăm $|x|=-x$, $|x+3|=-(x+3)$ când $f(x)=-x+2(x+3)=x+6$.
Pe intervalul $[-3,0]$ din acelaşi tabel $|x|=-x$, $|x+3|=x+3$ şi deci $f(x)=-x-2(x+3)=-3x-6$.
În fine, pe intervalul $(0,\infty)$ avem $|x|=x$, $|x+3|=x+3$, iar $f(x)=x-2(x+3)=-x-6$.

Aşadar $f(x)=\begin{cases}x+6, & x<-3\\ -3x-6, & x\in[-3,0]\\ -x-6, & x>0.\end{cases}$

3) Să se rezolve inecuaţiile: a) $|x-1|\le 3$; b) $|x+1|>5$; c) $|x|-2|x+3|\ge 0$.
R. a) Am văzut la modulul unui număr real că $|a|\le c$, $c>0\Leftrightarrow(-c\le a\le c,\ c>0)$.
Deci $|x-1|\le 3\Leftrightarrow -3\le x-1\le 3\Leftrightarrow -2\le x\le 4$. Deci $S=[-2,4]$.

b) De asemenea, $|a| > c,\ c > 0 \Leftrightarrow (a < -c$ sau $a > c,\ c > 0)$.
Aici $|x+1| > 5 \Leftrightarrow (x+1 < -5$ sau $x+1 > 5) \Leftrightarrow (x < -6$ sau $x > 4)$.
Aşadar mulţimea de soluţii a inecuaţiei este $S = (-\infty, -6) \cup (4, \infty)$.

c) Dacă notăm membrul stâng prin $f(x)$ se obţine funcţia discutată la 2). Pentru rezolvarea inecuaţiei utilizăm semnul funcţiei. Avem tabelul de semn:

x	$-\infty$		-6		-3		-2		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	

Din tabel deducem că $f(x) \geq 0$ dacă $x \in [-6, -2]$.

Observaţie. De regulă rezolvarea ecuaţiilor sau inecuaţiilor care conţin necunoscuta în module se face pe intervalele deduse din explicitarea modulelor.
Rezolvarea inecuaţiei de la c) se face în trei cazuri: $(-\infty, -3)$, $[-3, 0]$, $(0, \infty)$.

Primul caz corespunde lui $x \in (-\infty, -3)$. Inecuaţia se scrie echivalent:
$-x + 2(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -6$.
Dintre valorile găsite $x \geq -6$ **vor fi soluţii acelea care se află în intervalul de studiu**, $(-\infty, -3)$.
Deci $S_1 = [-6, \infty) \cap (-\infty, -3) = [-6, -3)$.

Cazul al doilea corespunde lui $x \in [-3, 0]$. Inecuaţia devine echivalent:
$-x - 2(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow -3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$.
În acest caz mulţimea de soluţii a inecuaţiei este $S_2 = (-\infty, -2] \cap [-3, 0] = [-3, -2]$.

Cazul al treilea corespunde lui $x \in (0, \infty)$ şi inecuaţia devine:
$x - 2(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow -x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -6$.
Mulţimea de soluţii a inecuaţiei este $S_3 = (-\infty, -6] \cap (0, \infty) = \emptyset$.
În final, mulţimea de soluţii S a inecuaţiei se obţine reunind soluţiile (parţiale) găsite în cele trei cazuri: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [-6, -3) \cup [-3, -2] \cup \emptyset = [-6, -2]$.

3. Funcţiile min, max din funcţii de gradul întâi

Exemplu. Să se expliciteze funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în cazurile:
a) $f(x) = \max(2x+1, -x+2)$; b) $f(x) = \min(2x, -x+3)$.

R. a) Utilizăm definiţia maximului a două numere reale a, b: $\max(a,b) = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a < b \end{cases}$.

În cazul nostru $f(x) = \max(2x+1, -x+2) = \begin{cases} 2x+1, & 2x+1 \geq -x+2 \\ -x+2, & 2x+1 < -x+2 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1, & x \geq \frac{1}{3} \\ -x+2, & x < \frac{1}{3} \end{cases}$.

b) Utilizăm definiţia minimului a două numere reale a, b: $\min(a,b) = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$.

Avem: $f(x) = \min(2x, -x+3) = \begin{cases} 2x, & 2x \leq -x+3 \\ -x+3, & 2x > -x+3 \end{cases} = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ -x+3, & x > 1 \end{cases}$.

Probleme propuse

1. **Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Să se determine funcţia f, dacă (pe rând):**
1) $(f \circ f)(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$; **2)** $(f \circ f)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$; **3)** $(f \circ f)(x) = 4x + 6, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. **Să se determine $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă $(g \circ f)(x) = 3x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $f(x) = -2x$,**
3. **Să se determine $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă $(f \circ g)(x) = 2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x$.**
4. **Să se determine funcţia afină $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă verifică condiţia $f(2-x) + 3f(x-1) = 6x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.**

5. Să se determine funcţia de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, pentru care $f(x+1)=2x-3+5f(2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

6. Să se determine $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$, dacă $f(2x)+3f(-3x)=-7x+8$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\leq 1\\ bx-3, & x>1\end{cases}$. Să se determine $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x+2)$, $g(-2)=2$, $g(2)=1$.

8. 1) Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată mai jos să se arate că există $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=ax+b$, $a\neq 0$, astfel încât $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=1_{\mathbb{R}}(x)=x$:

a) $f(x)=-3x$; $f(x)=\sqrt{2}x$; c) $f(x)=x+3$; d) $f(x)=2-x$; e) $f(x)=2x+3$; $f(x)=-2x+1$.

Observaţie. Funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de mai sus se numeşte inversa funcţiei f şi se notează $g=f^{-1}$ (citim: f la -1). A nu se confunda cu $f^{-1}=\frac{1}{f}$. Observaţi că dacă $x\to f(x)=y$ atunci $f^{-1}(y)=x$.

2) Pentru funcţiile de la a) la f) din 1) să se calculeze:

a') $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(3)$; b') $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(-\sqrt{2})$; c') $f^{-1}(0)$, $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$;

d') $f^{-1}(0)$, $f^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$; e') $f^{-1}(0)$, $f^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$; f') $f^{-1}(0)$, $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$.

3) Dacă: a) $f(3)=5$, atunci determinaţi $f^{-1}(5)$ şi $(f(3))^{-1}$;

b) $f^{-1}(3)=4$, atunci determinaţi $f(4)$ şi $(f(4))^{-1}$;

c) $f(x)=2x+1$, atunci determinaţi $f(3)$, $f^{-1}(3)$ şi $(f(3))^{-1}$.

9. Să se determine $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dacă $f(x+1)\leq x\leq f(x)+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

10. Fie $f(x)=[2x+1]$, $x\in[-1,3]$.

1) Trasaţi graficul funcţiei; 2) Determinaţi semnul lui f;

3) Rezolvaţi ecuaţia $f(x)=2$; 4) Rezolvaţi dubla inecuaţie $1\leq f(x)\leq 2$.

11. Fie funcţia $f(x)=2x-|x+1|$, $x\in\mathbb{R}$.

1) Trasaţi graficul funcţiei; 2) Determinaţi semnul lui f;

3) Să se rezolve ecuaţia $f(x)=5x-2$; 4) Să se rezolve inecuaţia $f(x)>1$.

12. Fie funcţia $f(x)=\max(2x-3,1-x)$.

1) Să se expliciteze funcţia şi să se traseze graficul; 2) Să se determine semnul funcţiei;

3) Să se rezolve ecuaţia $f(x)=5$; 4) Să se rezolve inecuaţia $f(x)\geq 1$.

Sisteme de ecuaţii de gradul întâi de forma $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$.

Poziţia relativă a două drepte

Definiţie Se numeşte **ecuaţie de gradul întâi a două necunoscute** x şi y, o ecuaţie de forma $ax+by=c$, (1) unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Numerele a, b se numesc **coeficienţii necunoscutelor** x,y, iar c este **termenul liber** al ecuaţiei (1).

Se numeşte **soluţie** a ecuaţiei (1) orice cuplu $(s_1,s_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ care verifică egalitatea $as_1+bs_2=c$.

O ecuaţie de forma (1) se mai numeşte **ecuaţie liniară** în x şi y.

Pentru soluţia (s_1, s_2) a ecuaţiei (1) vom scrie $x = s_1, y = s_2$.

Pentru a obţine soluţia generală a ecuaţiei (1) se pune $x = \alpha \in \mathbb{R}$ şi obţinem pentru $b \neq 0, y = \dfrac{c - a\alpha}{b}$, adică $S = \left\{ \left(\alpha, \dfrac{c - a\alpha}{b} \right) \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

Mulţimea punctelor din plan (raportat la un reper cartezian) care are coordonatele din S reprezintă o dreaptă de ecuaţie $ax + by = c$.

Dacă $b = 0$, atunci ecuaţia $ax = c$ are soluţia $x = \dfrac{c}{a}, a \neq 0$. În planul raportat la un reper cartezian, ecuaţia $x = \dfrac{c}{a}$, reprezintă o dreaptă paralelă cu Oy.

Exemplu. Ecuaţia $3x - y = 1$ are coeficienţii $a = 3, b = -1$, iar termenul liber $c = 1$. O soluţie a ecuaţiei este $x = 2, y = 5$, iar soluţia generală a ecuaţiei este $x = \alpha, y = 3\alpha - 1, \alpha \in \mathbb{R}$.

Definiţie. Un sistem de două ecuaţii de gradul întâi (sau încă **sistem liniar**) cu două necunoscute x, y are forma $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}, \quad a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}. \quad (2)$

Numerele a, b, a', b' se numesc **coeficienţii necunoscutelor**, iar c, c' se numesc **termenii liberi** ai sistemului (2). Dacă $c = c' = 0$ sistemul se numeşte **liniar omogen.**

Se numeşte **soluţie** a sistemului (2) orice cuplu $(s_1, s_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ care este soluţie pentru fiecare din ecuaţiile sistemului.

Pentru sistemul liniar omogen cuplul $(0, 0)$ este întotdeauna soluţie (numită **soluţia banală**).

A rezolva sistemul (2) înseamnă a-i determina soluţiile (dacă există). Spunem că sistemul (2) este: 1) **compatibil determinat** dacă are o unică soluţie;

2) **compatibil nedeterminat** dacă are mai mult de o soluţie;

3) **incompatibil** dacă nu are soluţii.

Interpretarea geometrică a acestui fapt algebric este următoarea: în planul cartezian reprezentarea grafică a soluţiilor ecuaţiilor din (2) sunt două drepte de ecuaţii

$(d): ax + by = c, \quad (d'): a'x + b'y = c'$.

Dacă sistemul (2) este **compatibil determinat** având soluţia (x_0, y_0) înseamnă că punctul $A(x_0, y_0)$ din plan se află pe fiecare din dreptele (d) şi (d'). Deci A este punctul de intersecţie a acestor două drepte.

Aşadar: **pentru a obţine punctul de intersecţie a două drepte concurente se rezolvă sistemul format din ecuaţiile celor două drepte.**

Dacă sistemul (2) este **compatibil nedeterminat** înseamnă că mai mult de două puncte având coordonatele din mulţimea S a soluţiilor sistemului se află pe cele două drepte. Cum două puncte distincte determină o unică dreaptă deducem că dreptele d, d' coincid, adică $d = d'$.

În fine, când sistemul (2) este **incompatibil**, situaţia corespunde în planul cartezian cu faptul că dreptele n-au puncte comune, adică sunt paralele.

Deci $d \parallel d'$.

Sisteme echivalente. Două sisteme de ecuaţii de forma (2) **sunt echivalente** dacă mulţimile de soluţii ale lor sunt egale.

Ca şi în cazul rezolvării ecuaţiilor şi pentru rezolvarea sistemelor de forma (2) vom utiliza transformări care le fac echivalente cu alte sisteme mai simplu de rezolvat.

Transformări asupra ecuaţiilor unui sistem

Fie sistemul $\begin{cases} ax+by=c & (L_1) \\ a'x+b'y=c' & (L_2) \end{cases}$ (3)

unde am notat $(L_1), (L_2)$ prima şi respectiv a doua ecuaţie.

O_1. Adunarea unei ecuaţii a sistemului la o altă ecuaţie a sistemului.

Prin adunarea, membru cu membru, a celor două ecuaţii rezultă ecuaţia notată
$(L_1+L_2): (a+a')x+(b+b')y=c+c'$.
Să observăm că orice soluţie (s_1, s_2) a sistemului (3) verifică şi ecuaţia (L_1+L_2).
Într-adevăr avem: $(a+a')s_1+(b+b')s_2=(as_1+bs_2)+(a's_1+b's_2)=c+c'$.

O_2. Înmulţirea ecuaţiilor sistemului prin factori nenuli.

Înmulţind ecuaţia (L_1) prin $\alpha \neq 0$ se obţine ecuaţia notată (αL_1): $\alpha ax+\alpha by=\alpha c$.
Orice soluţie (s_1, s_2) a sistemului (3) este soluţie şi pentru ecuaţia (αL_1).
Avem: $\alpha as_1+\alpha bs_2=\alpha(as_1+bs_2)=\alpha c$.

Observaţie . Se pot combina cele două operaţii pentru a obţine ecuaţia $(L_1+\alpha L_2)$.
$(a+\alpha a')x+(b+\alpha b')y=c+\alpha c'$,
pentru care orice soluţie (s_1, s_2) a sistemului (3) este soluţie şi a ecuaţiei $(L_1+\alpha L_2)$.

O_3. Schimbarea ordinii ecuaţiilor în sistem.

Dacă un sistem de ecuaţii se obţine din alt sistem de ecuaţii prin una din transformările de mai sus, atunci cele două sisteme sunt echivalente cum uşor se poate constata.
Prin transformările enumerate se caută eliminarea succesivă a necunoscutelor.

Metode de rezolvare

1. **Metoda reducerii.** Constă în a transforma echivalent sistemul (2) astfel încât să reducem o necunoscută. Dacă, de exemplu, se doreşte reducerea necunoscutei y, atunci se efectuează transformările:

$$\begin{cases} ax+by=c \mid b' \\ a'x+b'y=c' \mid (-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=c \\ b'(ax+by)+(-b)(a'x+b'y)=b'c-bc' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=c \\ (b'a-ba')x=b'c-bc', \end{cases}$$

unde pentru primul sistem în dreptul barelor verticale am notat cu b şi b' numerele cu care se înmulţesc ecuaţiile. În al doilea sistem am păstrat prima ecuaţie a primului sistem (dacă aceasta este cea mai simplă, dacă nu se reţine a doua, iar a doua ecuaţie se obţine în urma combinaţiei $b'L_1+(-b)L_2$ din cele două ecuaţii ale sistemului dat.

Exemple. 1) Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x-2y=7 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$.

R. Vom reduce necunoscuta y în urma transformărilor echivalente de mai jos:

$$\begin{cases} x-2y=7 \\ 2x+y=-1 \mid 2 \end{cases} \overset{L_1+2L_2\to L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x-2y=7 \\ 5x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1-2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$$

Prin notaţia $L_1+2L_2 \to L_2$ am marcat faptul că a doua ecuaţie a sistemului dat se înlocuieşte prin combinaţia L_1+2L_2.
Deci mulţimea de soluţii a sistemului dat este: $S=\{(1,-3)\}$.

Interpretare geometrică. Dreptele de ecuaţii $(d): x-2y=7, (d'): 2x+y=-1$ se intersectează în punctul $A(1,-3)$ (fig. 20).

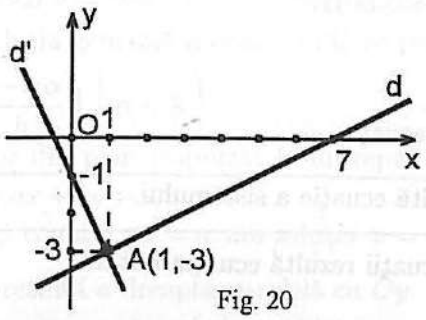


Fig. 20

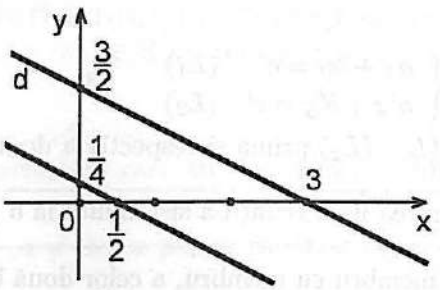


Fig. 21

2) Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=1. \end{cases}$

R. Avem echivalenţele:

$$\begin{cases} x+2y=3 \mid (-2) \\ 2x+4y=1 \end{cases} \overset{(-2)L_1+L_2\to L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y=3 \\ -2(x+2y)+2x+4y=(-2)3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ 0\cdot x+0\cdot y=-5. \end{cases}$$

Sistemul este incompatibil deoarece ultima ecuaţie nu are soluţii în $\mathbb{R}$. Deci $S=\emptyset$.

Interpretare geometrică. Dreptele de ecuaţii (d): $x+2y=3$, (d'): $2x+4y=1$ au aceeaşi pantă $\left(-\frac{1}{2}\right)$ şi deci sunt paralele (Să observăm că dreptele au ordonate la origine diferite) (fig. 21).

2. **Metoda substituţiei.** Constă în a exprima o necunoscută, dintr-o ecuaţie, în funcţie de cealaltă necunoscută şi a o înlocui în cealaltă ecuaţie, aceasta devenind o ecuaţie într-o singură necunoscută. Se rezolvă această ultimă ecuaţie determinând o componentă a soluţiei . Cu valoarea găsită (dacă există) se trece în substituţie determinând cealaltă componentă a soluţiei. Evident astfel de transformări conduc la sisteme echivalente.

Exemple. 1) Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} 3x+2y=-2 \\ x-3y=6 \end{cases}$, (1).

R. Din a doua ecuaţie se exprimă x în funcţie de y şi avem sistemele echivalente:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3(6+3y)+2y=-2 \\ x=6+3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{20}{11} \\ x=\frac{6}{11}. \end{cases}$$

Deci mulţimea de soluţii a sistemului este: $S=\left\{\left(\frac{6}{11},-\frac{20}{11}\right)\right\}$.

2) Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$, (2).

R. Din prima ecuaţie se exprimă x în funcţie de y şi se înlocuieşte în a doua ecuaţie când avem sistemele echivalente:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ 2(3-2y)+4y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ 0\cdot y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

În acest caz mulţimea de soluţii este $S=\{(3-2\alpha,\alpha) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$, iar imaginea geometrică a acestei mulţimi în plan este formată din punctele dreptei de ecuaţie $x+2y=3$, ceea ce era uşor de văzut de la început deoarece prima ecuaţie a sistemului este echivalentă cu a doua ecuaţie, obţinându-se din prima prin înmulţire cu 2.

Practic sistemul este format dintr-o singură ecuaţie $x+2y=3$.

Interpretare geometrică. Dreptele de ecuaţii $(d): x+2y=3$, $(d'): 2x+4y=6$ coincid, adică $d=d'$.

Probleme propuse

1. **Să se rezolve sistemele de ecuaţii:**

1) a) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -x+2y=-3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+4y=8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-3y=11 \\ 4x+2y=2. \end{cases}$

2) a) $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=-3 \\ \frac{4}{x}-\frac{5}{y}=27; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{2}{x-1}+\frac{3}{y+1}=2 \\ \frac{4}{x-1}-\frac{9}{y+1}=-1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5|x|-3|y|=11 \\ 3|x|+|y|=1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} |x|+2|y|=8 \\ 3|x|-|y|=3; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4[x]-3[y]=-10 \\ -3[x]+5[y]=7; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2[x]+[y]=3 \\ 4[x]+3[y]=8; \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2\{x\}-3\{y\}=0 \\ 2\{x\}+3\{y\}=2; \end{cases}$ h) $\begin{cases} \{x\}-2\{y\}=-1 \\ 2\{x\}-\{y\}=-\frac{5}{4}. \end{cases}$

2. **Fie sistemul** $\begin{cases} mx-y=1 \\ x+2y=1. \end{cases}$ **Să se determine** $m \in \mathbb{R}$ **pentru care soluţiile sistemului sunt strict pozitive.**

3. **Fie sistemul** $\begin{cases} mx+4y=2 \\ x+my=-1. \end{cases}$ **Să se determine** $m \in \mathbb{R}$ **pentru care sistemul:**

1) are soluţie unică; 2) are o infinitate de soluţii; 3) nu are soluţii;

4) are soluţia $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$**;**

5) Să se determine m **astfel încât soluţia** (x,y) **a sistemului să verifice** $x \leq 1$, $y > 2$.

4. **Să se determine** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**, care verifică relaţia:**

1) $f(-x)+2f(x)=x+3$, $\forall x \in \mathbb{R}$; 2) $f(x)-2f(-x)=4-x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Separarea planului în regiuni. Inecuaţii şi sisteme de inecuaţii liniare

Ştim din geometrie că o dreaptă în plan îl separă în două mulţimi numite semiplane. Considerăm un plan cartezian în care o dreaptă (d) are ecuaţia generală $ax+by+c=0$, (1). Deci un punct $M(x,y)$ din plan se află pe dreapta (d) dacă şi numai dacă coordonatele sale verifică ecuaţia (1). Prin urmare punctelor dreptei (d) le-am dat caracterizarea algebrică dată de (1). În continuare prezentăm o caracterizare, din punct de vedere al algebrei, a punctelor celor două semiplane. Dacă un punct $P(x,y)$ nu aparţine dreptei (d), atunci $ax+by+c \neq 0$.

Pentru aceasta considerăm expresia $D(x,y)=ax+by+c$. Din cele de mai sus rezultă că dacă punctul $M(x,y)$ aparţine dreptei (d), atunci $D(x,y)=0$. Fie acum $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ două puncte situate în cele două semiplane (fig. 22) delimitate de dreapta (d).

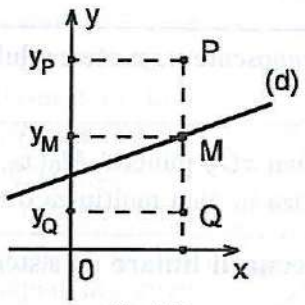


Fig. 22

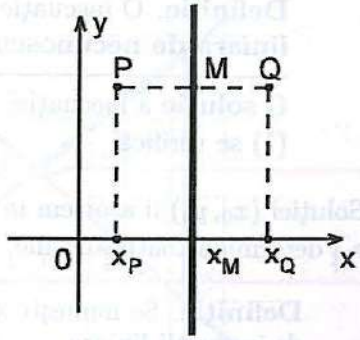


Fig. 23

Ce se poate spune despre semnul lui $D(x,y)$, în cazul punctelor P, Q?

Vom arăta că $D(x,y)$ **are semne contrare pentru cele două puncte.**

Analizăm două cazuri după cum $b \neq 0$ sau $b=0$.

Presupunem că punctele P, MşiQ sunt pe aceeaşi dreaptă paralelă cu O_y.

Deci aceste puncte au aceeaşi abscisă $x_P = x_M = x_Q$.

Cazul 1. Presupunem $b \neq 0$ şi alegem $b > 0$.

Ecuaţia dreptei (d) se poate aduce la forma $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$. Pentru coordonatele lui M avem egalitatea

$y_M = -\frac{a}{b}x_M - \frac{c}{b}$.
Dacă P este situat în semiplanul superior, atunci
$y_P > y_M \Leftrightarrow y_P > -\frac{a}{b}x_M - \frac{c}{b} \Leftrightarrow y_P > -\frac{a}{b}x_P - \frac{c}{b} \Leftrightarrow by_P > -ax_P - c \Leftrightarrow ax_P + by_P + c > 0$,
adică $D(x_P, y_P) > 0$.
Cum P a fost un punct arbitrar din semiplanul superior deducem că: **pentru orice punct din semiplanul superior, coordonatele sale (x, y)vor verifica inegalitatea $D(x, y) > 0$.**
Pentru punctul Q din semiplanul inferior avem:
$y_Q < y_M \Leftrightarrow y_Q < -\frac{a}{b}x_M - \frac{c}{b} \Leftrightarrow by_Q < -ax_M - c \Leftrightarrow by_Q + ax_Q + c < 0$. Deci: $D(x, y) < 0$.
Cum Q a fost un punct arbitrar din semiplanul inferior rezultă că: **pentru orice punct din semiplanul inferior, coordonatele sale (x, y) verifică inegalitatea $D(x, y) < 0$.**
Am probat astfel că, pentru $b \neq 0$, dacă punctele P şi Q se află în semiplane diferite, semnul expresiei $D(x, y)$ este diferit. Dacă notăm simbolic $D(P)$ semnul lui D pentru punctul P, atunci $D(P)D(Q) < 0$.
Cazul 2. Pentru $b = 0$, ecuaţia dreptei (d) este: $ax + c = 0$ sau $x = -\frac{c}{a}(a \neq 0)$, iar $D(x, y) = ax + c$. În acest caz dreapta (d) este paralelă cu axa O_y (fig. 23).
Considerăm că $a > 0$ (altfel, înmulţim cu (-1) în ecuaţia dreptei). Fie P, Q două puncte în semiplane diferite determinate de dreapta (d), iar M pe dreapta (d). Deci
$x_M = -\frac{c}{a}$ şi $x_P < x_M \Leftrightarrow x_P < -\frac{c}{a} \Leftrightarrow ax_P < -c \Leftrightarrow ax_P + c < 0$, adică $D(x_P, y_P) < 0$.
Analog pentru Q avem $x_M < x_Q \Leftrightarrow -\frac{c}{a} < x_Q \Leftrightarrow -c < ax_Q \Leftrightarrow 0 < ax_Q + c$ şi deci $D(x_Q, y_Q) < 0$. În acest caz am arătat că $D(P)D(Q) < 0$.

Observaţie . Pentru a stabili semnul expresiei $D(x, y)$ într-un semiplan se alege în acest semiplan un punct de coordonate (x_0, y_0) şi se calculează $D(x_0, y_0)$. Semnul lui D va fi acelaşi pentru orice alt punct al semiplanului. Orice punct de coordonate (x, y) din celălalt semiplan va fi caracterizat algebric de semn contrar pentru $D(x, y)$.
Dacă dreapta nu trece prin originea O, semnul numărului $D(0, 0)$ este semnul expresiei $D(x, y)$ pentru orice punct aflat în acelaşi semiplan cu O.

Definiţie. O inecuaţie de una din formele $D(x, y) \geq (>, \leq, <)\ 0$, (1) se numeşte **inecuaţie liniară de necunoscute x, y.**

O **soluţie** a inecuaţiei liniare de necunoscute x, y este cuplul $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care (1) se verifică.

Soluţiei (x_0, y_0) îi asociem în planul cartezian xOy punctul $M_0(x_0, y_0)$. A rezolva inecuaţia (1) înseamnă a-i determina toate soluţiile, adică a-i preciza în plan mulţimea de puncte.

Definiţie. Se numeşte **sistem de inecuaţii liniare** un sistem format dintr-un număr finit de inecuaţii liniare.

Cuplul (x_0, y_0) este o **soluţie** a sistemului de inecuaţii dacă este soluţie pentru fiecare inecuaţie din sistem.

A rezolva sistemul înseamnă a-i determina toate soluţiile. Am văzut că unei inecuaţii a sistemului îi corespunde un semiplan. Mulţimea soluţiilor va fi dată de intersecţia semiplanelor soluţii ale inecuaţiilor sistemului.

Exemple. 1) Să se reprezinte în planul cartezian dreapta $(d) : x - 2y + 4 = 0$ şi să se determine punctele din plan pentru care pe rând $x - 2y + 4 > 0, x - 2y + 4 < 0$.

R. Pentru reprezentarea dreptei (d) în plan determinăm punctele de intersecţie ale dreptei cu axele de coordonate (deci tăieturile dreptei).
Pentru $y = 0$ rezultă $x = -4$, când $A(-4, 0) \in Ox$, iar pentru $x = 0$ rezultă $y = 2$, adică $B(0, 2) \in Oy$ (fig. 24). Fie $D(x, y) = x - 2y + 4$. Determinăm semnul lui D în semiplanul care conţine originea O. Avem $D(0, 0) = 4 > 0$.

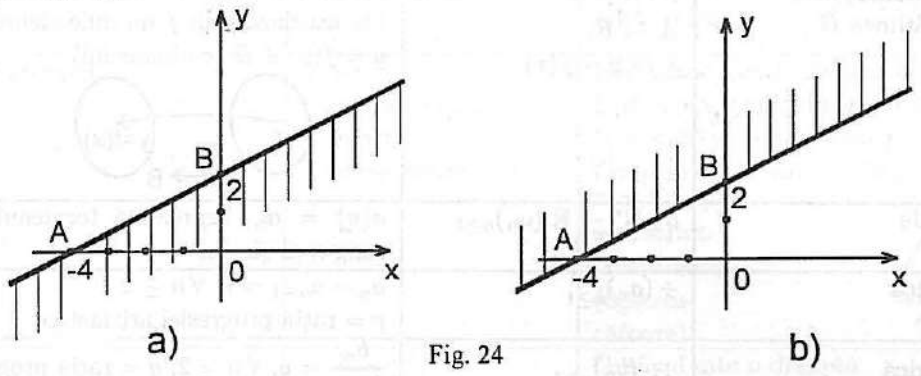


Fig. 24

Deci soluţiile inecuaţiei $D(x, y) > 0$ sunt punctele semiplanului care-l conţine pe O (porţiunea haşurată, fig. 24.a)).
Inecuaţia $D(x, y) < 0$ are loc pentru toate punctele situate în celălalt semiplan (fig. 24.b)).

Observaţie Dacă inecuaţia de rezolvat era $x - 2y + 4 \geq 0$, atunci la semiplanul din fig. 22.a) se mai adaugă şi punctele dreptei (d). Spunem că în acest caz soluţia inecuaţiei este semiplanul închis delimitat de dreapta (d).

2) Să se rezolve grafic sistemul de inecuaţii: $\begin{cases} x + y - 2 > 0 \\ y - x \leq 0 \\ x - 3 \leq 0. \end{cases}$

R. Considerăm dreptele de ecuaţii $(d_1) : x + y - 2 = 0$, $(d_2) : y - x = 0$, $(d_3) : x - 3 = 0$ şi expresiile asociate acestor drepte $D_1(x, y) = x + y - 2$, $D_2(x, y) = y - x$ si $D_3(x, y) = x - 3$.

Reprezentăm dreptele în plan (fig. 25).

Stabilim semnul expresiilor într-unul din semiplane. Avem $D_1(0, 0) = -2 < 0$. Deci în semiplanul care conţine originea $D_1(x, y) < 0$. Inecuaţia $D_1(x, y) > 0$ are ca soluţie celălalt semiplan (haşurat cu linii orizontale). Pentru expresia $D_2(x, y)$ considerăm punctul de coordonate $(2, 0)$. Avem $D_2(2, 0) = -2 < 0$. Deci în semiplanul care conţine acest punct $D_2(x, y) < 0$. Prin urmare soluţiile inecuaţiei $D_2(x, y) \leq 0$ sunt punctele acestui semiplan la care se adaugă punctele dreptei (d_2) (zona haşurată cu linii verticale). În fine $D_3(0, 0) = -3 < 0$.

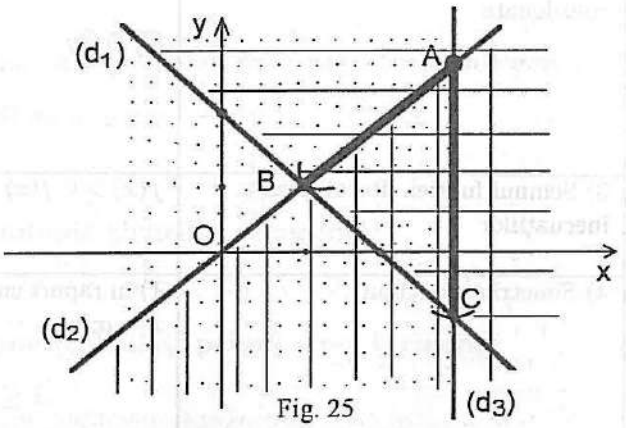
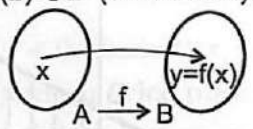
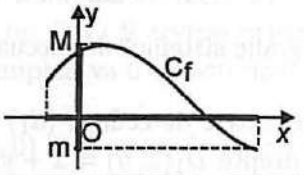
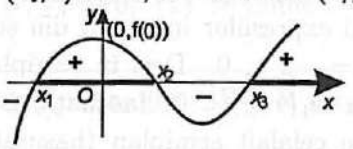
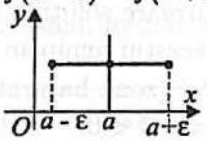
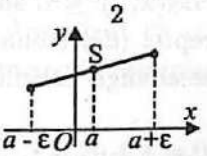
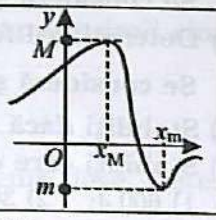
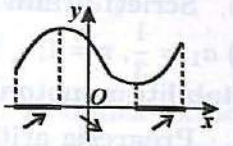
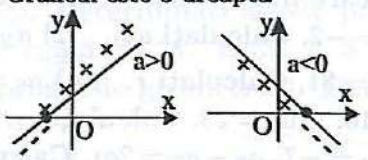


Fig. 25

Atunci soluţiile inecuaţiei $D_3(x, y) \leq 0$ sunt punctele semiplanului stâng delimitat de dreapta (d_3) la care se adaugă punctele dreptei (d_3) (zona punctată). Intersecţia celor trei zone este dată de interiorul triunghiului ABC la care se adaugă laturile $[AB]$ şi $[AC]$, fără punctele B şi C.

Noţiuni	Notaţii Caracteristici	Semnificaţii. Interpretare geometrică
Funcţie definită pe mulţimea A cu valori în mulţimea B	$f : A \to B$ $A \xrightarrow{f} B$, $x \to y = f(x)$	Fiecărui element $x \in A$ (domeniul de definiţie) i se asociază prin f un unic element $y = f(x) \in B$ (codomeniul). 
Şir de numere reale	$a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ $(a_n)_{n\geq 1}$	$a(n) = a_n$, reprezintă termenul general de rang n al şirului
Progresie aritmetică	$\div (a_n)_{n\geq 1}$	$a_n - a_{n-1} = r, \forall n \geq 2$ r = raţia progresiei aritmetice
Progresie geometrică	$\div\div (b_n)_{n\geq 1}$	$\frac{b_n}{b_{n-1}} = q, \forall n \geq 2$, q = raţia progresiei geometrice
Funcţii egale $f : A \to B$, $g : C \to D$	$f = g$	1) $A = C$; 2) $B = D$; 3) $f(x) = g(x), \forall x \in A$
Schema analizării unui grafic		
1) Determinarea domeniului de definiţie şi a mulţimii valorilor funcţiei	$f : A \to B$	Geometric, A este proiecţia curbei C_f pe Ox, iar mulţimea de valori $f(A) = [m, M]$ este proiecţia lui C_f pe Oy 
2) Intersecţia graficului cu axele de coordonate	$G_f \cap Ox$ $G_f \cap Oy$	$y = 0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3$ zerourile funcţiei $(x_i, 0) \in Ox$, $x = 0 \in A \Rightarrow (0, f(0)) \in Oy$ 
3) Semnul funţiei. Rezolvarea inecuaţiilor	$f(x) > 0$ $f(x) < 0$	Geometric, soluţiile inecuaţiei $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) se obţin proiectând graficul situat deasupra (sub) axei Ox pe această axă.
4) Simetria graficului	1) în raport cu dreapta $x = a$;	$f(a - \varepsilon) = f(a + \varepsilon), \forall \varepsilon > 0$ 
	2) în raport cu punctul $S(a, b)$	$\frac{f(a-\varepsilon)+f(a+\varepsilon)}{2} = b$, 

5) Valori extreme ale funcţiei	1) cea mai mare valoare M 2) cea mai mică valoare m	Geometric, sunt punctele de pe grafic care au cea mai mare şi respectiv cea mai mică ordonată. 
6) Monotonia funţiei	1) strict crescătoare (↗) 2) strict descrescătoare (↘)	Geometric, privit de la stânga la dreapta, graficul care urcă (coboară) se proiectează pe axa Ox şi se obţin intervalele pe care funcţia este strict crescătoare (descrescătoare). 
Funcţia de gradul întâi	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$, $a,b\in\mathbb{R}$	Graficul este o dreaptă 

Probleme propuse

1. Şiruri. Progresii aritmetice. Progresii geometrice

1. Calculaţi primii cinci termeni ai fiecăruia dintre şirurile de mai jos:

1) $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=n(n+1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$; 2) $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n=\sqrt{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

3) $(z_n)_{n\geq 1}$, $z_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$; 4) $(t_n)_{n\geq 1}$, $t_n=\sin n\pi$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

5) $(u_n)_{n\geq 1}$, $u_n=n\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Calculaţi primii cinci termeni şi studiaţi monotonia şirurilor date prin termenii generali:

1) $x_n=\dfrac{6-n}{5n-1}$, $n\geq 1$; 2) $x_n=\dfrac{2n^2}{n+1}$, $n\geq 0$; 3) $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

4) $x_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}$, $n\geq 1$; 5) $x_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$, $n\geq 1$.

3. Calculaţi primii cinci termeni şi studiaţi monotonia şirurilor recurente:

1) $x_0=1$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+\dfrac{3}{2}$, $n\geq 0$; 2) $x_0=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$, $n\geq 0$; 3) $x_0=2$, $x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$, $n\geq 0$.

4. Stabiliţi dacă şirurile de mai jos sunt monotone (calculaţi primii cinci termeni):

1) $x_n=\dfrac{(-1)^n n+1}{(-1)^n\cdot n}$, $n\geq 1$; 2) $x_n=\dfrac{(-1)^n\cdot 3^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$, $n\geq 1$.

5. Arătaţi că şirurile de mai jos sunt mărginite (calculaţi primii cinci termeni):

1) $x_n=\dfrac{1}{n}$, $n\geq 1$; 2) $x_n=1+(-1)^n$, $n\geq 1$; 3) $x_n=\dfrac{n+1}{n}$, $n\geq 1$; 4) $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $n\geq 1$;

5) $x_0\in[0,2]$, $x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2$, $n\geq 0$; 6) $x_0=\sqrt{2}$, $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$, $n\geq 1$;

7) $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{1+2x_n}$, $n\geq 1$.

6. Determinaţi termenul general al şirului (x_n) definit prin relaţia de recurenţă $x_{n+1}=x_n+2n+2$, dacă $x_0=1$.

7. Se consideră şirul (u_n) definit prin relaţia de recurenţă $u_{n+1} = u_n\sqrt{2}$, $u_0 = 1$.
1) Determinaţi formula termenului general. 2) Numărul $128\sqrt{2}$ este termen al şirului ?

8. Se consideră şirul (a_n) cu termenul general $a_n = \frac{3n}{5} + \frac{2}{5}$, $n \geq 1$.
1) Stabiliţi dacă şirul (a_n) este o progresie aritmetică.
2) Stabiliţi care din numerele de mai jos este termen al şirului dat:
1) 600,4; 2) 300; 3) 300,4.

9. Probaţi că şirurile (a_n) definite prin termenul general a_n în cazurile:
1) $a_n = 3n^2$, $n \geq 1$; 2) $a_n = n + 2^n$, $n \geq 1$; 3) $a_n = 2^n$, $n \geq 1$,
nu reprezintă progresii aritmetice.

10. Scrieţi primii cinci termeni ai progresie aritmetice în cazurile:
1) $a_1 = \frac{1}{3}$, $r = 1$; 2) $a_1 = -1$, $r = -2$; 3) $a_1 = -2$, $r = 3$; 4) $a_1 = -0,5$, $r = \frac{1}{2}$; 5) $a_1 = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{2}$.
Stabiliţi monotonia fiecărui şir.

11. Progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ de raţie r este definită prin anumite elemente date. Determinaţi, în fiecare din cazuri, elementul cerut.
1) $a_1 = -3$, $r = -2$. Calculaţi a_{20}. 2) $a_{30} = 60$, $r = 2$. Calculaţi a_1;
3) $a_1 = 3$, $a_{27} = 81$. Calculaţi r. 4) $a_3 = 8$, $a_4 = 5$. Calculaţi a_1, r.
5) $a_2 + a_{40} = 16$, $a_1a_5 = 28$. Calculaţi a_1, r.
6) $a_2 - a_6 + a_4 = -7$, $a_8 - a_7 = 2a_4$. Calculaţi a_1, r.
7) $a_1a_2a_3 = 120$, $a_1 + a_2 + a_3 = 15$. Calculaţi a_1 şi r.
8) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 45$, $r = 2$. Calculaţi a_1.
9) $a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n} = 126$, $a_2 + a_{2n} = 42$. Calculaţi n.
10) $r = 4$, $a_1a_2a_3a_4 = 585$. Calculaţi a_1.

12. Să se arate că dacă:
1) numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică, atunci şi $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ sunt în progresie aritmetică;
2) numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele $a^2 - bc$, $b^2 - ca$, $c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică;
3) numerele $a^2 + 2cb$, $b^2 + 2ac$, $c^2 + 2ab$ sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele $\frac{1}{b-c}$, $\frac{1}{c-a}$, $\frac{1}{a-b}$ sunt în progresie aritmetică.

13. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de raţie r, atunci să se calculeze sumele:
$S_1 = a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n$,
$S_2 = \frac{1}{a_1a_2a_3} + \frac{1}{a_2a_3a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$ în funcţia de a_1 şi r.

14. Fie $(u_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Definim şirul $(v_n)_{n\geq 1}$ prin $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$, $n \geq 1$. Arătaţi că (v_n) este, de asemenea, o progresie aritmetică.

15. Arătaţi că numerele $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ nu pot fi termenii unei progresii aritmetice.

16. Să se scrie primii cinci termeni ai şirului $(b_n)_{n\geq 1}$ în cazurile:
1) $b_1 = 2$, $b_n = -3b_{n-1}$, $n \geq 2$; 2) $b_1 = -3$, $b_n = \frac{1}{2}b_{n-1}$, $n \geq 2$;
3) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_n = -2b_{n-1}$, $n \geq 2$; 4) $b_1 = \frac{1}{3}$, $b_n = 5b_{n-1}$, $n \geq 2$.

17. Fie şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $b_n = 3(\sqrt{2})^n$.
1) Să se stabilească dacă şirul dat este o progresie geometrică, calculând apoi primii cinci termeni.
2) Stabiliţi care din numerele de mai jos este termen al progresiei:
a) 81; b) 24; c) 96.

18. Progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ de raţie q este definită prin anumite elemente date. Determinaţi, în fiecare din cazuri, elementele cerute.
1) $b_1 = 2$, $q = -3$. Calculaţi b_6; 2) $b_1 = \sqrt{2}$, $b_2 = \sqrt{8}$. Calculaţi b_{10};
3) $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_8 = -2^6$. Calculaţi q; 4) $b_5 = 61$, $b_{11} = 1647$. Calculaţi b_7;
5) $b_1 - b_2 = 8$, $b_2 + b_3 = 12$. Calculaţi b_1, q; 6) $b_2 + b_4 = 60$, $b_1 + b_3 = 20$. Calculaţi b_1, q;
7) $b_5 - b_1 = 160$, $b_4 - b_2 = 48$. Calculaţi b_1, q;
8) $b_5 + b_2 - b_4 = 66$, $b_6 + b_3 - b_5 = -132$. Calculaţi b_1, q.

19. Primul termen dintr-o progresie aritmetică şi geometrică este egal cu 3. Al doilea termen al progresiei aritmetice este mai mare cu 6 decit al doilea termen al progresiei geometrice. Termenul al treilea din cele două progresii este acelaşi. Determinaţi aceste progresii.

20. Suma a trei numere în progresie aritmetică este egală cu 21. Dacă 2, 3 şi 9 se adună acestor numere, atunci se obţin alte trei numere în progresie geometrică. Determinaţi cele trei numere.

21. Se dau patru numere în progresie geometrică. Dacă la aceste numere se adună 3, 9, 11 şi respectiv 1, atunci se obţin alte patru numere în progresie aritmetică. Determinaţi numerele iniţiale.

22. Populaţia unui oraş este la sfârşitul unui an cu 3% mai mare decât la începutul anului. Determinaţi numărul de ani pentru ca populaţia să se dubleze. (Se presupune că populaţia oraşului este de 10000).

23. Un disc circular este tăiat în 12 sectoare ale căror arii sunt în progresie aritmetică. Aria celui mai mare sector este de două ori mai mare decât a celui mai mic sector. Determinaţi în grade unghiul format de laturile celui mai mic sector.

24. Cineva studiază un stol de 200 de păsări. În fiecare minut 10% din păsări părăsesc stolul şi 30 de păsări revin în stol. Dacă p_n este numărul de păsări la sfârşitul celor n minute, atunci:
a) daţi o relaţie de recurenţă care modelează acest fenomen;
b) precizaţi câte păsări sunt la sfârşitul a cinci minute;
c) precizaţi după câte minute se dublează numărul de păsări din stol.

25. În grădina unui gospodar sunt 5 pomi. Într-o primăvară el plantează de două ori mai mulţi pomi în fiecare zi din următoarele trei zile.. Fie p_n numărul de pomi după n zile, $p_0 = 5$. Determinaţi o relaţie de recurenţă pentru p_n şi calculaţi p_1, p_2, p_3

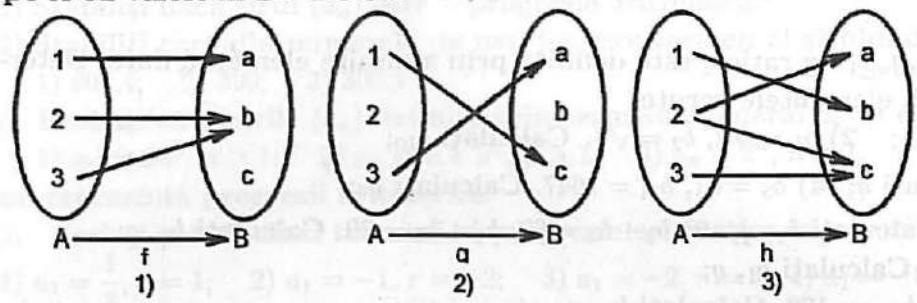
26. Valoarea unui automobil scade cu 10% în fiecare an din valoarea iniţială de 12000 €. Dacă V_n este valoarea după n ani, atunci:
a) determinaţi o relaţie de recurenţă pentru V_n; b) calculaţi V_1, V_2, V_3, V_4, V_5;
c) determinaţi valoarea maşinii după 10 ani.

27. Un pat germinativ are 1000 de ciuperci gata de cules. În fiecare dimineaţă 70% din recoltă este culeasă şi în fiecare noapte alte 300 sunt gata pentru a fi culese. Fie c_n numărul de ciuperci gata pentru a fi culese după n zile.
a) Determinaţi o relaţie de recurenţă pentru modelarea acestei activităţi.
b) Cât de multe ciuperci sunt gata pentru a fi culese după 3 zile?

2. Funcţii

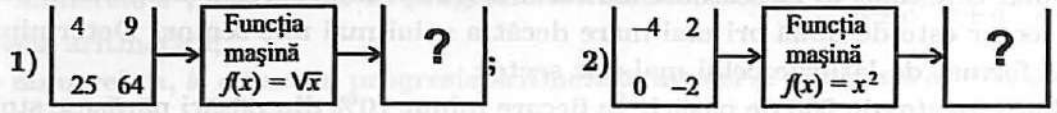
1. **Fie $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b,c\}$. Determinaţi toate funcţiile $f: A \to B$, descriindu-le efectiv.**

2. **Fie $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$. Care din diagramele următoare reprezintă o funcţie definită pe A cu valori în B? De ce?**



3. **1. Care din corespondenţele de mai jos defineşte o funcţie?**
   1) **Numărului $n \in \mathbb{N}$ i se asociază $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $m=3n$;**
   2) **Numărului $n \in \mathbb{N}$ i se asociază $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $m=\frac{n}{3}$;**
   3) **Numărului $n \in \mathbb{N}$ i se asociază divizorii săi din $\mathbb{N}$;**
   4) **Numărului $n \in \mathbb{N}$ i se asociază ultima cifră a numărului 3^n;**
   5) **Triunghiului ABC din plan i se asociază aria sa $s(ABC)>0$;**
   6) **Numărului $s>0$ i se asociază triunghiul ABC de arie s;**
   7) **Triunghiului ABC din plan i se asociază centrul cercului circumscris;**
   8) **Numărului $x \in \mathbb{Z}$ i se asociază numărul $y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x+y^2=1$;**
   9) **Numărului $x \in \mathbb{Z}$ i se asociază $y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $|x|=|y|$.**

   2. Determinaţi mulţimea de valori pentru fiecare din funcţiile maşină.



   3. Descrieţi ca funcţii următoarele corespondenţe (pentru elevii unei clase):
   a) fiecărui elevi i se asociază nota de la teza de matematică;
   b) fiecărui elev i se asociază una din cărţile preferate;
   c) fiecărui elev i se asociază unul din sporturile preferate.

4. **Stabiliţi domeniul de definiţie a funcţiei $f: A \to \mathbb{R}$, în cazurile:**
   1) $f(x)=x^2-5$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$;
   4) $f(x)=\sqrt{x+1}$; 5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x-3}}$.

5. **Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,** $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x \le -1 \\ 2x+3, & x \in (-1,1) \\ 5, & x \ge 1 \end{cases}$

   Să se calculeze: $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

6. **Stabiliţi care din următoarele funcţii (f, g) sunt egale:**
   1) $f,g: \{-1,0,1\} \to \{0,1\}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=|x|$;
   2) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2$;
   3) $f,g: \{0,1,2\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$, $g(0)=1$, $g(1)=4$, $g(2)=7$;

4) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 3(x + 1)$.

7. **Fie funcţiile** $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = x^2 + x$. **Definiţi funcţiile** $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

8. **Fie funcţiile** $f : [-3, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$, $g : [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 1$. **Definiţi funcţiile** $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

9. 1) **Să se reprezinte grafic funcţiile de mai jos:**

1) $f : \{-1, 0, 1\} \to \{-2, 0, 5\}$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 5$, $f(0) = -2$;

2) $f : \left\{-2, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 2\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$; 3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2$;

4) $f : [-3, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2$; 5) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2$;

6) $f : [-5, -1] \cup [2, 6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2$; 7) $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2$.

2) a) **Arătaţi că dacă graficul unei funcţii** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **este simetric faţă de dreapta** $x = a$, **atunci** $f(a + x) = f(a - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) **Arătaţi că funcţia** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **are ca axă de simetrie, dreapta scrisă alăturat:**

1) $f(x) = |x|$, $x = 0$; 2) $f(x) = |x - 2|$, $x = 2$.

3) a) **Arătaţi că dacă graficul unei funcţii** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **este simetric faţă de punctul** $M(a, b)$, **atunci** $f(a + x) + f(a - x) = 2b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) **Arătaţi că funcţia** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **are ca centru de simetrie, punctul alăturat:**

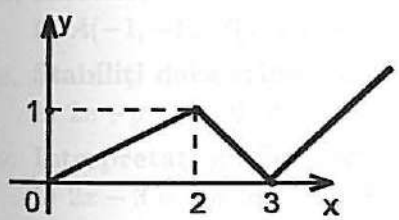
1) $f(x) = x^3$, $S(0, 0)$; 2) $f(x) = x^3 + 2$, $S(0, 2)$; 3) $f(x) = x^3 - 1$, $S(0, -1)$.

10. **Stabiliţi paritatea funcţiei** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **în cazurile:**

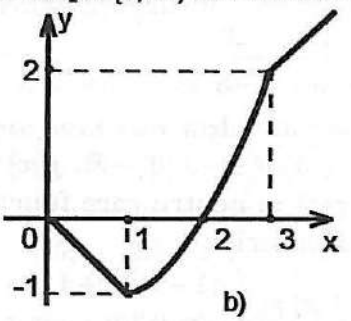
1) $f(x) = -x$; 2) $f(x) = -x + 3$; 3) $f(x) = -3x^3$;

4) $f(x) = -3x^3 + 1$; 5) $f(x) = 2x^4$; 6) $f(x) = 2x^4 + 1$.

11. **Funcţia pară** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **are graficul pe** $[0, \infty)$ **cel indicat mai jos.**



a)



b)

Completaţi graficul pe $(-\infty, 0)$. **Aceeaşi cerinţă dacă** f **este impară.**

12. **Să se calculeze** $f(A')$ **în cazurile următoare:**

1)

x	-5	-3	-2	0	1	3
$f(x)$	0	1	-1	0	-1	1

, $A' = \{-5, -3, 0\}$; $A' = \{-3, -2, 1, 3\}$

2) $f : \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$, $A' = \{-3, 0, 1\}$; $A' = \{-1, 0, 1\}$;

3) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A' = \{-2, -1, 0\}$; $A' = \{0, 1, 2\}$.

13. **Să se determine imaginile următoarelor funcţii definite prin tabelele de valori sau prin formulele de mai jos:**

1)

x	-3	-1	1	2
$f(x)$	1	0	1	0

, 1') $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$;

2) $\begin{array}{c|ccccc} x & -5 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline g(x) & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \end{array}$, 2') $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$;

3) $\begin{array}{c|cccc} x & -3 & 0 & 2 & 6 \\ \hline h(x) & -5 & 1 & 3 & -4 \end{array}$. 3') $f:[-2,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in[-2,1] \\ 3x+1, & x\in(1,3] \end{cases}$;

14. **Să se determine $f^{-1}(B')$ în cazurile următoare:**

1) $\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 1 & 5 & 9 \\ \hline f(x) & -3 & 0 & -3 & 0 \end{array}$, $B'=\{0\}$; $B'=\{0,-3\}$;

2) $\begin{array}{c|cccccc} x & -5 & 0 & 3 & 6 & 8 & 11 \\ \hline f(x) & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}$, $B'=\{1\}$; $B'=\{0\}$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x$, $B'=\{-3\}$; $B'=\{-3,-1\}$.

15. **Stabiliţi monotonia funcţiei f în cazurile:**

1) $\begin{array}{c|cccc} x & -3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f(x) & 9 & 6 & 0 & -5 \end{array}$ 2) $\begin{array}{c|ccccc} x & -9 & -6 & 0 & 1 & 8 \\ \hline f(x) & -3 & -3 & 0 & 5 & 5 \end{array}$

3) $f:\{-1,2,3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-5x$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x+5$;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$; 6) $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$.

16. **Studiaţi monotonia funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în cazurile:**

1) $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\le 0 \\ 3x & x>0 \end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x\le 0 \\ -1 & x>0 \end{cases}$;

3) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1 \\ 3x-1 & x>1 \end{cases}$; 4) $f(x)=\begin{cases} 1-2x, & x<2 \\ -1-x & x\ge 2 \end{cases}$.

17. **Să se determine valorile extreme ale lui f în cazurile:**

1) $\begin{array}{c|ccccc} x & -10 & -3 & 1 & 15 & 20 \\ \hline f(x) & 6 & 0 & -4 & 8 & -5 \end{array}$

2) $f:\{-3,-2,0,1,4\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+1$;

3) $f:[-5,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$; 4) $f:[-3,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

18. **Să se determine parametrul real m pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este strict monotonă, în cazurile:**

1) $f(x)=\begin{cases} mx, & x<0 \\ 5x, & x\ge 0 \end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases} (1-m)x+1, & x\le 2 \\ -x+3, & x>2 \end{cases}$;

3) $f(x)=\begin{cases} (2m+1)x+3, & x\le -2 \\ 3x, & x>-2 \end{cases}$; 4) $f(x)=\begin{cases} x+m, & x<2 \\ 2x & x\ge 2 \end{cases}$.

19. **Să se calculeze $f\circ g$, $g\circ f$, în cazurile de mai jos:**

1. 1) $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 2 & 1 & 3 \\ \hline f(x) & 0 & -3 & 4 & -5 \end{array}$, $\begin{array}{c|cccc} x & -5 & -3 & 0 & 4 \\ \hline g(x) & 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}$

3) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x$, $g(x)=-3x$;

4) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$, $g(x)=4x-3$;

5) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+5$, $g(x)=-x+3$;

2. 1) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 3x, & x\ge 0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 1, & x\le 2 \\ -2x, & x>2 \end{cases}$;

2) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} -1, & x > 1 \\ 3, & x \leq 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x - 3, & x \leq -1 \\ 2, & x > -1 \end{cases}$.

3. Funcţia de gradul întâi

1. Printre funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care dintre ele sunt funcţii afine? Precizaţi care dintre ele sunt funcţii de gradul întâi (care sunt liniare) sau constante:
1) $f(x) = |x|$; 2) $f(x) = 3x$; 3) $f(x) = 1$; 4) $f(x) = \alpha x + \beta$; 5) $f(x) = ax + a^2$;
6) $f(x) = 1 - x$; 7) $f(x) = 3 + x^2$; 8) $f(x) = x^2 - (x+1)^2$; 9) $f(x) = |x+1| - 1$.

2. Să se arate că funcţiile afine $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$ sunt egale dacă şi numai dacă $a = c$ şi $b = d$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie liniară. Să se arate că f verifică proprietăţile (de „liniaritate"): 1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$; 2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
Arătaţi că 1) şi 2) nu sunt adevărate pentru orice funcţie afină $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$, $b \neq 0$.

4. Să se determine funcţia afină f dacă: 1) ia valoarea 2 în 1 şi 3 în -1;
2) ia valoarea 1 în 2 şi -1 în 3; 3) $f(3) = 5, f(6) = -1$;
4) $f(2) = 5, f(5) = 5$; 5) $f(3) = 6$ şi graficul ei are panta 3;
6) $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$ şi graficul ei are panta $-\frac{1}{2}$.

5. Să se stabilească monotonia funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în cazurile:
1) $f(x) = -5x$; 2) $f(x) = 6x + 11$; 3) $f(x) = -4x + 1$

6. Să se stabilească monotonia funcţiei f, în cazurile:
1) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -6x$; 2) $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 3$;
3) $f : [-2,3] \cup [6,9] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 5$.

7. Stabiliţi ecuaţia dreptei sub forma explicită $y = ax + b$ ştiind că trece prin punctele A, B în cazurile:
1) $A(-1,-1), B(2,3)$; 2) $A(0,0)$, $B(1,-3)$; 3) $A(-2,0), B(0,2)$.

8. Stabiliţi dacă tripletele de drepte sunt concurente:
1) $2x+y-1=0$, $x-3y+2=0$, $2x+y-1=0$; 2) $x-y+3=0$, $x+y-5=0$, $2x+y-3=0$.

9. Interpretaţi grafic rezolvările următoarelor ecuaţii şi inecuaţii:
1) $2x - 3 = x + 5$; 1') $2x - 3 \geq x + 5$; 2) $-x + 1 = 3x + 2$; 2') $-x + 1 > 3x + 2$;
3) $4x + 3 = -2x + 1$; 3') $4x + 3 > -2x + 1$.

10. Să se rezolve inecuaţiile: 1) $x - 3(x+2) \leq -2x + 5(x+1)$;
2) $x + \frac{1}{2} - 6\left(\frac{2x}{3} + \frac{1}{2}\right) > 2x - 1$; 3) $\frac{x-1}{3} + \frac{2}{5} \geq \frac{2x+3}{5} - \frac{1}{3}$;
4) $\frac{2x+1}{6} - \frac{x}{3} + 2(\frac{x-2}{12} + \frac{1}{2}) < 0$; 5) $\frac{3x+1}{4} - \frac{5x}{2} \geq \frac{6x+1}{12} - \frac{4x}{3}$.

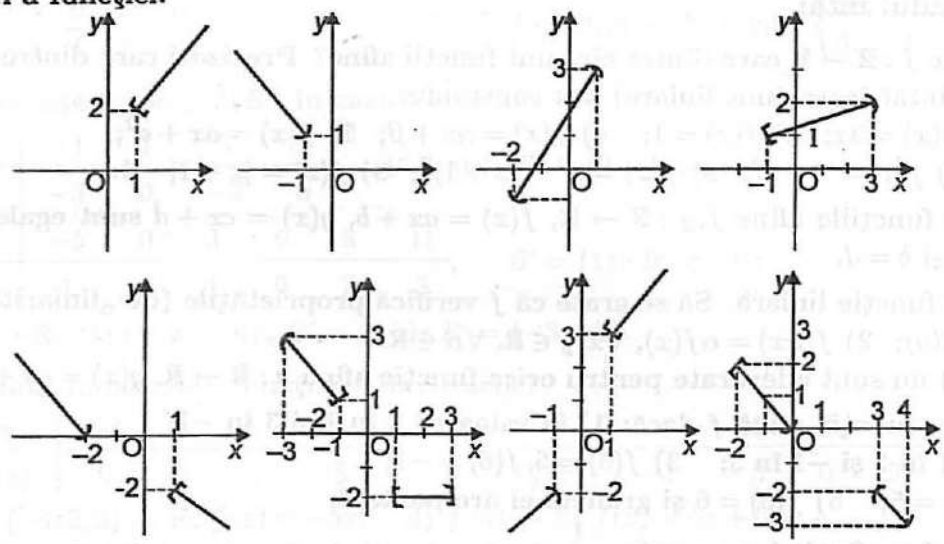
11. Calculaţi $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, $f^{(n)}$, în cazurile:
1) $f(x) = 3x$; 2) $f(x) = -5x$; 3) $f(x) = 2x + 6$; 4) $f(x) = -3x + 1$.

12. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$, $g(x) = ax + 2$, $a \in \mathbb{R}$.
1) Să se determine $f \circ g, g \circ f$; 2) Să se găsească a pentru care $f \circ g = g \circ f$.

13. 1. Să se reprezinte grafic funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, în cazurile:
1) $f(x) = 3x, D = [-2, \infty)$; 2) $f(x) = 4x, D = (1, \infty)$; 3) $f(x) = -2x, D = (-\infty, 1]$;
4) $f(x) = -5x, D = (-\infty, -1)$; 5) $f(x) = \frac{2x}{3}, D = [6,9]$; 6) $f(x) = -\frac{x}{2}, D = [-4,4]$.

2. Găsiţi o funcţie al cărei grafic este segmentul $[AB]$, $A(1,3), B(-2,-5)$.

3. Pentru fiecare din graficele de mai jos precizaţi domeniul de definiţie şi mulţimea de valori a funcţiei.



14. Să se reprezinte grafic funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în cazurile:

1) $f(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 0\\ 3, & x<0\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}-3, & x\geq 1\\ 2x, & x<1\end{cases}$ 3) $f(x)=\begin{cases}4x, & x\geq \frac{1}{2}\\ -3x, & x<\frac{1}{2}\end{cases}$.

15. Calculaţi $f\circ f$ şi trasaţi graficele funcţiilor f, $f\circ f$, în cazurile:

1) $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\leq 1\\ -3x+1, & x>1\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\geq 0\\ \frac{3x+2}{2}, & x<0\end{cases}$; 3) $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\leq -2\\ x+1, & x>-2\end{cases}$.

16. Să se calculeze $f\circ g$ şi $g\circ f$ $(f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ în cazurile:

1) $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq -1\\ 2x+3, & x<-1\end{cases}$, $g(x)=3x$; 2) $f(x)=\begin{cases}2x, & x\geq 5\\ 3x, & x<5\end{cases}$, $g(x)=3x-4$;

3) $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x<-2\\ 1-4x, & x\geq -2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-3, & x>2\\ 2x+1, & x\leq 2\end{cases}$;

4) $f(x)=\begin{cases}x-2, & x\geq 3\\ 2x+3, & x<3\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1-3x, & x<0\\ 4x+5, & x\geq 0.\end{cases}$

17. Să se rezolve sistemele de inecuaţii:

1) $\begin{cases}x+1>3\\ 2x+1\leq 10\end{cases}$; 2) $\begin{cases}\frac{x-2}{3}+x\geq\frac{x}{2}-1\\ -\frac{x}{3}+\frac{3x}{2}<\frac{x+1}{6}\end{cases}$; 3) $\begin{cases}2x-3\leq 0\\ 3x-1>0\\ 2x-1\geq 0\end{cases}$.

18. Să se rezolve inecuaţiile:

1) $\frac{2x-1}{x+3}\leq 0$; 2) $\frac{1-3x}{x}<0$; 3) $\frac{(x+1)(x-1)}{2x+3}\geq 0$; 4) $\frac{(-x+2)(3x+1)}{x-3}\leq 0$;

5) $(2x-1)(3x+1)(4x-5)>0$; 6) $(1-3x)(1-x)(2-x)>0$; 7) $\frac{x}{x+1}\geq 3$; 8) $\frac{2x}{x-2}<\frac{1}{2}$.

19. Să se rezolve sistemele de inecuaţii:

1) $\begin{cases}2x+3\geq 0\\ \frac{x(x-1)}{x+1}<0\end{cases}$; 2) $\begin{cases}\frac{x-2}{x(x-3)}<0\\ x(x+1)(x+2)\geq 0\end{cases}$; 3) $\begin{cases}(2x+1)(2x-3)(x-4)\geq 0\\ (x-1)(3x+1)(x+2)>0\end{cases}$

20. Să se expliciteze funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ şi să se reprezinte grafic, în cazurile:
1) $f(x) = [2x]$, $D = [0,1]$; 2) $f(x) = \left[\frac{x}{3}\right]$, $D = [-1,2]$.

21. Să se rezolve ecuaţiile: 1) $[x-1] = 3$; 2) $[2x+1] = -1$;
3) $[3x-2] = x+3$; 4) $\left[\frac{2x+1}{5}\right] = x+1$; 5) $\left[\frac{x-3}{4}\right] = x-1$.

22. Să se expliciteze funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi să se reprezinte grafic, în cazurile:
1) $f(x) = |x-3|$; 2) $f(x) = |2x|$; 3) $f(x) = |x| + |x-1|$.

23. Plecând de la reprezentarea graficului funcţiei modul trasaţi graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în cazurile:
1) $f(x) = |x| + 1$; 2) $f(x) = |x| - 1$; 3) $f(x) = |x-1|$; 4) $f(x) = |x+1|$.

24. Să se rezolve sistemele de ecuaţii şi să se interpreteze geometric rezultatele:
1) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-3y=-5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-6y=-2 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 3x+y=8 \\ 9x+3y=24 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=6 \end{cases}$.

25. Să se rezolve sistemele:
1) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{4}{y}=5 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \frac{4}{x-2}-\frac{5}{y+1}=3 \\ \frac{2}{x-2}+\frac{3}{y+1}=-1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 2|x|-3|y|=4 \\ |x|+2|y|=5 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 3[x]+2[y]=-3 \\ [x]-3[y]=1. \end{cases}$

26. Se consideră dreapta de ecuaţie $(d) : x - 2y + 3 = 0$. Stabiliţi care din punctele $A(3,-1)$, $B(-1,2)$, $O(0,0)$, $C(-2,1)$, $D(5,4)$ se află în acelaşi semiplan delimitat de (d).

27. Fie dreapta $(d) : x + 5y - 3 = 0$ şi $A(2,0)$, $B(2m+1, 3m-5)$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât A, B să fie situate:
1) în acelaşi semiplan delimitat de (d); 2) în semiplane diferite delimitate de (d).
Aceeaşi problemă pentru $(d) : 2x - 3y + 1 = 0$ şi punctele $A(-m+3, 2m)$, $B(1-2m, m+3)$.

28. Să se rezolve grafic inecuaţiile:
1) $y \geq x$; 2) $y < -x$; 3) $y \leq 2x$; 4) $x + y - 1 \geq 0$; 5) $2x + 3y - 5 > 0$;
6) $-3x + y + 6 \geq 0$; 7) $(y+x)(y-x) \leq 0$; 8) $(2x-3y)(x+y+1) > 0$.

29. Să se rezolve grafic sistemele de inecuaţii:
1) $\begin{cases} y < -x \\ y \geq x \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x+3y-5 \geq 0 \\ y > -x \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x+2y-6 \leq 0 \\ 3x-y+2 \geq 0 \end{cases}$.

Aplicaţii ale ecuaţiilor şi sistemelor în rezolvarea unor probleme practice.

1. Unul din trei vase se umplu cu apă, iar celelalte sunt goale. Dacă al doilea vas se umple cu apă, atunci în primul vas rămâne 1/4 apă din el. Dacă apoi umplem al treilea vas din al doilea, atunci în al doilea rămâne $\frac{2}{9}$ din cantitatea de apă. Dacă din al treilea vas se toarnă apă în primul vas gol, atunci pentru umplerea sa mai trebuie 30 de vedre. Determinaţi capacitatea fiecărui vas.

2. Ariile a trei parcele de teren se află în rapoartele $2\frac{3}{4}$; $1\frac{5}{6}$; $1\frac{3}{8}$. Se ştie că de pe prima parcelă recolta strânsă s-a vândut cu 75 unităţi monetare mai mult decât de pe a doua parcelă. Determinaţi suma ariilor celor trei parcele, dacă media recoltei pe 1ha a fost de 18 unităţi monetare.

3. Un creion roşu costă 27 de unităţi monetare (u.m.), iar un creion albastru costă 23 u.m. Pentru a cumpăra creioane se pot cheltui cel mult 940 u.m. Este necesar să se cumpere un număr maxim posibil de creioane roşii, iar numărul de creioane albastre nu trebuie să depăşească numărul de creioane roşii cu mai mult de 10. Câte creioane de fiecare culoare s-au cumpărat?

4. Un elev doreşte să-şi pună toate timbrele într-un nou album. Dacă pune câte 20 de timbre pe fiecare pagină, atunci paginile albumului nu-i sunt suficiente, iar dacă pune câte 23 de timbre pe fiecare pagină, atunci cel puţin o pagină rămâne liberă. Dacă însă el are încă un album de acelaşi fel în care pe fiecare pagină pune 21 de timbre, atunci are 500 de timbre în total. Câte pagini are un album.

5. Mai multe echipe participă la un raliu auto. Fiecare echipă are acelaşi număr de maşini Audi şi BMW, numărul acestora fiind mai mic decât 7. Dacă numărul de maşini Audi rămâne acelaşi pentru fiecare echipă, iar numărul de maşini BMW creşte de trei ori, atunci numărul total de maşini BMW participante la raliu depăşeste cu 50 numărul total de maşini Audi, iar numărul total de maşini al fiecărei echipe depăşeşte 12. Determinaţi numărul de echipe precum şi numărul de maşini Audi şi BMW participante la raliu.

6. Un vas cu capacitatea de 6 l conţine 4 l de soluţie de acid sulfuric cu o concentraţie de 70%. Un alt vas de aceeaşi capacitate conţine 3 l de soluţie de acid sulfuric cu o concentraţie de 90%. Câţi litri de soluţie trebuie transferaţi din al doilea vas în primul vas, pentru a obţine o soluţie de acid sulfuric având o concentraţie de 80%? (Dacă A, B sunt două substanţe de mase m_A şi m_B, atunci concentraţia lor în amestec este $c_A = \dfrac{m_A}{m_A + m_B}$, $c_B = \dfrac{m_B}{m_A + m_B}$, iar concentraţia lor este $p_A\% = c_A \cdot 100\%$, $p_B\% = c_B \cdot 100\%$.)

7. Un viticultor din regiunea Târnavei posedă două sortimente de vinuri: Fetească Regală, pe care-l vinde cu 6 lei/litru şi Riesling, pe care-l vinde cu 10 lei/litru. Care este cantitatea de vin din al doilea sortiment, care trebuie să o adauge la 300 de litri din primul sortiment pentru a obţine un amestec care să fie vândut cu 8 lei/litru? (Preţul amestecului este egal cu suma preţurilor sortimentelor care se amestecă.)

Teste de evaluare

Testul 1

1. Să se determine numerele reale, în progresie geometrică, a, b, c, dacă suma lor este 26, iar numerele $a+1$, $b+6$, $c+3$ sunt în progresie aritmetică.

2. Să se rezolve ecuaţia $5 + 13 + 21 + \ldots + x = 588$.

3. Arătaţi că dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică, atunci şirul $(a_{3n})_{n\geq 1}$ este de asemenea o progresie aritmetică.

4. Stabiliţi dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ având suma primilor n termeni $S_n = n^2 + 2n$, $\forall n \geq 1$, este o progresie aritmetică.

5. Să se determine raţia şi primul termen ai unei progresii aritmetice (a_n) pentru care $a_5 = 18$, $S_n = \dfrac{1}{4} S_{2n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, unde S_n este suma primilor n termeni ai progresiei.
a) $a_1 = 6$, $r = 3$; b) $a_1 = 2$, $r = 4$; c) $a_1 = 14$, $r = 1$; d) $a_1 = -2$, $r = 5$.

(ADMITERE, UNIV., ŞTIINŢE ECONOMICE, BRAŞOV, 1999)

6. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca şirul $S_n = n^2 + an + b$, să reprezinte suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice cu primul termen egal cu 2.
a) $a = 1$, $b = -1$; b) $a = 1$, $b = 0$; c) $a = b = 0$; d) $a = 0$, $b = 2$; e) $a = b = 1$.
(ADMITERE, UNIV., INGINERI, BRAŞOV, 2001)

7. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq a \\ x + 2, & x < a \end{cases}$. Să se determine a pentru care $f(5) = a$.

8. Să se determine funcţia al cărei grafic conţine segmentul $[AB]$, unde $A(-2, 1)$, $B(3, 6)$.

9. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Să se determine funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă $(g \circ f)(x) = 3x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

10. Fie funcţia $f : [1, \infty) \to (-\infty, a]$, $f(x) = -3x + 1$. Să se determine a, astfel încât $f([1, \infty)) = (-\infty, a]$.

11. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx - 12$. Să se determine m, dacă funcţia este strict crescătoare, iar graficul său conţine punctul $A(m, m)$.

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x > 2 \\ -2x, & x \leq 2 \end{cases}$. Să se determine $f((-\infty, 2])$, $f((2, \infty))$, $f(\mathbb{R})$, $f([0, 3))$.

13. Este corectă scrierea: $f : \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\} \to \mathbb{N}$, $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \text{ par} \\ 3x, & 3 \text{ divide } x \end{cases}$?

14. Fie funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = \max(n + 2, 2^n)$.
a) Să se calculeze $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, şi $f(k)$, $k \geq 3$.
b) Determinaţi $k \in \mathbb{N}$, astfel încât $f(2k) - 7f(k) - 8 = 0$.

15. Fie funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + 1$.
a) Determinaţi $x \in \mathbb{Z}$, cu proprietatea $(f \circ f \circ f)(x) = 7$.
b) Determinaţi funcţia $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, cu proprietatea $g(x + 2) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

16. a) Fie $f : \mathbb{N} \to [0, 1)$, $f(n) = \{\sqrt{2}n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că dacă $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, atunci $x_1 = x_2$.
b) Fie $A \neq \emptyset$ şi $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $f(X) = C_A X$. Arătaţi că dacă $f(X_1) = f(X_2)$, $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$, atunci $X_1 = X_2$, iar $\forall Y \in \mathcal{P}(A)$ există $X \in \mathcal{P}(A)$, astfel încât $f(X) = Y$.

17. Într-o şcoală sunt 731 elevi. Arătaţi că există cel puţin 3 elevi care îşi serbează ziua de naştere în aceeaşi zi a anului (admitem că anul are 365 de zile).

18*. Fiecare număr întreg se colorează cu albastru sau galben. Să se arate că se pot găsi două numere de aceaşi culoare astfel încât media aritmetică a lor să aibă aceeaşi culoare.

Testul 2

1. Să se determine progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ dacă
$a_1 + a_2 + a_3 = 6$ şi $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 14$.

2. Dacă $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ sunt două progresii aritmetice cu proprietăţile
$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ şi $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$ sunt în progresie geometrică, atunci $a_1 = b_3$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_1$.

3. Arătaţi că numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ nu pot fi termeni ai unei progresii aritmetice.

4. Fie a, b, c trei numere pozitive în progresie aritmetică având suma egală cu 21. Dacă la aceste numere se adaugă 2, 3 şi respectiv 9, se obţin alte trei numere în progresie geometrică. Să se determine a, b, c.

5. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică având termenii strict pozitivi. Să se arate că: $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} = \sqrt{a_2a_{n-1}}$, $\forall n \geq 2$.

(ADMITERE, UNIV., CONSTANŢA, 1999)

6. Să se găsească primul termen a_1 şi raţia r ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă: $a_2 - a_6 + a_4 = -7$ şi $a_8 - a_7 = 2a_4$.

a) $a_1 = -5$, $r = 2$; b) $a_1 = -4$, $r = 3$; c) $a_1 = -4$, $r = 4$; d) $a_1 = -5$, $r = 2$.

(ADMITERE, UNIV., SILVICULTURĂ, BRAŞOV, 2000)

7. Să se găsească suma primilor douăzeci de termeni ai unei progresii aritmetice, dacă $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

(ADMITERE, UNIV., INGINERI, ORADEA, 2001)

8. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a(x+1) - 2$. Să se determine a şi să se traseze graficul funcţiei, dacă acesta conţine punctul $(1,0)$.

9. Să se determine funcţia al cărei grafic conţine segmentul (AB), unde $A(1,-3)$, $B(-2,0)$.

10. Să se determine funcţia de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietăţile: $f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$ şi $f(1) = 2f(2)$.

11. 1) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \in \mathbb{Q} \\ -x+1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$.

Să se calculeze $f \circ f$ şi să se arate că dacă $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, atunci $f(x_1) \neq f(x_2)$ şi $\forall y \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) = y$.

12. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - m, & x \leq 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ şi din $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, să rezulte $f(x_1) \neq f(x_2)$.

13. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Determinaţi preimaginea mulţimii (1,2) prin f, adică $f^{-1}((1,2))$.

14. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$, pentru care scrierea $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3\}$, $f(x) = ax$ defineşte o funcţie.

15. Stabiliţi monotonia funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in 0 \\ -2x+1, & x > 0 \end{cases}$.

16. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $f(n) = f(n-1) + 2$, $\forall n \geq 1$.

a) Determinaţi $f(1)$, $f(2)$; b) Găsiţi $f(n)$, $n \geq 1$.

17. a) Arătaţi că există funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$, care verifică egalitatea $(f \circ f)(x) = 4x + 12$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(2x+3) \leq 2x \leq f(2x) + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

18. Se dau şapte segmente, ale căror lungimi sunt în intervalul [10,100]. Arătaţi că printre aceste segmente se găsesc trei, cu care se poate construi un triunghi.

3. FUNCŢIA DE GRADUL AL DOILEA

Probleme diverse de natură matematică, fizică etc. conduc la studiul unor dependenţe de forma $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Definiţie. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se numeşte **funcţie de gradul al doilea** (sau **funcţie pătratică**) cu coeficienţii a, b, c.

Pentru funcţia de gradul al doilea ax^2, se numeşte **termenul de gradul doi** (sau **pătratic**), bx **termenul de gradul întâi** (sau **liniar**), iar c **termenul liber**.

Ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ se numeşte **ecuaţia ataşată funcţiei** $f(x) = ax^2 + bx + c$, iar $\Delta = b^2 - 4ac$ discriminantul ecuaţiei îl numim pentru funcţie **discriminantul funcţiei**. Rădăcinile reale ale ecuaţiei (dacă există) se numesc **zerouri ale funcţiei**.

Exemple. 1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ ($a = 3$, $b = -5$, $c = 1$);
2) $g(x) = -x^2 + 2x - 3$ ($a = -1$, $b = 2$, $c = -3$);
3) $h(x) = 4x^2 - x$ ($a = 4$, $b = -1$, $c = 0$);
4) $i(x) = x^2 + 3$ ($a = 1$, $b = 0$, $c = 3$).

Observaţii. 1) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ se numeşte funcţie de gradul al doilea deoarece este funcţia asociată polinomului de gradul al doilea cu coeficienţi reali $aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$.
2) Funcţia de gradul al doilea **este bine determinată** dacă se cunosc coeficienţii $a \neq 0, b, c$.
3) Condiţia $a \neq 0$ este esenţială în definiţia funcţiei deoarece dacă $a = 0$ se obţine funcţia afină.
4) Cum domeniul şi codomeniul lui f coincid cu $\mathbb{R}$, funcţia de gradul al doilea **este o funcţie numerică**.
În loc de $f(x) = ax^2 + bx + c$ vom scrie $y = ax^2 + bx + c$.

Problemă rezolvată

Să se determine funcţia de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ **dacă** $f(0) = 1$, $f(-2) = 2$, $f(1) = -1$.

R. A determina funcţia f revine la a găsi coeficienţii a, b, c. Condiţiile date se traduc în ecuaţii pentru a, b, c. Din $f(0) = 1$ rezultă $c = 1$; din $f(1) = -1$ deducem $a + b + c = -1$, iar din $f(-2) = 2$ se deduce a treia ecuaţie în a, b, c, $4a - 2b + c = 2$. Sistemul format cu ecuaţiile astfel obţinute are soluţia $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = 1$. Deci funcţia căutată este $f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 1$.

Monotonia funcţiei de gradul al doilea

A studia monotonia funcţiei revine la a preciza intervalele pe care funcţia este strict crescătoare (crescătoare) sau strict descrescătoare (descrescătoare). Din monotonia funcţiei deducem valoarea extremă a funcţiei. Are loc următoarea:

Teoremă. Fie funcţia de gradul doi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.

1) Dacă $a>0$, atunci: f este **strict descrescătoare** pe $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ şi

f este **strict crescătoare** pe $\left[-\frac{b}{2a},\infty\right)$.

Tabelul de variaţie a funcţiei este:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

$x_{\min}=-\frac{b}{2a}$ este **punct de minim**; $-\frac{\Delta}{4a}=f_{\min}$ este **valoarea minimă** a lui f.

2) Dacă $a<0$, atunci: f este **strict crescătoare** pe $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ şi

f este **strict descrescătoare** pe $\left[-\frac{b}{2a},\infty\right)$.

Tabelul de variaţie a funcţiei este:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

$x_{\max}=-\frac{b}{2a}$ este **punct de maxim**; $-\frac{\Delta}{4a}=f_{\max}$ este **valoarea maximă** a lui f.

Intervalele $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$, $\left[-\frac{b}{2a},\infty\right)$ se numesc **intervalele de monotonie** ale funcţiei de gradul al doilea; $x=-\frac{b}{2a}$ se numeşte **punct de extrem** pentru funcţie, iar $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$ se numeşte **valoare extremă** a funcţiei. Semnul lui a dă natura extremului.

Punctul $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)\in G_f$ se numeşte **vârful graficului.**

Demonstraţie. Calculăm rata creşterii (descreşterii) lui f şi avem pentru $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1\neq x_2$,

$R(x_1,x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(ax_2^2+bx_2+c)-(ax_1^2+bx_1+c)}{x_2-x_1}=\frac{a(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=$

$=a(x_1+x_2)+b.$

Vom demonstra 1) (pentru 2) procedându-se analog). Fie $a>0$. Dacă $x_1,x_2\leq-\frac{b}{2a}$, $x_1\neq x_2$, atunci $x_1+x_2<2\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{b}{a}$. De aici $a(x_1+x_2)<-b$ sau $a(x_1+x_2)+b<0$. Aşadar $R(x_1,x_2)<0$, ceea ce arată că pe $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ funcţia f este strict descrescătoare. Dacă $x_1,x_2\geq-\frac{b}{2a}$, $x_1\neq x_2$, atunci $x_1+x_2>$

$>2\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{b}{a}$, iar de aici $a(x_1+x_2)+b>0$, ceea ce arată că $R(x_1,x_2)>0$. Deci f este strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a},\infty\right)$. Pentru a arăta că $x=-\frac{b}{2a}$ este punct de minim, iar $-\frac{\Delta}{4a}$ este valoarea minimă a funcţiei, utilizăm monotonia lui f demonstrată mai sus.

Dacă $x\leq-\frac{b}{2a}$, atunci (f este descrescătoare) rezultă $f(x)\geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$, (1).

Dacă $x\geq-\frac{b}{2a}$, atunci (f este crescătoare) rezultă $f(x)\geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$, (2).

Din (1) şi (2) deducem că $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.

Notăm $x_{\min} = -\frac{b}{2a}$, **punctul de minim** al funcţiei, iar $f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$, **valoarea minimă** a funcţiei f.

Dacă $a < 0$, atunci $x_{\max} = -\frac{b}{2a}$ este **punctul de maxim** al funcţiei, iar $f_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$ reprezintă **valoarea maximă** a funcţiei f. ■

Observaţii. 1) Punctul de extrem $x = -\frac{b}{2a}$ şi valoarea extremă $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ pentru funcţia de gradul doi se pot obţine aducând funcţia f la forma canonică. Avem:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Deci

$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ se numeşte **forma canonică a funcţiei de gradul doi.**

Dacă $a > 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, cu egalitate dacă $x = -\frac{b}{2a}$. De aici (adunând ambilor membri $-\frac{\Delta}{4a}$) rezultă $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $x = -\frac{b}{2a}$.

Această inegalitate arată că $-\frac{\Delta}{4a}$ este valoare minimă pentru f şi se atinge pentru $x = -\frac{b}{2a}$.

2) Dacă $a > 0$, atunci f ia cea mai mică valoare $-\frac{\Delta}{4a}$, adică $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$, ceea ce înseamnă că $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right)$. Dacă $a < 0$, atunci f ia cea mai mare valoare $-\frac{\Delta}{4a}$, adică $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$ şi deci $\operatorname{Im} f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$. Aceste egalităţi se interpretează ca egalităţi de mulţimi (utilizaţi dubla incluziune pentru a le demonstra).

4) **Rezolvarea ecuaţiei de gradul doi**, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dacă: 1) $\Delta > 0$, atunci ecuaţia are două rădăcini reale distincte.

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $S = \left\{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$;

2) $\Delta = 0$, atunci ecuaţia are o rădăcină dublă. $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$;

3) $\Delta < 0$, atunci ecuaţia nu are soluţii reale distincte, $S = \emptyset$, unde S este mulţimea de soluţii reale ale ecuaţiei.

Demonstraţie. 1) – 2) Se aduce ecuaţia la forma:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

3) Imediat. ■

Dacă ecuaţia are forma incompletă $x^2 - a = 0$, $a > 0$, atunci ea este echivalentă cu $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{a} = 0 \vee x + \sqrt{a} = 0)$.

Dacă ecuaţia are forma $ax^2 + bx = 0$, atunci este echivalentă cu $x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee ax + b = 0)$.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $x^2-3x+2=0$; 2) $x^2+x+1=0$; 3) $x^2-9=0$; 4) $2x^2-3x=0$.

R. 1) Avem $\Delta=9-8=1>0$, adică ecuaţia are rădăcini reale, distincte $x_{1,2}=\dfrac{3\pm1}{2}\Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=2$.

2) $\Delta=1-4=-3<0$, ecuaţia nu are rădăcini reale.

3) Se scrie echivalent ecuaţia

$$x^2-9=0\Leftrightarrow(x-3)(x+3)=0\Leftrightarrow(x-3=0\vee x+3=0)\Leftrightarrow(x_1=-3,\ x_2=3).$$

4) Avem scrierile echivalente:

$$2x^2-3x=0\Leftrightarrow x(2x-3)=0\Leftrightarrow(x=0\vee 2x-3=0)\Leftrightarrow\left(x=0\vee x=\frac{3}{2}\right).$$

Probleme rezolvate

1. **Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, valoarea extremă şi $\operatorname{Im} f$, în cazurile: a) $f(x)=x^2-3x$; b) $f(x)=-x^2-2x+3$.**

R. a) Pentru a preciza intervalele de monotonie calculăm $x=-\dfrac{b}{2a}$. Aici avem $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-3}{2}=\dfrac{3}{2}$. Cum $a=1>0$, f are valoare minimă.

Tabelul de variaţie a funcţiei este:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$ (min)	$\nearrow$	$+\infty$

Pe intervalul $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$ funcţia f este strict descrescătoare, iar pe intervalul $\left[\dfrac{3}{2},\infty\right)$ funcţia f este strict crescătoare. Valoarea minimă a funcţiei este $f_{\min}=-\dfrac{9}{4}$ şi se obţine pentru $x_{\min}=\dfrac{3}{2}$.

Din tabel deducem $\operatorname{Im} f=\left[-\dfrac{9}{4},\infty\right)$.

b) În acest caz $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2(-1)}=-1$. Cum $a=-1<0$, funcţia f are valoare maximă.

Tabelul de variaţie este:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)=4$ (max)	$\searrow$	$-\infty$

Pe intervalul $(-\infty,-1]$ funcţia f este strict crescătoare, iar pe intervalul $[-1,\infty)$ funcţia f este strict descrescătoare. Valoarea maximă a lui f este $f_{\max}=4$ şi se obţine pentru $x_{\max}=-1$. Din tabel deducem $\operatorname{Im} f=(-\infty,4]$.

2. **Să se scrie funcţia de gradul doi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sub formă canonică şi să se deducă valoarea extremă a funcţiei, în cazurile: a) $f(x)=3x^2-x$; b) $f(x)=x^2+x+2$; c) $f(x)=-4x^2+2x+3$.**

R. a) Avem scrierea:

$$3x^2-x=3\left(x^2-\frac{1}{3}x\right)=3(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}=3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{36}\right]=3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{12}.$$

Deci $f(x)=3\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2-\dfrac{1}{12}$ este forma canonică a funcţiei date.

De aici $f(x)\geq-\dfrac{1}{12}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, cu egalitate dacă $x=\dfrac{1}{6}$. Deci $f_{\min}=-\dfrac{1}{12}$ se atinge pentru $x_{\min}=\dfrac{1}{6}$.

b) În acest caz $x^2+x+2=x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+2-\dfrac{1}{4}=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$.

Aşadar forma canonică a lui f este $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$.

De aici $f(x)\geq\frac{7}{4},\forall x\in\mathbb{R}$, cu egalitate pentru $x=-\frac{1}{2}$.

Avem $f_{\min}=\frac{7}{4}$ pentru $x_{\min}=-\frac{1}{2}$.

c) Avem:

$$-4x^2+2x+3=-4\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)=-4\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{3}{4}\right)=-4\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{13}{16}\right]=$$

$$=-4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{13}{4}.\ \text{Deci}\ f(x)=-4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{13}{4}.$$

Aici $f(x)\leq\frac{13}{4}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ cu egalitate dacă $x=\frac{1}{4}$. Avem $f_{\max}=\frac{13}{4}$, pentru $x_{\max}=\frac{1}{4}$.

3. **Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ dacă $f(1)=\frac{3}{2}$ şi pentru $x=2$ se obţine valoarea extremă egală cu 1.**

R. A determina funcţia f înseamnă a-i preciza coeficienţii a, b, c. Din $f(1)=\frac{3}{2}$ rezultă ecuaţia în a, b, c, $a+b+c=\frac{3}{2}$. Punctul de extrem pentru funcţia de gradul doi este $x=-\frac{b}{2a}$. Deci o nouă ecuaţie pentru a, b, c este $-\frac{b}{2a}=2$. În fine valoarea extremă a funcţiei de gradul al doilea este egală cu $-\frac{\Delta}{4a}$. Deci $-\frac{\Delta}{4a}=1$, adică $b^2-4ac=-4a$, dă a treia ecuaţie în a, b, c.

Avem de rezolvat sistemul: $\begin{cases}a+b+c=\frac{3}{2}\\ b=-4a\\ b^2-4ac=-4a\end{cases}$. Găsim soluţia $a=\frac{1}{2}$, $b=-2$, $c=3$. Deci funcţia căutată este $f(x)=\frac{x^2}{2}-2x+3$.

4. **Fie familia de funcţii de gradul al doilea $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,**
$f_m(x)=(m+1)x^2-2(m+2)x+m+2$, $m\neq-1$. Să se determine m astfel încât:

a) f să aibă o valoare minimă negativă; b) f să aibă o valoare minimă pozitivă;

c) f să aibă o valoare maximă negativă; d) f să aibă o valoare maximă pozitivă;

e) $y=f(x)$ să fie crescătoare pe $[2,\infty)$; f) $y=f(x)$ să fie descrescătoare pe $[1,2]$.

R. a) Funcţia pătratică f are valoare minimă dacă $m+1>0$, adică $m>-1$, iar valoarea minimă se obţine pentru $x_{\min}=-\frac{b}{2a}$, când $f_{\min}=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{m+2}{m+1}$. Deci se impune condiţia $-\frac{m+2}{m+1}<0$, când $m\in(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$.

Aşadar f are minim negativ dacă are loc sistemul de condiţii: $\begin{cases}m+1>0\\ -\frac{\Delta}{4a}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ m\in(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)\end{cases}$

De aici $m\in[(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)]\cap(-1,\infty)=(-1,\infty)$.

b) Funcţia f are valoare minimă pozitivă dacă are loc sistemul:

$$\begin{cases}m+1>0 & \text{(coeficientul lui } x^2 \text{ este pozitiv)}\\ -\frac{m+2}{m+1}>0 & (\text{condiţia } f_{\min}>0)\end{cases}$$

Rezolvând sistemul rezultă $m\in\emptyset$, adică nu există m din $\mathbb{R}$ pentru care f să aibă valoare minimă pozitivă.

c) Sistemul de condiţii este: $\begin{cases} m+1<0 & \text{(condiţia ca funcţia să aibă maxim)} \\ -\dfrac{m+2}{m+1}<0 & \text{(condiţia ca valoarea maximă a funcţiei să fie negativă, } f_{\max}<0)\text{).} \end{cases}$

Soluţia sistemului este $m \in (-\infty, -2)$.

d) Se impune sistemul de condiţii $\begin{cases} m+1<0 & \text{(condiţia ca } f \text{ să aibă maxim)} \\ -\dfrac{m+2}{m+1}>0 & \text{(condiţia ca } f \text{ să aibă valoarea maximă pozitivă, } f_{max}>0\text{).} \end{cases}$

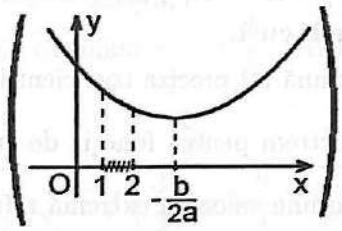
Găsim $m \in (-2, -1)$.

e) Funcţia $y = f(x)$ este crescătoare pe un interval de forma $[\alpha, \infty)$ dacă:

1) $m+1>0 (a>0)$ şi 2) $[\alpha, \infty) \subset \left[-\dfrac{b}{2a}, \infty\right)$, ceea ce este echivalent cu sistemul: $\begin{cases} m+1>0 \\ -\dfrac{b}{2a} \le 2 \end{cases}$.

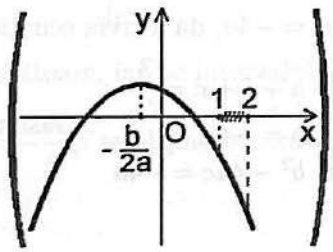
Rezolvând sistemul obţinem $m \ge 0$.

f) Există două posibilităţi: 1) $\begin{cases} a>0 \\ -\dfrac{b}{2a} \ge 2 \end{cases}$



sau

2) $\begin{cases} a<0 \\ -\dfrac{b}{2a} \le 1 \end{cases}$



În cazul nostru cele două sisteme sunt: 1) $\begin{cases} m+1>0 \\ \dfrac{m+2}{m+1} \ge 2 \end{cases}$ sau 2) $\begin{cases} m+1<0 \\ \dfrac{m+2}{m+1} \le 1 \end{cases}$.

Primul sistem are soluţia $m \in (-1, 0]$, iar al doilea sistem are soluţia $m \in (-\infty, -1)$.
În final, $m \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0]$.

5. **Dacă $a, b, c \in (0,1)$, atunci numerele $(1-a)b$, $(1-b)c$, $(1-c)a$ nu pot fi simultan mai mari decât $\dfrac{1}{4}$.**

R. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$ are maxim pentru $x = \dfrac{1}{2}$ egal cu $f_{\max} = \dfrac{1}{4}$. Dacă prin absurd numerele ar fi simultan mai mari ca $\dfrac{1}{4}$, făcând produsul lor ar rezulta $a(1-a)b(1-b)c(1-c) > \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$, ceea ce-i absurd deoarece: $a(1-a) = a - a^2 \le \dfrac{1}{4}$, $b(1-b) \le \dfrac{1}{4}$, $c(1-c) \le \dfrac{1}{4}$ şi înmulţite dau $a(1-a)b(1-b)c(1-c) \le \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$, relaţie contradictorie cu cea de mai sus. Deci concluzia problemei este adevărată.

6. **Să se determine cea mai mică valoare pe care o poate lua funcţia** $f : \left[\dfrac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 - \sqrt{2x-1}$.

R. Radicalul de ordin par există dacă $2x-1 \geq 0$, adică $x \geq \frac{1}{2}$. Notăm $\sqrt{2x-1} = y$, iar de aici $x = \frac{y^2+1}{2}$ şi rescriem funcţia f având ca argument pe y $\left(x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{y^2+1}{2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y^2 \geq 0\right.$, adevărată $\left.\forall y \in \mathbb{R}\right)$.

Deci $f(y) = \frac{y^2-2y-1}{2} = \frac{(y-1)^2-2}{2} \geq -1$, cu egalitate dacă $y = 1$, adică $\sqrt{2x-1} = 1$, care dă $x = 1$. Aşadar $f(x) \geq f(1), \forall x \geq \frac{1}{2}$.

Probleme propuse

1. **Să se determine funcţia de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, dacă:**

1) $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$; 2) $f(-2) = 11$, $f(1) = -4$, $f(3) = 6$;

3) $f(-1) = 2$, $f(1) = -3$, $f(2) = 1$; 4) $f(-1) = -6$, $f(1) = 4$, $f(2) = 6$.

2. **a) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, valoarea extremă a funcţiei precum şi $\mathrm{Im} f$, în cazurile:**

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = -x^2$; 3) $f(x) = x^2 + 1$; 4) $f(x) = -x^2 - 1$;

5) $f(x) = 2x^2 + x$; 6) $f(x) = -x^2 + x$; 7) $f(x) = x^2 - 3x + 2$;

8) $f(x) = x^2 - 4x + 4$; 9) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$; 10) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$.

b) Să se arate că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este strict monotonă, în cazurile:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 3x, & x < 0 \end{cases}$; 2) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \leq -1 \\ x + 1, & x > -1 \end{cases}$;

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$; 4) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & x \leq 2 \\ -2x + 4, & x > 2 \end{cases}$.

3. **a) Să se determine parametrul real m pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 1$ să fie pe rând:**

1) **strict descrescătoare pe $(-\infty, 3]$ şi strict crescătoare pe $[3, \infty)$;**

2) **strict descrescătoare pe $(-\infty, 3]$;** 3) **strict crescătoare pe $[3, \infty)$;**

4) **strict descrescătoare pe $[1, 2]$;** 5) **strict crescătoare pe $[1, 2]$;**

6) **nemonotonă pe $[1, 2]$.**

b) Să se determine parametrul real m pentru care funţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + (m+1)x + m$ să fie pe rând:

1) **strict crescătoare pe $(-\infty, -1]$ şi strict descrescătoare pe $[-1, \infty)$;**

2) **strict crescătoare pe $(-\infty, -1]$;** 3) **strict descrescătoare pe $[-1, \infty)$;**

4) **strict crescătoare pe $[-2, 3]$;** 5) **strict descrescătoare pe $[-2, 3]$;**

6) **nemonotonă pe $[-2, 3]$.**

4. **Să se determine, utilizând monotonia funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(A)$, $f^{-1}(B)$, în cazurile:**

1) $f(x) = x^2 - 1$; $A = [-1, 0]$, $A = [-1, 1]$, $B = \{0\}$, $B = \{0, 1\}$;

2) $f(x) = 4 - x^2$; $A = [-3, 1]$, $A = [1, 3]$, $B = \{0\}$, $B = \{-5, 0\}$;

3) $f(x) = x^2 - 3x$; $A = (-1, 2)]$, $B = \{0\}$, $B = \{-2, 0, \}$;

4) $f(x) = 2x - x^2$; $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup [3, 4]$, $B = \{0\}$, $B = \{-3, 0\}$;

5) $f(x) = x^2 + x + 1$; $A = [-1, 1]$, $B = \{0\}$, $B = \{0, 1\}$.

5. **a) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 2$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât $f_{\min} = 1$.**

b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + x - 2m$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât $f_{\max} = \frac{1}{2}$.

c) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2(m+1)x + m - 2$, $m \in \mathbb{R}$.

1) Să se determine m pentru care $f_{\max} = 8$.

2) Să se determine m pentru care $f_{\min} = 5$.

6. Să se determine parametrul real m pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - m + 1, & x \le -1 \\ mx^2 - x + 1, & x > -1 \end{cases}$ să fie monotonă.

7. a) Fie familia de funcţii de gradul doi $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^2 - x + 1 + m$. Să se determine parametrul real m astfel încât, pe rând, f să aibă o:

1) valoare minimă negativă; 2) valoare minimă pozitivă.

b) Fie familia de funcţii de gradul doi $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = -x^2 + x + m - 1$. Să se determine parametrul real m astfel încât, pe rând, f să aibă o:

1) valoare maximă negativă; 2) valoare maximă pozitivă.

8. Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ dacă $f(1) = 0$ şi pentru $x = \frac{3}{4}$ se obţine valoarea extremă egală cu $-\frac{1}{8}$.

9. Dacă $a, b, c \in (0, 2)$, atunci numerele $(2 - a)b$, $(2 - b)c$, $(2 - c)a$ nu pot fi simultan mai mari decât 1.

10. Să se scrie sub formă canonică funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi din aceasta să se deducă valoarea extremă a funcţiei şi apoi să se precizeze $\mathrm{Im} f$ în cazurile:
1) $f(x) = x^2 - 1$; 2) $f(x) = x^2 + 3$; 3) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; 4) $f(x) = -5x^2 + 2x + 3$;
5) $f(x) = -3x^2 + 4x$; 6) $f(x) = 4x^2 - 5x$; 7) $f(x) = x^2 + x + 31$; 8) $f(x) = -x^2 - x - 1$.

11. a) Să se rezolve ecuaţiile de gradul al doilea:
1) $x^2 - 6x + 8 = 0$; 2) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$; 3) $6x^2 - 5x + 1 = 0$; 4) $4x^2 - 4x + 1 = 0$;
5) $x^2 + x + 3 = 0$; 6) $x^2 - 3x = 0$; 7) $\sqrt{3}x^2 - x = 0$; 8) $x^2 + 2 = 0$; 9) $x^2 - 3 = 0$; 10) $x^2 - 16 = 0$.

b) Să se rezolve ecuaţiile:
1) $x(x-1)(x-2)(x-3) = 3$; 2) $\frac{1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x^2 - x - 1} = \frac{4}{3}$;
3) $x^2 - 3x + \frac{2}{x^2 - 3x} = 3$; 4) $4x^2 + \frac{1}{2x^2 - x} = 4 + 2x$.

12. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât fiecare din ecuaţii să aibă pe rând:
a) rădăcini reale distincte; b) rădăcini egale; c) rădăcini nereale:
1) $x^2 - mx + 2 = 0$; 2) $x^2 - x + m + 1 = 0$; 3) $mx^2 + (m+1)x + 1 = 0$; 4) $mx^2 - 2mx + m + 2 = 0$.

13. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = 0$. Să se arate că ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcini reale de semne contrare.

14. Dacă $a, b \ge 4$, atunci cel puţin una din ecuaţiile $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$ are o rădăcină reală.

15. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + n$. Să se determine parametrii reali m, n, astfel încât f să fie strict descrescătoare pe $(-\infty, -1]$ şi strict crescătoare pe $[-1, \infty)$, iar $\mathrm{Im} f = [-2, \infty)$.

16. Să se determine cea mai mare valoare pe care o poate lua funcţia $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 + \sqrt{1 - x}$.

17*. (Tăierea tortului) Să se determine numărul maxim de bucăţi în care se poate tăia un tort, dacă se fac n tăieturi ($a_1 = 2$, $a_n = n + a_{n-1}$).

18. Dacă $f(x) = x^2 - 2008x$, atunci $\sum_{k=0}^{1003} f(k) = \sum_{k=1005}^{2008} f(k)$.

19. Dacă $x, y, z \in [0, 1]$, atunci $x^2 + y^2 + z^2 - xyz \le 2$.

20. **Să se determine cea mai mică valoare a produsului** $x(x+1)(x+2)(x+3)$.

Graficul funcţiei de gradul al doilea

Prin graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, vom păstra convenţia făcută în prezentarea generală, înţelegem reprezentarea geometrică a mulţimii
$G_f=\{(x,y=ax^2+bx+c);\ x\in\mathbb{R}\}$.
Graficul funcţiei de gradul al doilea se numeşte **parabolă** (argumentarea riguroasă o vom prezenta în anii următori la geometrie analitică – parabola fiind locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de o dreaptă fixă şi un punct fix).
Cuplul $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)\in G_f$ are ca imagine în planul cartezian punctul notat cu litera V şi numit **vârful parabolei**. Deci $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$.
Axa de simetrie a parabolei. Are loc următorul rezultat important.

Teoremă. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$. Dreapta verticală $x=-\frac{b}{2a}$ (care conţine vârful V) este axă de simetrie pentru graficul funcţiei f.

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că pentru puncte simetrice faţă de $-\frac{b}{2a}$, de forma $-\frac{b}{2a}-\varepsilon$, $-\frac{b}{2a}+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ (fig. 1), atunci $f\left(-\frac{b}{2a}-\varepsilon\right)=f\left(-\frac{b}{2a}+\varepsilon\right)$,
ceea ce se obţine printr-un calcul simplu. Prin urmare, punctele
$M\left(-\frac{b}{2a}-\varepsilon,f\left(-\frac{b}{2a}-\varepsilon\right)\right)$, $M'\left(-\frac{b}{2a}+\varepsilon,f\left(-\frac{b}{2a}+\varepsilon\right)\right)$
sunt simetrice faţă de dreapta $x=-\frac{b}{2a}$. ■

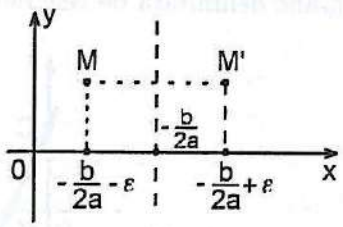


Fig. 1

Pentru trasarea graficului funcţiei de gradul al doilea într-un reper cartezian vom utiliza metoda prin puncte. Se determină câteva puncte importante ale graficului (vom vedea mai jos) care apoi se unesc printr-o curbă continuă.
Pentru trasarea graficului se recomandă parcurgerea următoarelor etape:
1. Intersecţia parabolei cu axele de coordonate. Notăm cu $\mathcal{P}$ parabola.
Intersecţia parabolei cu axa Ox (scriem: $\mathcal{P}\cap Ox$): Orice punct (x,y) de pe axa Ox are ordonata $y=0$, deci se pune $y=0$ şi se rezolvă ecuaţia $ax^2+bx+c=0$. În funcţie de semnul lui $\Delta=b^2-4ac$ avem cazurile:
1) $\Delta>0$, când ecuaţia are două rădăcini reale distincte x_1, x_2. Punctele $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$ reprezintă punctele de intersecţie ale parabolei $\mathcal{P}$ cu axa Ox (altfel spus rădăcinile reale ale ecuaţiei ataşate funcţiei f sunt abscisele punctelor în care $\mathcal{P}$ taie axa Ox). În acest caz spunem că parabola $\mathcal{P}$ **intersectează** axa Ox.
2) $\Delta=0$, când ecuaţia are o rădăcină dublă $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$. În acest caz parabola $\mathcal{P}$ şi axa Ox au în comun punctul de coordonate $\left(-\frac{b}{2a},0\right)$ care este chiar vârful parabolei $V\left(-\frac{b}{2a},0\right)$. Spunem că parabola $\mathcal{P}$ este **tangentă** axei Ox.
3) $\Delta<0$, când ecuaţia nu are rădăcini reale. Acum parabola $\mathcal{P}$ şi axa Ox n-au puncte în comun. Spunem că parabola $\mathcal{P}$ **nu intersectează** axa Ox.
Intersecţia parabolei cu axa Oy (scriem: $\mathcal{P}\cap Oy$): Orice punct (x,y) de pe axa Oy are abscisa $x=0$, deci se face $x=0$ când avem $f(0)=c$. Deci punctul $C(0,c)$ este punctul în care parabola taie axa Oy.

Să reţinem că: **întotdeauna parabola taie axa Oy.**

2. Determinarea vârfului parabolei. Determinăm vârful $V(x_V, y_V)$, unde $x_V = -\frac{b}{2a}$, $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ reprezintă coordonatele.

3. Determinarea altor valori. În cazul în care $\mathcal{P}$ nu taie axa Ox, pentru uşurinţa trasării graficului se aleg una sau două valori x_1', x_2' la dreapta valorii x_V şi se calculează $f(x_1')$, $f(x_2')$ obţinând punctele $M(x_1', f(x_1'))$, $N(x_2', f(x_2'))$ şi se simetrizează apoi aceste puncte în raport cu dreapta $x = -\frac{b}{2a}$.

4. Tabelul de variaţie. Elementele pe care le-am determinat mai sus în celelalte etape le grupăm într-un tabel numit **tabelul** (sau **tabloul**) **de variaţie a funcţiei** f în care se marchează monotonia funcţiei f prin săgeţi ($\nearrow$ pentru funcţie strict crescătoare sau $\searrow$ pentru funcţie strict descrescătoare).

Forma acestui tabel este:

I. $a > 0$,

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{b}{2a}$		0		x_2		$+\infty$
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$ (min)	$\nearrow$	c	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

,

iar graficele posibile sunt prezentate în fig. 2. a), b), c).

În limbajul trivial dacă $a > 0$ se spune că graficul „ţine" apă, deci se acumulează. Se mai spune că graficul are ramurile „în sus".

Acest grafic are proprietatea că dacă unim oricare două puncte distincte ale sale, atunci porţiunea din grafic delimitată de cele două puncte este situată sub coarda determinată de cele două puncte.

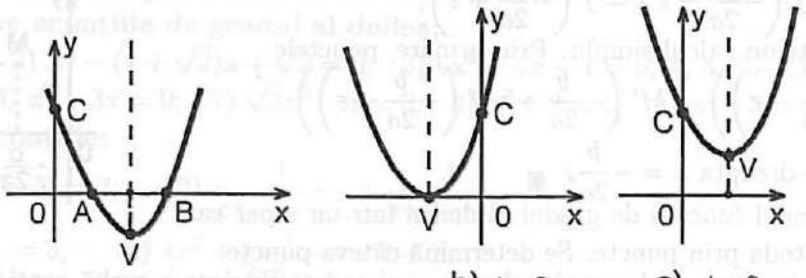


Fig. 2

Spunem că **graficul este convex**, iar **funcţia este convexă.**

II. $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{b}{2a}$		0		x_2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$ (max)	$\searrow$	c	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

,

iar graficele posibile sunt cele de mai jos (fig. 3. a), b), c)):

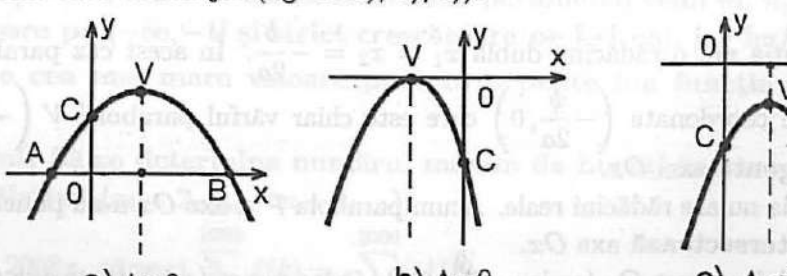


Fig. 3

În limbajul trivial $a < 0$ înseamnă „risipă", graficul „nu ţine" apă. Se spune că graficul are ramurile „în jos". Acest grafic are proprietatea că dacă unim oricare două puncte ale sale, atunci partea din grafic delimitată de cele două puncte este situată deasupra coardei determinată de cele două puncte. Spunem că un astfel de **grafic este concav**, iar **funcţia este concavă.**

5. **Trasarea graficului.** În reperul cartezian ales se trec punctele deduse din tabelul de variaţie unindu-se printr-o linie continuă. Pentru o trasare cât mai bună a graficului este indicat să figurăm şi axa de simetrie a graficului. Se obţine astfel graficul funcţiei.

Probleme rezolvate

1. **Să se determine funcţia de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ dacă graficul acesteia intersectează axa Oy în punctul $A(0,3)$ şi este tangent axei Ox în punctul $B(1,0)$.**

R. Faptul că graficul funcţiei trece prin punctul $A(0,3)$ înseamnă că pentru $x = 0$, $f(0) = 3$, adică $c = 3$. Graficul funcţiei fiind tangent axei Ox în punctul $B(1,0)$ rezultă că acest punct este vârful parabolei. Deci $x_V = 1$, $y_V = 0$, adică avem relaţiile: $b = -2a$, $b^2 - 4ac = 0$. De aici se obţine $a = 3$, $b = -6$. Găsim $f(x) = 3(x-1)^2$.

2. **Să se traseze graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indicând în fiecare caz în parte axa de simetrie a graficului:**

a) $f(x) = x^2 + 1$; b) $f(x) = -x^2 + 4$; c) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; d) $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

R. Parcurgem etapele indicate la partea teoretică.

a) 1. **Intersecţia parabolei $\mathcal{P}$ cu axele de coordonate.**

$\mathcal{P} \cap Ox : y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$. Deci parabola nu taie axa Ox.

$\mathcal{P} \cap Oy : x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$. Avem punctul $C(0,1) \in Oy$.

2. **Determinarea vârfului parabolei.** Calculăm $x_V = -\dfrac{b}{2a} = 0$ şi $y_V = f(x_V) = 1$.

Avem punctul $V(0,1)$ (de fapt $V = C$).

3. **Determinarea altor valori.** Cum ecuaţia axei de simetrie a lui $\mathcal{P}$ este $x = 0$ luăm $x_1' = 1$, $x_2' = 2$ şi avem $f(1) = 2$, $f(2) = 5$. Deci punctele $M(1,2), N(2,5) \in \mathcal{P}$.

4. **Tabelul de variaţie.**

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1 (min)	$\nearrow$	2	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

5. **Trasarea graficului.** În reperul cartezian xOy se marchează punctele $V(0,1)$, $M(1,2)$, $N(2,5)$ (fig. 4).

Punctele M, N se simetrizează în raport cu axa de simetrie $x = 0$, care este chiar axa Oy. Se unesc aceste puncte printr-o linie continuă şi obţinem forma parabolei $\mathcal{P}$. După cum se vede de pe grafic ramurile parabolei sunt infinite (în sensul că graficul nu se „opreşte" la punctele N şi N').

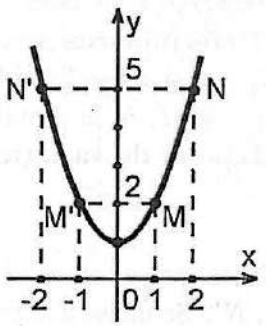


Fig. 4

b) 1. **Intersecţia parabolei cu axele de coordonate**

$\mathcal{P} \cap Ox : y = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$; $x_2 = 2$. Avem punctele $A(-2,0), B(2,0) \in Ox$. În acest caz parabola intersectează axa Ox. $\mathcal{P} \cap Oy : x = 0 \Rightarrow f(0) = 4$. Deci $C(0,4) \in Oy$.

2. **Determinarea vârfului V al parabolei.** Calculăm $x_V = -\dfrac{b}{2a} = 0$, $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = f(x_V) = 4$, adică $V(0,4)$ care este chiar punctul C.

3. **Tabelul de variaţie**

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4 (max)	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4. **Trasarea graficului.** Forma graficului este dată în fig. 5.

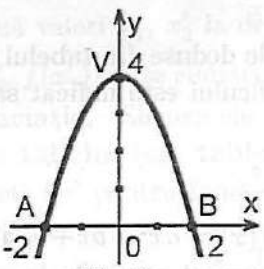


Fig. 5

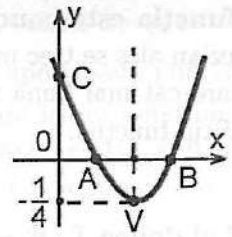


Fig. 6

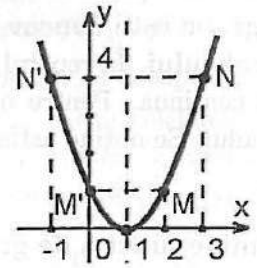


Fig. 7

c) 1. **Intersecţia parabolei cu axele de coordonate**

$\mathcal{P} \cap Ox : y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$, ecuaţie ce are soluţiile $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Deci $A(1,0), B(2,0) \in Ox$.

$\mathcal{P} \cap Oy : x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$. Avem punctul $C(0,2) \in Oy$.

2. **Determinarea vârfului V al parabolei.** Avem coordonatele $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$, $y_V = f(x_V) = -\frac{1}{4}$. Deci $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

3. **Tabelul de variaţie**

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$ (min)	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. **Trasarea graficului.** Graficul funcţiei este cel din fig. 6.

d) 1. **Intersecţia parabolei cu axele de coordonate.** $\mathcal{P} \cap Ox : y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$. Ecuaţia are rădăcina dublă $x_1 = x_2 = 1$. Deci $A(1,0) \in Ox$. În acest caz parabola este tangentă axei Ox.

$\mathcal{P} \cap Oy : x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$. Deci $C(0,1) \in Oy$.

2. **Determinarea vârfului V al parabolei.** Calculăm coordonatele vârfului date de $x_V = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_V = f(x_V) = 0$. Deci $V(1,0)$ (vedem că $V = A$).

3. **Determinarea altor valori.** Axa de simetrie a graficului are ecuaţia $x = 1$. Luăm $x_1' = 2$ când $f(2) = 1$ şi $x_2' = 3$ când $f(3) = 4$. Deci punctele $M(2,1)$, $N(3,4)$ aparţin parabolei $\mathcal{P}$. Se simetrizează punctele M, N în raport cu dreapta $x = 1$ obţinându-se punctele M', N'.

4. **Tabelul de variaţie:**

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0 (min)	$\nearrow$	1	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

5. **Trasarea graficului.** Se simetrizează punctele M, N în raport cu dreapta $x = 1$ obţinându-se punctele M', N'. Se unesc aceste puncte printr-o linie continuă găsind forma graficului (fig. 7).

3. Fie $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = (m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 2$, $m \neq -1$.

a) Să se arată că parabolele $\mathcal{P}_m$ asociate funcţiilor f_m trec printr-un punct fix.

b) Să se arate că vârfurile acestor parabole se află pe dreapta de ecuaţie $y + x = 0$.

c) Să se determine parametrul real m astfel încât vârfurile parabolelor $\mathcal{P}_m$ să fie:

1) deasupra axei Ox; 2) sub axa Ox; 3) pe dreapta $y = 1$; 4) sub dreapta $y = -2$.

d) Să se determine porţiunea din dreapta de la b) care conţine vârfurile parabolelor cu ramurile în sus.

R. a) Fie $A(x_0, y_0)$ punctul fix prin care trec parabolele $\mathcal{P}_m$.

Avem egalitatea $y_0 = (m+1)x_0^2 - 2(m+2)x_0 + m + 2$, $\forall m \in \mathbb{R} - \{-1\}$ sau ordonând după m

$m(x_0^2-2x_0+1)+x_0^2-4x_0+2-y_0=0$, $\forall m\in\mathbb{R}-\{-1\}$.
Particularizăm pe m. Pentru $m=0$ rezultă $x_0^2-4x_0+2-y_0=0$, $(*)$, iar dacă $m\in\mathbb{R}-\{-1,0\}$ se deduce $m(x_0^2-2x_0+1)=0$, adică $x_0^2-2x_0+1=0$. De aici $x_0=1$, iar din $(*)$ rezultă $y_0=-1$. Deci punctul fix căutat este $A(1,-1)$.

b) Vom determina coordonatele vârfului V_m asociat parabolei $\mathcal{P}_m$. Avem:
$x_{V_m}=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{m+2}{m+1}$, iar $y_{V_m}=-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{m+2}{m+1}$.
Pentru a determina ecuaţia pe care o verifică coordonatele lui V_m se elimină parametrul m din egalităţile care definesc pe x_{V_m} şi y_{V_m}.
Aici prin adunare rezultă $x_{V_m}+y_{V_m}=0$. Deci vârfurile parabolelor $\mathcal{P}_m$ se află pe dreapta de ecuaţie $x+y=0$ (ecuaţia celei de-a doua bisectoare).

c) 1) Vârful parabolei este deasupra axei Ox dacă $y_{V_m}>0$, adică dacă $-\dfrac{m+2}{m+1}>0$, ceea ce dă $m\in(-2,-1)$. 2) Condiţia este $y_{V_m}<0\Leftrightarrow-\dfrac{m+2}{m+1}<0$. De aici $m\in\mathbb{R}-[-2,-1]$.

3) Se impune condiţia $y_{V_m}=1\Leftrightarrow-\dfrac{m+2}{m+1}=1$. Găsim $m=-\dfrac{3}{2}$.

4) Condiţia este $y_{V_m}<-2\Leftrightarrow-\dfrac{m+2}{m+1}<-2$, când $m\in(-1,0)$.

d) Parabola asociată funcţiei $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq0$ are ramurile în sus (în jos) dacă $a>0$ ($a<0$). În cazul nostru $m+1>0$. Din $x_{V_m}=\dfrac{m+2}{m+1}$ rezultă $m=\dfrac{2-x_{V_m}}{x_{V_m}-1}$. Acum cerinţa $m+1>0$ devine: $\dfrac{2-x_{V_m}}{x_{V_m}-1}+1>0\Leftrightarrow\dfrac{1}{x_{V_m}-1}>0\Leftrightarrow x_{V_m}-1>0\Leftrightarrow x_{V_m}>1$. Deci punctele de pe dreapta $y+x=0$ care sunt vârfuri ale parabolelor cu ramurile în sus sunt acelea pentru care abscisa $x>1$.

Simetrizarea graficului în raport cu axele

Simetrizarea în raport cu axa Ox. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, funcţii de gradul al doilea, având ca grafice parabolele $\mathcal{P}_f,\mathcal{P}_g$.
Dacă $A(x,f(x))$ este un punct de pe parabola $\mathcal{P}_f$, atunci simetricul lui în raport cu axa Ox este punctul $A'(x,-f(x))$ (fig. 8).
Dar acest punct trebuie să se afle şi pe parabola $\mathcal{P}_g$, ceea ce atrage egalitatea $g(x)=-f(x)$.
Deci,

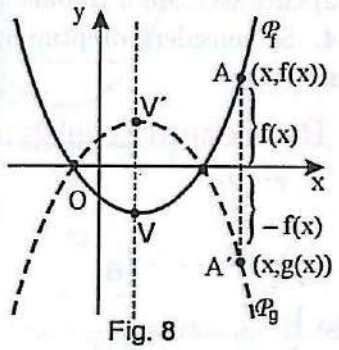


Fig. 8

Cele două parabole sunt simetrice în raport cu axa Ox dacă $g(x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Exemplu. Trasaţi în acelaşi reper cartezian, parabolele asociate funcţiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x$, $g(x)=-x^2+3x$.

Simetrizarea în raport cu axa Oy. Deci:

Parabolele $\mathcal{P}_f$, $\mathcal{P}_g$ sunt simetrice faţă de axa Oy dacă (fig. 9):
$g(-x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

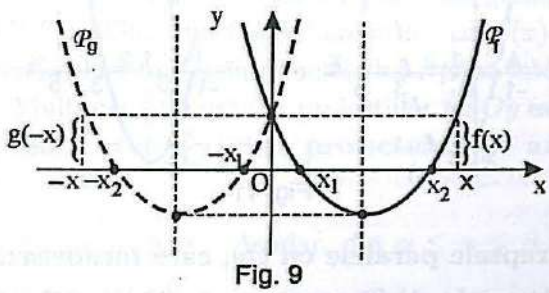


Fig. 9

Exemplu. Trasaţi în acelaşi reper cartezian, parabolele asociate funcţiilor:
$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x$, $g(x)=x^2+x$.

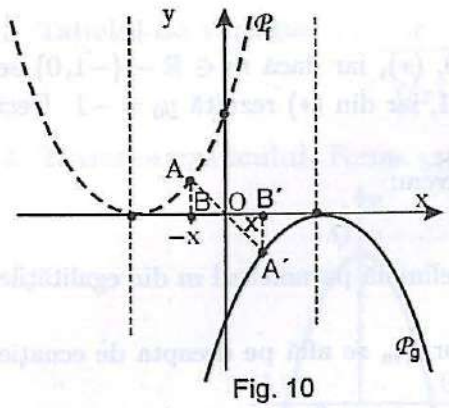


Fig. 10

Simetrizarea în raport cu originea O. Din congruenţa triunghiurilor ABO şi $A'B'O$ (fig. 10), B' are coordonatele $(x, 0)$, iar B coordonatele $(-x, 0)$, deducem $f(-x) = -g(x)$. Deci,

Parabolele $\mathcal{P}_f$, $\mathcal{P}_g$ sunt simetrice în raport cu originea O, dacă $f(-x) = -g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplu. Trasaţi în acelaşi reper cartezian, parabolele asociate funcţiilor
$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = -x^2 + 2x - 1$.

Probleme practice în care intervine funcţia de gradul al doilea

1. Zborul unei comete văzut de pe pământ poate fi modelat de ecuaţia $y = 5 - 4x - 2x^2$. Orizontul poate fi reprezentat de dreapta $y = k$, unde k este o constantă care depinde de poziţia observatorului. Soluţiile ecuaţiei $(5 - k) - 4x - 2x^2 = 0$ reprezintă abscisele punctelor de apariţie şi dispariţie a cometei. Precizaţi valorile lui k, ce asigură vizibilitatea cometei.
Pentru aceasta este suficient să cerem ca ecuaţia obţinută să aibă rădăcinile reale. De aici $\Delta \geq 0$, dă $k \leq 7$.

2. Profilul unei trambuline de schi este bazat pe ecuaţia $y = 0,004x^2 - 0,8x$. Pentru ce valori ale lui x, $y = 0$? Care este cel mai de jos punct al trambulinei. Precizaţi coordonatele acestui punct.

3. Distanţa parcursă de un corp în cădere liberă este dată de legea $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, unde s se măsoară în metri, t (timpul) se măsoară în secunde, iar $g \simeq 9,8$ m/s^2 este acceleraţia gravitaţională. Determinaţi:
1) distanţa parcursă în 5 s;
2) câte secunde îi trebuie corpului pentru a parcurge distanţa de 15 m?

4. Se consideră dreptunghiurile de perimetru egal cu 20. Determinaţi laturile aceluia care are aria cea mai mare.

Reprezentarea grafică a funcţiei $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

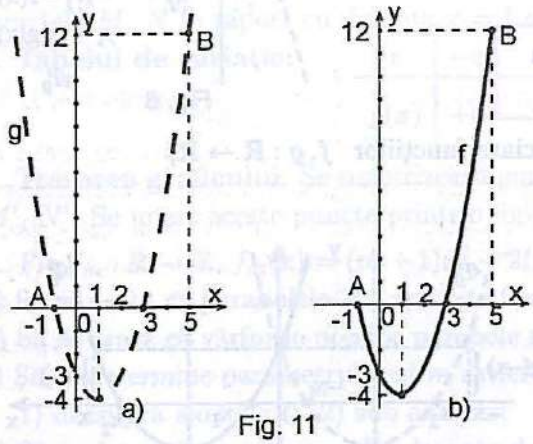


Fig. 11

Ceea ce ni se cere în acest paragraf este de a trasa graficul unei restricţii a funcţiei de gradul doi pe mulţimea A, submulţime a lui $\mathbb{R}$. Pentru aceasta trasăm graficul funcţiei corespunzătoare pe $\mathbb{R}$ (deci a extensiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$) cu o linie punctată, după care reprezentăm cu o linie continuă acea parte din grafic care corespunde domeniului de definiţie (deci se păstrează din graficul funcţiei g acea parte corespunzătoare valorilor lui $x \in A$ – adică acea parte a reprezentării grafice a cărei proiecţie pe axa Ox este mulţimea A).
Altfel spus, **din graficul funcţiei trasat pe $\mathbb{R}$ păstrăm acea porţiune pe care o delimitează dreptele paralele cu Oy, care încadrează mulţimea A.**

Exemple. 1) Să se traseze graficul funcţiei $f : [-1, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

R. Considerăm extensia lui f, funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x - 3$ al cărei grafic este trasat punctat în fig. 11.a). Reţinem din graficul lui g porţiunea cuprinsă între A şi B (fig. 11.b)).

2) Să se traseze graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 1 \\ 9 - x^2, & x > 1 \end{cases}$$

R. Urmăm aceeaşi regulă ca mai sus şi considerăm funcţiile $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = x^2 - 4$, $g_2(x) = 9 - x^2$. Trasăm graficele funcţiilor g_1, g_2 cu o linie punctată (fig. 12,a) după care cu o linie continuă reprezentăm porţiunea formată din puncte ale graficului lui g_1 cu abscisa $x \leq 1$, iar în continuare tot cu o linie continuă reprezentăm porţiunea formată din puncte ale graficului funcţiei g_2 cu abscisa $x > 1$ (fig. 12,b)). Graficul lui f este format din două ramuri de parabole.

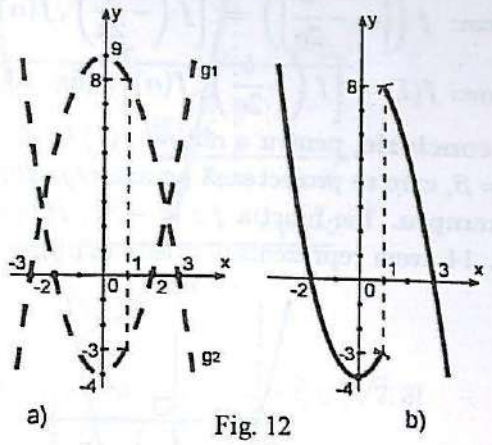


Fig. 12

Imagini şi preimagini ale unor intervale

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ şi $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Cum se poate preciza $f(I) = \{f(x) | x \in I\}$ dacă se cunoaşte forma graficului lui f?

Reamintim că mulţimea $f(I)$ se numeşte **imaginea mulţimii** I prin f. Dacă $I = \mathbb{R}$, atunci $f(\mathbb{R}) = \mathrm{Im} f$ se numeşte, simplu, **imaginea funcţiei** f.

Sunt de analizat trei cazuri (presupunem $a > 0$; cazul $a < 0$ se tratează analog).

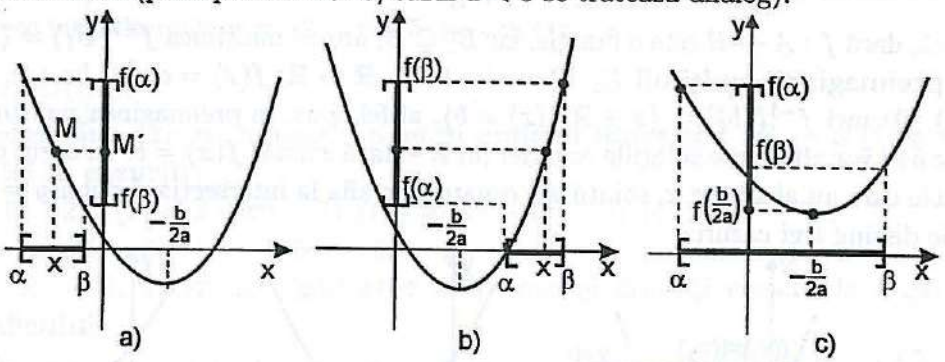


Fig. 13

1) $I \subset \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ (fig.13, a)). Funcţia f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ şi rămâne la fel pe o submulţime a acesteia. Deci, din $\alpha \leq x \leq \beta$ rezultă $f(\alpha) \geq f(x) \geq f(\beta)$, ceea ce arată că $f(I) = [f(\beta), f(\alpha)]$. Dacă $x \in I$ (intervalului I îi corespunde pe axa Ox segmentul marcat mai îngroşat $[\alpha, \beta]$), atunci pentru a determina imaginea $f(x)$ se duce prin x o perpendiculară pe Ox până taie graficul într-un punct M. Din acest punct ducem perpendiculara MM' pe Oy. Punctul M' are ordonata $f(x)$. Pentru a obţine imaginea intervalului I prin f, ducem perpendiculare pe Ox în punctele lui I până intersectează graficul lui f. Aceste puncte se proiectează pe Oy. Mulţimea ordonatelor proiecţiilor pe Oy este $f(I)$. **Altfel, porţiunea din grafic delimitată de dreptele $x = \alpha$, $x = \beta$ se proiectează pe axa Oy.** Mulţimea ordonatelor acestor puncte este $f(I)$.

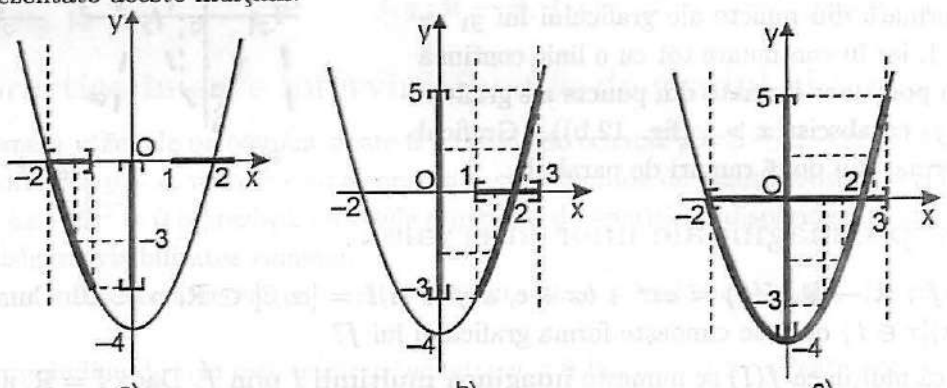
2) $I \subset \left[\frac{-b}{2a}, \infty\right)$. Pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ funcţia este strict crescătoare. Aşadar, din $\alpha \leq x \leq \beta$ se obţine $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ (fig. 13 b)). Prin urmare, $f(I) = [f(\alpha), f(\beta)]$.

3) $-\frac{b}{2a} \in I$. Deci $I = \left[\alpha, -\frac{b}{2a}\right] \cup \left(-\frac{b}{2a}, \beta\right]$ şi $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Avem: $f\left(\left[\alpha, -\frac{b}{2a}\right]\right) = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), f(\alpha)\right]$ şi $f\left(\left[-\frac{b}{2a}, \beta\right]\right) = \left(f\left(-\frac{b}{2a}\right), f(\beta)\right]$. Dacă $f(\alpha) \geq f(\beta)$, atunci $f(I) = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), f(\alpha)\right]$. (fig. 13, c)).

În **concluzie**, pentru a obţine $f(I)$ se delimitează porţiunea din grafic determinată de dreptele $x = \alpha$ şi $x = \beta$, care se proiectează pe axa Oy. Mulţimea ordonatelor acestor puncte este $f(I)$.

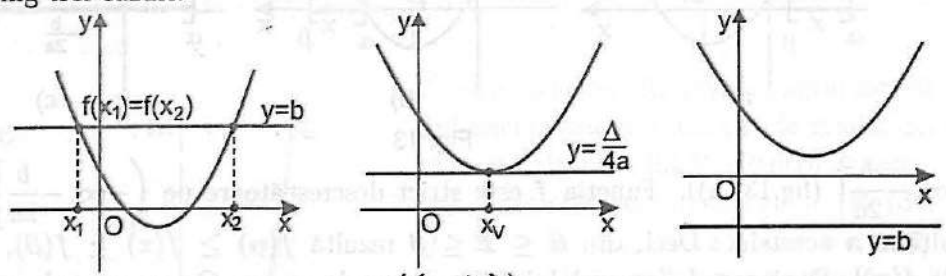
Exemplu. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$. Să se determine $f([-2,-1])$, $f([1,3])$, $f([-2,3])$. În fig. 14 avem reprezentate aceste mulţimi.



$f([-2,-1]) = [-3,0]$ $\quad$ $f([1,3]) = [-3,5]$ $\quad$ $f([-2,3]) = [-4,5]$

Fig. 14

Reamintim că, dacă $f : A \to B$ este o funcţie, iar $B_1 \subseteq B$, atunci mulţimea $f^{-1}(B_1) = \{x \in A | f(x) \in B_1\}$ se numeşte **preimaginea mulţimii** B_1. Revenim la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ şi fie $b \in \mathbb{R}$ (codomeniu). Atunci $f^{-1}(\{b\}) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = b\}$, altfel spus, în preimaginea mulţimii formate numai din elemente b se vor afla toate soluţiile ecuaţiei (în $\mathbb{R}$ – dacă există) $f(x) = b$. În cazul când avem graficul lui f, punctele care au abscisele x, soluţii ale ecuaţiei, se află la intersecţia dreptei $y = b$ cu graficul lui f (fig. 15). Se disting trei cazuri:



$f^{-1}(\{b\}) = \{x_1, x_2\}$ $\quad$ $f^{-1}\left(\left\{-\frac{\Delta}{4a}\right\}\right) = \{x_V\}$ $\quad$ $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$,

$b > -\frac{\Delta}{4a}$ $\quad$ Fig. 15 $\quad$ dacă $b < -\frac{\Delta}{4a}$

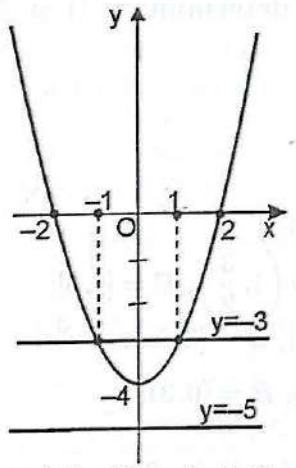
1) dreapta $y = b$ taie graficul (parabola) în două puncte de abscise x_1, x_2. Avem $f^{-1}(\{b\}) = \{x_1, x_2\}$.

2) dreapta $y = b$ este tangentă graficului în vârful V, când $f^{-1}(\{b\}) = \{x_V\}$.

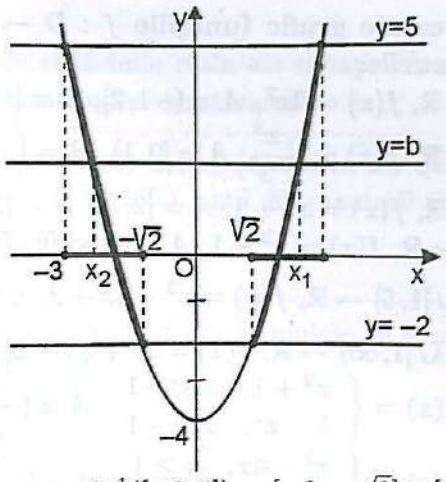
3) dreapta $y = b$ nu taie graficul şi $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$.

Dacă $B = [y_1, y_2] \subseteq \mathbb{R}$ (codomeniu), atunci $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} | y_1 \leq f(x) \leq y_2\}$.

În concluzie, pentru a obţine preimaginea intervalului $[y_1, y_2] \subseteq \mathbb{R}$ (codomeniu) prin f considerăm dreptele orizontale $y = y_1$, $y = y_2$ care delimitează porţiuni din graficul lui f, care se proiectează pe axa Ox. Mulţimea absciselor acestor puncte este mulţimea $f^{-1}([y_1, y_2])$.



$f^{-1}(\{-3\}) = \{-1, 1\}$
$f^{-1}(\{-5\}) = \emptyset$



$f^{-1}([-2,5]) = [-3, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 3]$

Fig. 16

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$. Să se calculeze: $f^{-1}(\{-5\})$, $f^{-1}(\{-3\})$, $f^{-1}([-2,5])$.
Avem: $f^{-1}(\{-5\}) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = -5\} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4 = -5\} = \emptyset$ (fig. 16),
$f^{-1}(\{-3\}) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = -3\} = \{x | x^2 - 4 = -3\} = \{-1, 1\}$.
$f^{-1}([-2,5]) = \{x | -2 \leq f(x) \leq 5\} = [-3, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 3]$.
Pentru ultima mulţime, ducând dreptele $y = b$, $-2 \leq b \leq 5$, ele vor intersecta parabola în două puncte distincte ale căror proiecţii pe Ox sunt puncte de abscise $x_2 \in [-3, -\sqrt{2}]$ şi $x_1 \in [\sqrt{2}, 3]$.

Observaţie. Pentru a obţine intervalele $[-3, -\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}, 3]$ este suficient să proiectăm porţiunile de parabolă, cuprinse între dreptele $y = -2$ şi $y = 5$, pe axa Ox.

Probleme propuse

1. a) Să se determine axa de simetrie pentru graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi să se determine vârful parabolei în cazurile:
1) $f(x) = x^2 + 1$; 2) $f(x) = 2 - x^2$; 3) $f(x) = 3x^2 - 4x$; 4) $f(x) = x^2 - 5x$;
5) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$; 6) $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$.

b) Pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, verificaţi egalitatea alăturată şi trageţi concluzia legată de axa de simetrie a graficului:
1) $f(x) = x^2 - 2x$, $f(1-x) = f(1+x), \forall x \in \mathbb{R}$; 2) $f(x) = -x^2 + 5x$, $f\left(\frac{5}{2} - x\right) = f\left(\frac{5}{2} + x\right), \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Să se determine punctele de intersecţie ale graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu axele de coordonate în cazurile:
1) $f(x) = x^2 - 9$; 2) $f(x) = 2x^2 + 1$; 3) $f(x) = -x^2 + 5$; 4) $f(x) = 3x^2 - 6x$;
5) $f(x) = 2x - 5x^2$; 6) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ 7) $f(x) = x^2 - 6x + 9$; 8) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$;
9) $f(x) = x^2 - 4x + m$, $m \in \mathbb{R}$; 10) $f(x) = x^2 + mx - 1$, $m \in \mathbb{R}$.

3. Să se traseze graficul funcţiei de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi utilizând graficul, să se determine $f(A)$ şi $f^{-1}(B)$ în cazurile:
1) $f(x) = x^2$, $A = (-3, 5)$, $B = [1, 4]$; 2) $f(x) = -x^2$, $A = (-2, 2)$, $B = (-1, 2)$;
3) $f(x) = x^2 + 2$, $A = [0, 3]$, $B = (-1, 6]$; 4) $f(x) = -x^2 - 1$, $A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $B = [0, -1]$;
5) $f(x) = x^2 - 6x$, $A = (-\infty, 2]$, $B = (1, 4)$; 6) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$, $A = [-3, 3])$, $B = (-\infty, -4)$;
7) $f(x) = (x+1)(x-2)$, $A = [-2, 3]$, $B = [4, \infty)$; 8) $f(x) = (1-x)(x+5)$, $A = [-5, 0]$, $B = (-\infty.9]$.

4. Să se reprezinte grafic funcţiile $f : D \to \mathbb{R}$ şi să se determine $f(A)$ şi $f^{-1}(B)$ utilizând graficul, în cazurile:

1) $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$, $A = (-1,2]$, $B = [1,8]$;

2) $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x^2}{3}$, $A = [0,1)$, $B = \left(-1, -\frac{3}{2}\right]$;

3) $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, $A = [2,3)$, $B = [2,10]$;

4) $f : (-\infty,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$, $A = (-\infty,0]$, $B = (-\infty,-2)$;

5) $f : [-3,-1] \cup [1,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $A = (-2,-1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$, $B = [1,3]$;

6) $f : (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 2$, $A = [-3,-2)$, $B = [3,\infty)$;

7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < -1 \\ 1 - x^2, & x \geq -1 \end{cases}$, $A = (-4,-2] \cup [0,3]$, $B = (0,3)$;

8) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \geq 1 \\ x^2 - 16, & x < 1 \end{cases}$, $A = [-1,1] \cup [2,3)$, $B = [-4,-3)$;

9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 2, & x < 2 \\ 4 - x^2, & x \geq 2 \end{cases}$, $A = [1,\infty)$, $B = (-\infty,3]$;

10) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x, & x < -3 \\ x^2 - 5x + 4, & x \geq -3 \end{cases}$, $A = [-5,-2]$, $B = (-4,4)$.

5. Fie familia de funcţii de gradul doi $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1$, $m \neq 0$.

1) Să se arate că vârfurile parabolelor $\mathcal{P}_m$ asociată funcţiilor f_m se află pe dreapta $x + y = 0$.

2) Să se arate că parabolele $\mathcal{P}_m$ trec printr-un punct fix.

3) Să se determine parametrul m astfel încât vârfurile parabolelor $\mathcal{P}_m$ să fie pe rând:

a) sub axa Ox; b) pe dreapta $y = 3$; c) deasupra dreptei $y = -1$; d) pe dreapta $2x + 3y - 5 = 0$;

4) Să se determine porţiunea de pe dreapta $x + y = 0$, care conţine vârfurile parabolelor cu ramurile în jos.

6. Să se determine funcţia de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, dacă (pe rând):

1) graficul este tangent axei Ox în punctul $A(1,0)$ şi taie axa Oy în $B(0,1)$;

2) graficul conţine punctele $A(3,1)$, $B(4,4)$ şi are axa de simetrie $x = 2$;

3) graficul trece prin punctele $A(0,-1)$, $B(3,-1)$ şi este tangent dreptei $y = 2$;

4) graficul conţine punctul $A(4,5)$ şi are vârful $V(2,4)$;

5) graficul este tangent axei Ox şi intersectează dreapta $y - 2x + 12 = 0$ în punctele de abscise $x = -2$, $x = 4$.

7. Să se arate că dacă $f(x) = x^2$, atunci $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$ (Jensen). Interpretare geometrică.

8. Dacă $f(x) = x^2$, $b_1 \geq a_1 \geq a_2 \geq b_2$, $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$, atunci $f(b_1) + f(b_2) \geq f(a_1) + f(a_2)$ (Karamata). Interpretare geometrică.

9. Fie parabolele asociate funcţiilor $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -x^2 - 1$. Să se arate că există o infinitate de paralelograme având câte două vârfuri pe fiecare parabolă. Câte dreptunghiuri există având coordonatele întregi ?

Relaţiile lui Viète

Următoarea propoziţie pune în evidenţă legătura între rădăcinile reale ale ecuaţiei de gradul al doilea $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ şi coeficienţii acesteia. Mai precis are loc următoarea:

Teoremă. Fie $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, cu rădăcini reale x_1, x_2 (distincte sau nu). Atunci au loc **relaţiile lui Viète** (matematician francez 1540-1603, unul din creatorii algebrei):

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Demonstraţie. Dacă rădăcinile sunt reale, adică dacă $\Delta\geq 0$, atunci formulele de rezolvare a ecuaţiei de gradul al doilea sunt $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Avem: $x_1+x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2b}{2a}=-\dfrac{b}{a}$ şi

$$x_1x_2=\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.\ \blacksquare$$

Observaţii. **1)** Aceste formule permit să calculăm suma şi produsul rădăcinilor ecuaţiei de gradul al doilea fără a cunoaşte efectiv rădăcinile.

2) (Calculul mental al soluţiilor) Există ecuaţii de gradul al doilea cu rădăcini reale care pot fi precizate dacă ştim suma şi produsul lor.

Ecuaţia $x^2-6x+5=0$ are suma rădăcinilor 6 şi produsul lor 5. Numerele $x_1=1$, $x_2=5$ verifică aceste condiţii $1+5=6$, $1\cdot 5=5$. Deci rădăcinile ecuaţiei sunt $x_1=1$, $x_2=5$.

3) Ori de câte ori pentru o ecuaţie de gradul al doilea se precizează o relaţie între rădăcinile acesteia, atunci acestei relaţii îi asociem relaţiile lui Viète.

4) Dacă $x+y=z+t$, $x^2+y^2=z^2+t^2$, atunci $x^{2009}+y^{2009}=z^{2009}+t^{2009}$.

Exemplu. 1) Să se determine parametrul real m dacă între rădăcinile ecuaţiei $x^2-(2m+1)x+(m-1)=0$ există relaţia $x_1=2x_2$.

2) Pentru aceeaşi ecuaţie să se arate că există o relaţie independentă de m între rădăcini.

R. 1) Relaţiei date îi ataşăm relaţiile lui Viète şi avem sistemul: $\begin{cases} x_1=2x_2\\ x_1+x_2=2m+1\\ x_1x_2=m-1.\end{cases}$

Din prima şi a doua ecuaţie deducem $x_1=\dfrac{2(2m+1)}{3}$, $x_2=\dfrac{2m+1}{3}$. Cu acestea a treia relaţie conduce la ecuaţia de gradul al doilea în m $\dfrac{2}{9}(2m+1)^2=m-1\Leftrightarrow 8m^2-m+11=0$, care nu are rădăcini reale. Deci nu există m real pentru care $x_1=2x_2$.

2) Între relaţiile lui Viète: $x_1+x_2=2m+1$

$x_1x_2=m-1$

se elimină parametrul m. Din a doua relaţie $m=x_1x_2+1$, care introdusă în prima dă $x_1+x_2=2(x_1x_2+1)+1$ sau echivalent $x_1+x_2=2x_1x_2+3$. Ultima relaţie este relaţia căutată (între rădăcinile ecuaţiei independentă de parametrul m).

Aplicaţii

1. Calculul sumelor puterilor rădăcinilor unei ecuaţii de gradul al doilea

Fie x_1, x_2 rădăcinile reale ale ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$.

Cu ajutorul sumei $s=x_1+x_2$ şi produsului $p=x_1x_2$ se pot calcula sumele simetrice:

$s_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=s^2-2p$,

$s_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = s(s^2 - 3p)$,
$s_4 = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2 = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2$, etc.
În general dacă $s_n = x_1^n + x_2^n$, $n \geq 3$ se poate găsi o **relaţie de recurenţă** pentru sumele s_n.
Într-adevăr dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei, atunci avem egalităţile:
$ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \mid x_1^{n-2}$
$ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \mid x_2^{n-2}$.
Înmulţim prima egalitate cu x_1^{n-2}, iar a doua cu x_2^{n-2} şi le adunăm, membru cu membru, obţinând
$a(x_1^n + x_2^n) + b(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + c(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = 0$, adică

$$as_n + bs_{n-1} + cs_{n-2} = 0,\ n \geq 3$$

Astfel pentru $n = 3$ rezultă $as_3 + bs_2 + cs_1 = 0$, iar de aici $as_3 = -bs_2 - cs_1 = -b(s^2 - 2p) - cs_1$, etc.
Pentru $n = 4$ relaţia de mai sus devine: $as_4 + bs_3 + cs_2 = 0$, iar de aici $as_4 = -bs_3 - cs_2$, etc.

2. Formarea ecuaţiei de gradul al doilea

În continuare ne propunem să găsim ecuaţia de gradul al doilea care are ca rădăcini numerele reale x_1, x_2.
Are loc următoarea:

Teoremă. Dacă două numere reale x_1, x_2 au suma $x_1 + x_2 = s$ şi produsul $x_1x_2 = p$, atunci ele sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - sx + p = 0$. Cele două numere există dacă $s^2 - 4p \geq 0$.

Demonstraţie. Arătăm că fiecare număr verifică ecuaţia $x^2 - sx + p = 0$. Avem: $x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1x_2 = 0$ sau $x_1^2 - x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_2 = 0$,
ceea ce este evident. Analog se procedează cu x_2. ■

Exemplu. Fie ecuaţia $x^2 - 3x + 2 = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2. Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea în y care are ca rădăcini: a) $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$; b) $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$; c) $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}$, $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$.

R. Pentru ecuaţia dată avem relaţiile lui Viète $x_1 + x_2 = 3$, $x_1x_2 = 2$.
Pentru a forma ecuaţia de gradul al doilea în y trebuie să calculăm suma $s = y_1 + y_2$ şi produsul $p = y_1y_2$.
Atunci ecuaţia de gradul al doilea în y este: $y^2 - sy + p = 0$.
a) Avem $s = y_1 + y_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{3}{2}$ şi $p = y_1y_2 = \frac{1}{x_1x_2} = \frac{1}{2}$.
Ecuaţia în y este: $y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0$ sau $2y^2 - 3y + 1 = 0$.

Observaţie. Să remarcăm că rădăcinile ecuaţiei în y se obţin din cele ale ecuaţiei în x prin transformarea $y = \frac{1}{x}$. De aici $x = \frac{1}{y}$, care înlocuit în ecuaţia în x dă ecuaţia în y căutată. Într-adevăr avem:
$\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{y}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 3y + 1 = 0$.
b) Avem: $s = y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9 - 4 = 5$ şi $p = y_1y_2 = (x_1x_2)^2 = 4$. Deci ecuaţia în y este: $y^2 - 5y + 4 = 0$.
c) Avem: $s = y_1 + y_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2} = (x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ şi
$p = y_1y_2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = x_1x_2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{x_1x_2} = x_1x_2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_2} = 2 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 5$.
Deci ecuaţia în y este: $y^2 - \frac{9}{2}y + 5 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 9y + 10 = 0$.

Observaţie. Se constată imediat că ecuaţia are rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ şi se calculează uşor rădăcinile y_1, y_2 în fiecare caz în parte. Am preferat această tehnică de mai sus pentru a forma ecuaţia de gradul al

doilea în y pentru cazul în care rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației în x au exprimări mai complicate. Această tehnică se utilizează și dacă rădăcinile ecuației în x nu sunt reale.

3. Descompunerea trinomului de gradul al doilea în factori liniari

Fie trinomul de gradul al doilea aX^2+bX+c, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ și $b^2-4ac\geq 0$. Deci ecuația de gradul al doilea $ax^2+bx+c=0$, are rădăcinile reale x_1, x_2.
Are loc următoarea:

Teoremă. Trinomul aX^2+bX+c, $a\neq 0$, $b^2-4ac\geq 0$ se descompune în factori liniari după formula $aX^2+bX+c=a(X-x_1)(X-x_2)$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile reale ale ecuației $ax^2+bx+c=0$.

Demonstrație. Are loc scrierea: $aX^2+bX+c=a\left(X+\frac{b}{a}X+\frac{c}{a}\right)=a[X^2-(x_1+x_2)X+x_1x_2]=$
$=a[(X^2-x_1X)-(x_2X-x_1x_2)]=a[X(X-x_1)-x_2(X-x_1)]=a(X-x_1)(X-x_2)$. ■

Exemple. 1) Să se descompună în factori liniari trinomul: $6X^2+X-1$.

R. Rezolvăm în $\mathbb{R}$ ecuația (atașată trinomului) $6x^2+x-1=0$ și găsim soluțiile $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{3}$. Deci $6X^2+X-1=6\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{1}{3}\right)$ sau $6X^2+X-1=(2X+1)(3X-1)$.

2) Să se simplifice fracția: $\dfrac{6X^2+X-1}{6X^2+5X+1}$.

R. Se descompune în factori liniari atât numărătorul cât și numitorul fracției. Am văzut la exemplul 1) că $6X^2+X-1=(2X+1)(3X-1)$. Ecuația $6x^2+5x+1=0$ are soluțiile $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$.
Deci $6X^2+5X+1=6\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X+\frac{1}{3}\right)$ sau $6X^2+5X+1=(2X+1)(3X+1)$.
Acum fracția se scrie $\dfrac{(2X+1)(3X-1)}{(2X+1)(3X+1)}=\dfrac{3X-1}{3X+1}$.

Probleme propuse

1. Să se scrie relațiile lui Viète pentru ecuațiile:
1) $x^2-1=0$; 2) $x^2+2x=0$; 3) $-x^2+4=0$; 4) $-2x^2+3x=0$; 5) $x^2-3x-4=0$;
6) $-6x^2-x+1=0$; 7) $mx^2+(m-1)x+2=0$, $m\neq 0$; 8) $(1-m)x^2-mx-1=0$, $m\neq 1$.

2. Să se determine parametrul real m dacă fiecare ecuație are indicat în dreptul ei o soluție.
1) $(m+1)x^2-2mx+3=0$, $x=3$; 2) $(m^2-m)x+2mx-2=0$, $x=1$;
3) $(m^2+1)x-(1-2m)x-1=0$, $x=-1$; 4) $(m+1)x^2-mx+2m-5=0$, $x=2$.

3. Fie $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-6x+a=0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+bx+c=0\}$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Să se determine a, b, c dacă $A\cup B=\{1,2,4,5\}$.

4. Să se determine parametrul real m, dacă pentru fiecare ecuație avem indicată o relație între rădăcini.
1) $x^2-x+m+1=0$;
a) $3x_1=x_2$; b) $2x_1+3x_2=1$; c) $x_1x_2+x_1+x_2=5$; d) $x_1^2+x_2^2=3$;
e) $x_1^3+x_2^3>1$; f) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=1$;
2) $x^2-(m-1)x-m=0$;
a) $x_1=x_2$; b) $x_1-2x_2=3$; c) $x_1x_2-2(x_1+x_2)=-m^2$; d) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}<3$;

e) $x_1^2+x_2^2>5$; f) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>2$;

3) $mx^2-(m-1)x+1-2m=0$;

a) $x_1x_2=3(x_1+x_2)$; b) $x_1^2+x_2^2=\frac{21}{4}$; c) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$; d) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>0$.

5. Pentru fiecare dintre ecuaţiile de mai jos arătaţi că există o relaţie independentă între rădăcini.

1) $x^2-2mx+m-1=0$; 2) $mx^2+3x-1-m=0$; 3) $(m+1)x^2+mx+3m-1=0$, $m\neq -1$;

4) $(1-m)x^2-(2m+1)x+m+2=0$, $m\neq 1$.

6. Se consideră ecuaţia $7x^2-x-3=0$. Utilizând relaţiile lui Viète să se determine valorile expresiilor:

1) $x_1^2+x_2^2$; 2) $x_1^3+x_2^3$; 3) $x_1^4+x_2^4$; 4) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; 5) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$;

6) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; 7) $\frac{x_1+3}{x_2+3}+\frac{x_2+3}{x_1+3}$; 8) $\frac{7x_1^2-3x_1+2}{7x_2^2-3x_2+2}+\frac{7x_2^2-3x_2+2}{7x_1^2-3x_1+2}$.

7. Fie ecuaţia $2x^2-2(m+1)x+m^2-3=0$, $m\in\mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2. Să se arate că:

1) $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=4$; 2) $x_1,x_2\in[-1,3]$.

8. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care suma pătratelor rădăcinilor ecuaţiei $x^2+(1-m)x+2m=0$ este minimă. Să se determine acest minim.

9. Fie $f_m(x)=(1-m)x^2+(m-4)x+2m+3$, $m\neq 1$.

1) Să se arate că $\forall m\neq 1$, f_m are două zerouri distincte. 2) Să se afle m, dacă $x_1<-2<x_2$.

10. Să se formeze ecuaţia de gradul doi care are rădăcinile:

1) $x_1=-1$, $x_2=3$; 2) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{3}$; 3) $x_1=1+\sqrt{2}$, $x_2=1-\sqrt{2}$; 4) $x_1=1$, $x_2=\sqrt{3}$;

5) $x_1=x_2=-1$; 6) $x_1=x_2=2$; 7) $x_1=m$, $x_2=-1+m$; 8) $x_1=m+1$, $x_2=2m$;

11. Fie ecuaţia $x^2-x+m+1=0$, $m\in\mathbb{R}$. Să se formeze ecuaţia de gradul doi în y care are rădăcinile:

1) $y_1=2x_1$, $y_2=2x_2$; 2) $y_1=x_1+1$, $y_2=x_2+1$; 3) $y_1=x_1+2x_2$, $y_2=x_2+2x_1$;

4) $y_1=x_1^2$, $y_2=x_2^2$; 5) $y_1=\frac{x_1}{x_2}$, $y_2=\frac{x_2}{x_1}$; 6) $y_1=x_1+x_2^2$, $y_2=x_2+x_1^2$;

7) $y_1=x_1+\frac{1}{x_2}$, $y_2=x_2+\frac{1}{x_1}$; 8) $y_1=x_1^2-x_1$, $y_2=x_2^2-x_2$.

12. a) Să se descompună în factori liniari expresiile:

1) X^2-3; 2) X^2-5X; 3) X^2-7X+6; 4) $12X^2-X-1$; 5) $2X^2-3X+1$; 6) $3X^2-8X+5$.

b) Să se simplifice expresiile:

1) $\frac{X^2-9}{X^2-6X+9}$; 2) $\frac{X^2-3X+2}{X^2-4}$; 3) $\frac{4X^2-1}{2X^2+X-1}$; 4) $\frac{4X^2-4X-3}{4X^2-2X-2}$.

Semnul funcţiei de gradul al doilea

Fie funcţia de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ şi ecuaţia ataşată ei $ax^2+bx+c=0$. Am văzut că semnul lui a ne preciza monotonia funcţiei pe anumite intervale. Vom vedea în continuare că semnul lui $\Delta=b^2-4ac$ coroborat cu semnul lui a precizează semnul funcţiei f. Reamintim că a determina semnul lui f înseamnă să aflăm valorile lui x pentru care $f(x)>0$ precum şi valorile lui x pentru care $f(x)<0$. Punctul $M(x,f(x))$ pentru care $f(x)>0$ este situat în semiplanul superior delimitat de Ox (deasupra axei Ox), iar dacă $f(x)<0$ punctul este situat în semiplanul inferior delimitat de Ox (sub axa Ox). Dacă $f(x)\geq 0$, atunci punctul se află în semiplanul superior, închis delimitat de Ox (adică punctul se poate afla deasupra axei Ox sau pe axa Ox).

Are loc următoarea:

Teoremă. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

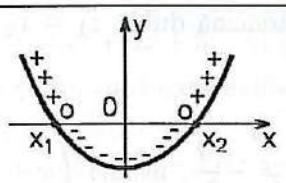
1) Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuaţia ataşată lui f are două rădăcini reale distincte $x_1 < x_2$, iar semnul lui f este cel al lui a în afara rădăcinilor şi semn contrar lui a între rădăcini:

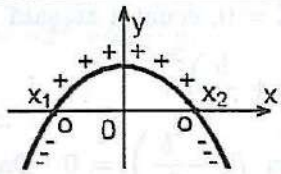
x	$-\infty$		x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Tabelul de semn pentru f

a>0					a<0				
x	-∞	x_1	x_2	+∞	x	-∞	x_1	x_2	+∞
f(x)	+	0	-	0 +	f(x)	-	0	+	0 -

Interpretarea geometrică





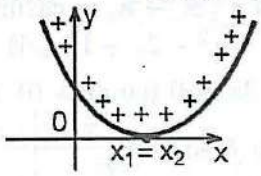
2) Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuaţia ataşată lui f are două rădăcini reale egale $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$, iar semnul funcţiei f este cel al lui a pe $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$

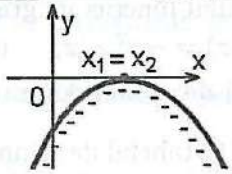
x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a	0		semnul lui a	

Tabelul de semn pentru f

a>0				a<0			
x	-∞	$-\frac{b}{2a}$	+∞	x	-∞	$-\frac{b}{2a}$	+∞
f(x)	+	0	+	f(x)	-	0	-

Interpretarea geometrică





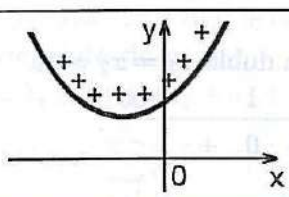
3) Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuaţia ataşată lui f nu are rădăcini reale, iar semnul funcţiei f este semnul lui a pe $\mathbb{R}$.

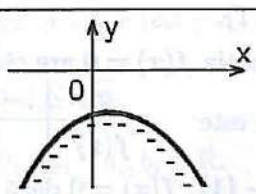
x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a		

Tabelul de semn pentru f

a>0				a<0			
x	-∞		+∞	x	-∞		+∞
f(x)	+	+	+	f(x)	-	-	

Interpretarea geometrică





Demonstraţie. Vom demonstra teorema pentru $a > 0$. Cazul $a < 0$ se tratează analog.

1) Am văzut că dacă trinomul de gradul al doilea aX^2+bX+c, $a \neq 0$ are rădăcinile diferite x_1, x_2, atunci se poate scrie $aX^2+bX+c = a(X-x_1)(X-x_2)$.

Din $\Delta > 0$ rezultă că ecuaţia ataşată are două rădăcini reale diferite x_1, x_2. Deci funcţia f se poate scrie $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$. Presupunem că $x_1 < x_2$. Dacă $x \in (-\infty, x_1)$, atunci $x - x_1 < 0$ şi $x - x_2 < 0$. Ţinând seamă de regula semnelor la înmulţire rezultă $f(x) > 0$. Dacă $x \in (x_2, \infty)$, atunci $x - x_1 > 0, x - x_2 > 0$ şi $f(x) > 0$. Am arătat astfel că dacă x este în afara rădăcinilor, adică dacă $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$, atunci $f(x) > 0$, adică f are acelaşi semn cu $a(> 0)$. Dacă $x \in (x_1, x_2)$, atunci $x - x_1 > 0$, iar $x - x_2 < 0$. Prin urmare $f(x) < 0$, adică între zerourile x_1, x_2 (ale funcţţiei f), funcţia f ia valori de semn contrar lui $a(> 0)$.

2) În acest caz dacă $\Delta = 0$, ecuaţia ataşată are rădăcină dublă $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ şi funcţia f se exprimă sub forma $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

Dacă $x = -\dfrac{b}{2a}$, atunci $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = 0$. Dacă $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, atunci $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 > 0$ şi cum $a > 0$ avem $f(x) > 0$. Prin urmare semnul lui f este acelaşi cu semnul lui a pe $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.

3) Dacă $\Delta < 0$, atunci scriem funcţia f sub forma canonică şi avem:

$f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce-i uşor de văzut. ■

Observaţie . În cazul rădăcinilor distincte remarcăm că: **semnele funcţiei alternează de o parte şi de alta a unei rădăcini.** De asemenea, observăm că: **semnul unei funcţii nu se schimbă pe un interval.** Deci este suficient să determinăm semnul pe un interval şi apoi să alternăm semnele pe celelalte intervale. Pentru a găsi semnul lui f pe un interval se alege o valoare x_0 din acest interval şi se calculează $f(x_0)$. Semnul lui $f(x_0)$ va fi pe tot intervalul.

Exemplu. Să se studieze semnul funcţiei de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x) = x^2 - 3x$; b) $f(x) = -x^2 + x$; c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; d) $f(x) = -x^2 - x - 1$.

R. a) Ecuaţia ataşată funcţiei de gradul doi este $x^2 - 3x = 0$ (cu $\Delta > 0$) şi are rădăcinile reale diferite $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Cum $a = 1 > 0$, tabelul de semn pentru f este:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Deci: $f(x) > 0$ dacă $x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$;
$f(x) < 0$ dacă $x \in (0, 3)$; $f(x) = 0$ dacă $x \in \{0, 3\}$.

b) Ecuaţia $f(x) = 0$ $(\Delta > 0)$ are rădăcinile reale distincte $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Tabelul de semn al funcţiei este:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$(a = -1 < 0)$.

Deci: $f(x) > 0$ dacă $x \in (0, 1)$; $f(x) < 0$ dacă $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$;
$f(x) = 0$ dacă $x \in \{0, 1\}$.

c) În acest caz $\Delta = 0$ şi ecuaţia $f(x) = 0$ are rădăcina dublă $x_1 = x_2 = 1$.

Tabelul de semn al funcţiei este:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Deci $f(x) > 0$ dacă $x \in \mathbb{R} - \{1\}$; $f(x) = 0$ dacă $x = 1$.

d) Aici $\Delta < 0$ şi ecuaţia $f(x) = 0$ nu are rădăcini reale. Cum $a = -1 < 0$ tabelul de semn al funcţiei este

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-\ -\ -$	

$(a = -1 < 0)$. Deci $f(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

În cazul rădăcinii duble $x_1 = x_2$, în rădăcina dublă se „cumulează" un semn. Deci pe celelalte intervale $(-\infty, x_1)$, (x_1, ∞) funcţia are acelaşi semn. Pentru stabilirea semnului pe interval se procedează ca mai sus. Dacă ecuaţia $f(x) = 0$ nu au rădăcini reale, atunci semnul lui f este acelaşi pe tot intervalul $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Probleme propuse

1. **Să se determine semnul funcţiei de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în cazurile:**
1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = -x^2$; 3) $f(x) = x^2 + 5x$; 4) $f(x) = -2x^2 + 3x$; 5) $f(x) = x^2 - 6x + 9$;
6) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$; 7) $f(x) = x^2 + 3x + 5$; 8) $f(x) = -x^2 + 2x - 4$.

2. **Să se determine zerourile şi semnul expresiilor:**
1) $E_1(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$; 2) $E_2(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$;
3) $E_3(x) = (1-x)(x^2 - 4x)$; 4) $E_4(x) = (2-x)(x^2 - 9)$.

3. **Să se determine zerourile numărătorului şi numitorului fracţiei şi apoi să se stabilească semnul ei, în cazurile:**
1) $F_1(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$, $x \neq 2$; 2) $F_2(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{9 - x^2}$, $x \neq \pm 3$;
3) $F_1(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x - 5}$, $x \neq -1$, $x \neq 5$; 4) $F_1(x) = \dfrac{-x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 4}$, $x \neq 1$, $x \neq 4$.

4. **Pentru funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ să se determine semnul dacă:**
1) $f(x) = x^2 - 3$, $A = [-2, 2]$; 2) $f(x) = x^2 - 5x$, $A = (-1, 6)$; 3) $f(x) = 15x^2 + 2x - 1$, $A = [-1, 1]$.

5. **Să se determine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în cazurile:**
1) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$; 2) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 3x)$; 3) $f(x) = \operatorname{sgn}(-x^2 + 5x)$; 4) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4x - 5)$.

6. a) **Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 4$. Să se determine m astfel încât f să ia valori nenegative pentru orice $x \in \mathbb{R}$.**
b) **Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + (m-1)x + m - 1$. Să se determine m astfel încât f să ia valori nenegative pentru orice $x \in \mathbb{R}$.**

7. **Să se arate că $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$ avem $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} - 3\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) + 5 > 0$.**

8. **Să se determine $\min E(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, unde $E(x, y) = x^2 + 6y^2 - 2xy + 6x - 16y + 18$.**

9. **Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât (pe rând):**
1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + m + 3 > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$; 2) $x^2 + y^2 - mx + y - m + 1 > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

10. **Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-a)(x-c) + (x-b)(x-d)$, $a < b < c < d$.**
1) **Să se arate că $f(a)f(c) < 0$.** 2) **Să se deducă inegalitatea $(a+b+c+d)^2 > 8(ac + bd)$.**

11. **Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (ax - a_1)^2 + (ax - a_2)^2 + \ldots + (ax - a_n)^2)$, $a \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$.**
1) **Să se arate că $f_{\min}$ nu depinde de a.**
2) **Dacă $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1$, atunci $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq \sqrt{n}$.**

12. **Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2$, $a_i \neq 0$, $\forall i$, $\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$.**
1) **Să se arate că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.** 2) **Să se determine $f_{\min}$.**

3) Să se deducă inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$, cu egalitate în inegalitate dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ (dacă $b_i = 0$, atunci $a_i = 0$).

Aplicaţii. 1) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ şi arătaţi că ecuaţia $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$ are rădăcinile distincte dacă $a < b < c$.

2) (Aczél) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a_1x-b_1)^2-(a_2x-b_2)^2-\ldots-(a_nx-b_n)^2$, unde $a_1^2 > a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$.

a) Să se arate că ecuaţia $f(x) = 0$ are rădăcini reale;

b) Să se deducă inegalitatea lui Aczél: $(a_1b_1-a_2b_2-\ldots-a_nb_n)^2 \geq (a_1^2-a_2^2-\ldots-a_n^2)(b_1^2-b_2^2-\ldots-b_n^2)$, cu egalitate în inegalitate dacă $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n}{a_n}$.

13. Utilizând funcţia $f(x) = x^2+bx+ac$, din $(a+b+c)c < 0$, deduceţi că $b^2 > 4ac$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

14. Utilizând semnul funcţiei $f(a) = a^2+(b-3)a+b^2-3b+3$, $a, b \in \mathbb{R}$, deduceţi că $a^2+ab+b^2 \geq 3(a+b-1)$. Analog arătaţi că $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+x+y+z+\frac{3}{8} \geq 0$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

15*. Dacă $f(x) = ax^2+bx+c$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f(x) \geq 0$, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci $\frac{a+b+c}{b-a} \geq 3$.

Inecuaţii de forma: $ax^2+bx+c \geq (>, \leq, <)0$, $a \neq 0$. Sisteme de inecuaţii

Strâns legată de semnul funcţiei de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$, este rezolvarea inecuaţiilor de gradul doi de necunoscută x, de forma $ax^2+bx+c \geq (>, \leq, <)\ 0$, $a \neq 0$), (1).

A rezolva inecuaţia înseamnă a determina toate valorile lui $\alpha \in \mathbb{R}$ care verifică (1) (deci a-i determina toate soluţiile). Aceasta revine la a determina semnul funcţiei $f(x) = ax^2+bx+c$.

Un sistem de inecuaţii de gradul doi are cel puţin o inecuaţie de gradul doi, iar celelalte inecuaţii pot fi de gradul întâi. O soluţie a sistemului este un număr real α care verifică fiecare inecuaţie a sistemului. Deci mulţimea soluţiilor unui sistem de inecuaţii se obţine intersectând mulţimile de soluţii ale inecuaţiilor care formează sistemul.

Geometric, soluţiile inecuaţiei $f(x) > 0$ (< 0) sunt abscisele punctelor de pe parabolă situate **deasupra (sub)** axei Ox.

Practic, **proiecţia ortogonală a porţiunii de grafic situat deasupra (sub) axei Ox, pe Ox ne dă mulţimea de soluţii a inecuaţiei $f(x) > 0$ (< 0).**

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $x^2-x \geq 0$; b) $-3x^2+6x < 0$; c) $x^2-9 < 0$; d) $x^2+4x+9 \geq 0$.

R. a) Se consideră funcţia de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2-x$, care are tabelul de semn

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x) = x^2-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

. Deci $f(x) \geq 0$ dacă $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Aşadar mulţimea S de soluţii ale inecuaţiei este $S = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2+6x$. Tabelul de semn al funcţiei este

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x) = -3x^2+6x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

.

Aşadar, din tabel, $f(x) < 0$ dacă $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.
Mulţimea S de soluţii a inecuaţiei este $S = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

c) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 9$ are tabelul de semn

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f(x) = x^2 - 9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

De aici $f(x) < 0$ dacă $x \in (-3, 3)$. Mulţimea S de soluţii a inecuaţiei este $S = (-3, 3)$.

d) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 9$ având tabelul de semn

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+ + + + +$	

. Deci $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. În acest caz $S = \mathbb{R}$.

2. **Să se rezolve inecuaţiile:**

a) $x^2 - 3x < 5x + 3$; b) $-x^2 + 1 \geq 3x^2 - x$; c) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \leq 1$.

R. Aceste inecuaţii se pot aduce prin transformări, treceri de termeni dintr-un membru în altul cu schimbare de semn, înmulţirea ambilor membri ai unei inecuaţii cu un număr pozitiv etc., la inecuaţii echivalente.

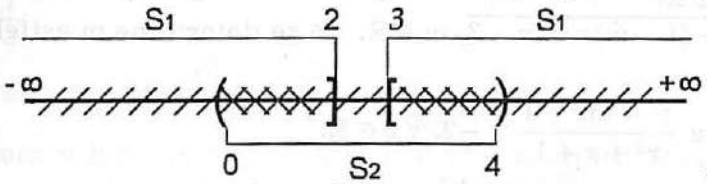
a) $x^2 - 3x < 5x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 5x - 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 3 < 0$.
Mulţimea de soluţii a ultimei inecuaţii este $S = (4 - \sqrt{19}, 4 + \sqrt{19})$.

b) Inecuaţia se scrie succesiv: $-x^2 + 1 \geq 3x^2 - x \Leftrightarrow 0 \geq x^2 - 1 + 3x^2 - x \Leftrightarrow 0 \geq 4x^2 - x - 1$. Mulţimea de soluţii a acestei inecuaţii este $S = \left[\frac{1 - \sqrt{17}}{8}, \frac{1 + \sqrt{17}}{8}\right]$.

c) Se înmulţesc ambii membri ai inecuaţiei cu c.m.m.m.c. $(2, 3) = 6$ şi inecuaţia se scrie echivalent: $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \leq 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x \leq 6 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 6 \leq 0$, cu mulţimea de soluţii $S = \left[\frac{1 - \sqrt{19}}{3}, \frac{1 + \sqrt{19}}{3}\right]$.

3. **Să se rezolve sistemul de inecuaţii:** $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0, & (1) \\ x^2 - 4x < 0, & (2). \end{cases}$

R. A rezolva sistemul de inecuaţii revine la a determina mulţimea S de numere reale x care sunt simultan soluţii ale inecuaţiei (1) şi inecuaţiei (2).
Mulţimea de soluţii a inecuaţiei (1) este $S_1 = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$, iar a inecuaţiei (2) este mulţimea $S_2 = (0, 4)$. Deci $S = S_1 \cap S_2 = (0, 2] \cup [3, 4)$.
Reprezentând pe axa reală mulţimile de soluţii S_1 şi S_2, mulţimea S de soluţii este porţiunea din axă dublu haşurată (corespunde intersecţiei lui S_1 şi S_2, adică părţii comune a celor două mulţimi).



4. a) **Fie** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. **Următoarele perechi de afirmaţii sunt echivalente:**

1°) (p : „$f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$“; q : „$\Delta < 0$ şi $a > 0$“);
2°) (p : „$f(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$”; q : „$\Delta < 0$ şi $a < 0$“).

b) Să se determine parametrul real $m \neq 1$ pentru care pe rând:

1) $(m - 1)x^2 + (m + 1)x - m + 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
2) $(m - 1)x^2 + (m - 2)x + m - 3 < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

R. a) Vom demonstra 1°). Arătăm că $p \Rightarrow q$. Dacă p este adevărat, atunci $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce arăta că ecuaţia $f(x) = 0$ nu are rădăcini reale, adică $\Delta < 0$. Cum $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, înseamnă că semnul lui a este de asemenea pozitiv, adică $a > 0$.
Reciproc, probăm că $q \Rightarrow p$. Dacă q este adevărată, adică din $\Delta < 0$ se deduce că ecuaţia $f(x) = 0$ n-are soluţii şi atunci semnul lui f este dat de semnul lui a (vezi partea teoretică). Cum $a > 0$ deducem

$f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Observaţie. Dacă $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, atunci se impun condiţiile $\Delta \leq 0$ şi $a > 0$ (şi reciproc). Analog pentru $f(x) \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) 1) Conform cu 1°) de la a) se impun condiţiile: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ 5m^2 - 10m + 9 < 0 \end{cases}$

Soluţia sistemului de inecuaţii este $m \in \emptyset$.

2) Conform cu 2°) de la a) se impun condiţiile $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ -(3m^2 - 14m + 11) < 0 \end{cases}$

Soluţia sistemului este $S = (-\infty, 1)$. Deci $\forall m < 1, f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Probleme propuse

1. Să se rezolve inecuaţiile:

1) $x^2+1 < 0$; 2) $3x^2-9 \leq 0$; 3) $-x^2+4 > 0$; 4) $(x+1)^2 > 0$; 5) $(x-1)^2 \leq 0$; 6) $x^2-3x+3 < 0$;
7) $3x^2-x+1 > 0$; 8) $-4x^2+x-3 < 0$; 9) $x^2-6x+9 \leq 0$; 10) $-x^2+6x-9 > 0$; 11) $x^2-1 < 2x+1$;
12) $-3x^2+2 \geq -5x+6$; 13) $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{4} \leq 2x + \frac{1}{6}$; 14) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{3(x+2)}{4} > \frac{x}{3}$; 15) $\frac{x^2+3}{5} - \frac{2x}{3} < \frac{1}{15}$.

2. Să se determine domeniul maxim de definiţie al funcţiei f în cazurile:

1) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$; 2) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; 3) $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$;
4) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$; 5) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-9}}$; 6) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x}{x+3}}$.

3. Să se precizeze x pentru care:

a) $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2-x}\sqrt{2+x}$; b) $\sqrt{(x-1)(x-2)} = \sqrt{x-1}\sqrt{x-2}$.

4. Să se expliciteze $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde:

1) $f(x) = \min(x^2-3x, -2)$; 2) $f(x) = \max(1-x^2, -3)$;
3) $f(x) = \min(x^2-2x, 5x-6)$; 4) $f(x) = \max(2x^2-3x, x^2+4x-12)$.

5. Să se arate că $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - mx + 1 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid mx^2 + 2x + m = 0\} = \emptyset$.

6. a) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - mx + m + 2}{x^2 + mx + 1}$, $m \in \mathbb{R}$. **Să se determine** m **astfel încât** f **să fie definită şi în plus** $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + (1-m)x + m - 3}$, $m \in \mathbb{R}$. **Să se determine** m **astfel încât** f **să fie corect definită.**

7. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ **pentru care** $\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} > -2,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

8. Să se determine $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists a \neq -1,\ x = \frac{a^2 + a + 1}{a+1} \right\}$.

9. Să se arate că 1) $\min_{x \in \mathbb{R}} (2x^2 + 4x + 7, x^2 + 2x + 6) \geq 5$; **2)** $\min_{x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]} \left(1 - x^2, \frac{1+x}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$.

10. a) Să se rezolve sistemele de inecuaţii:

1) $\begin{cases} x^2 < 9 \\ x^2 > 4 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 5 < 0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x(x-1) < 0 \\ 6x^2 - 7x + 2 < 0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} (x+2)(x-2) > 0 \\ x^2 + 2x - 3 > 0 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ 3x^2 - 7x + 2 \leq 0 \\ x^2 - 2x + 5 > 0 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x(x+1) \leq 0 \\ \frac{x+2}{x+3} > 0 \end{cases}$; 7) $\begin{cases} x(x-1)(x-2) > 0 \\ \frac{x(x+3)}{x^2 - 3x + 2} < 0 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} \leq 0 \\ \frac{x^2 - 3x}{x^2 + x - 2} > 0 \end{cases}$

b) Să se rezolve dublele inecuaţii:

1) $-4 \le x^2 - 8 \le 1$; 2) $-2 \le x^2 - 6x + 8 \le 1$; 3) $-1 < \dfrac{x+1}{x^2-4x+3} < 2$; 4) $-2 \le \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \le 2$.

c) Să se rezolve inecuaţiile:

1) $x^2 + \dfrac{2}{x^2-2} > 5$; 2) $x + \dfrac{12}{2+x-x^2} < x^2 + 2$.

11. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m-1)x^2 - mx$, $m \neq 1$. Să se determine m astfel încât, pe rând:

1) f este strict descrescătoare pe $(-\infty, -1]$; 2) f este strict crescătoare pe $(-\infty, -1]$;

3) f este strict crescătoare pe $[2, \infty)$; 4) f este strict descrescătoare pe $[2, \infty)$;

5) f este strict crescătoare pe $[1, 2]$; 6) f este strict descrescătoare pe $[1, 2]$.

12. a) Să se determine $m \neq 1$, pentru care $(m-1)x^2 + (m+1)x - 3 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine $m \neq 1$, pentru care $(m+1)x^2 + mx - m + 2 \le 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

13. Să se determine $m \neq 0$, pentru care $f(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 2$ să nu fie monotonă pe $[1, 2]$.

14. Fie familia de funcţii de gradul doi $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1$, $m \neq 0$. Să se determine parametrul rel m astfel încât, pe rând, f să aibă o valoare:

1) minimă negativă; 2) minimă pozitivă; 3) maximă negativă; 4) maximă pozitivă.

15. Să se rezolve ecuaţiile :

1) $[x^2 - 2x] = -2$; 2) $[x^2 - 4x + 5] = 2$, unde $[a]$ este parte întreagă.

16. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Să se determine $f \circ g$, $g \circ f$, în cazurile:

1) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \ge -1 \\ x^2, & x < -1 \end{cases}$, $g(x) = x^2 + x$; 2) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & x < 0 \\ x^2 - 2x, & x \ge 0 \end{cases}$, $g(x) = -x^2 + 1$;

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x \ge 2 \\ -x^2 + 3x, & x < 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < -1 \\ x^2 - 5, & x \ge -1 \end{cases}$;

4) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \ge 1 \\ -x + 3x^2, & x < 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x > 2 \\ -x^2 + 3, & x \ge 2 \end{cases}$.

17*. a) Să se arate că dacă $\dfrac{a^2}{a+b} \ge \alpha a + \beta b$, $\forall a, b > 0$, cu egalitate dacă $a = b$, atunci $\alpha = \dfrac{3}{4}$, $\beta = -\dfrac{1}{4}$.

b) Să se arate că $\dfrac{x^2}{x+y} + \dfrac{y^2}{y+z} + \dfrac{z^2}{z+x} \ge \dfrac{1}{2}(x+y+z)$, $\forall x, y, z > 0$.

18. Dacă $n, k, r \in \mathbb{N}$, $0 \le r < n$, $f(x) = x^2 - x$, atunci $f(nk + r) \ge rf(k+1) + (n-r)f(k)$.

Determinarea semnului expresiei $E(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.

Mulţimea valorilor expresiei $E(x)$

Pentru a determina semnului expresiei $E(x)$ se studiază cu ajutorul tabelului de semn, semnul numărătorului, semnul numitorului şi semnul câtului ($E(x)$). Pentru a determina mulţimea valorilor lui $E(x)$ când $x \in \mathbb{R} - \{x \mid a'x^2 + b'x + c' = 0\} = D$, notăm $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, (1). Pe mulţimea D se poate elimina numitorul din (1) şi relaţia se scrie echivalent: $(a'y - a)x^2 + (b'y - b)x + c'y - c = 0$, care poate fi gândită ca o ecuaţie de gradul doi în x cu soluţii reale. Se impune deci condiţia $\Delta_x \ge 0$. Aceasta este o inecuaţie de gradul doi în y, care rezolvată dă mulţimea pe care o parcurge $y = E(x)$.

Probleme rezolvate

1. Să se studieze semnul expresiei $E(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+4}$ şi apoi precizaţi mulţimea de valori pentru $E(x)$.

R. Avem tabelul cu semnele numărătorului, numitorului şi câtului ($E(x)$):

x	$-\infty$		-3		1		3		4		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x^2-5x+4		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$E(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Prin urmare: $E(x)>0$ dacă $x\in(-\infty,-3)\cup(1,3)\cup(4,\infty)$; $E(x)<0$ dacă $x\in(-3,1)\cup(3,4)$ şi $E(x)=0$ dacă $x\in\{-3,3\}$; $E(x)$ nu are sens dacă $x\in\{1,4\}$.

Pentru a găsi valorile lui $E(x)$ când $x\in\mathbb{R}-\{1,4\}$ notăm $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+4}$. De aici rezultă ecuaţia de gradul doi în x: $(y-1)x^2-5yx+4y+9=0$. Cum x este număr real, condiţia ca ecuaţia de gradul doi în x să aibă soluţii reale este $\Delta_x\geq 0\Leftrightarrow 9y^2-20y+36\geq 0$. Cum $\Delta_y<0$, deducem că inecuaţia în y este adevărată $\forall y\in\mathbb{R}$. Deci când $x\in\mathbb{R}-\{1,4\}$, $E(x)$ descrie mulţimea $\mathbb{R}$.

2. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\dfrac{x-x^2}{(x-2)(x+3)}\geq 0$; b) $\dfrac{x^2}{x^2-1}\geq 2$; c) $\dfrac{x}{x+1}-1\leq\dfrac{x}{x-1}$.

R. a) Domeniul de definiţie a inecuaţiei este $D=\mathbb{R}-\{2,-3\}$. Pentru rezolvarea acestei inecuaţii este suficient să studiem semnul expresiei $E(x)=\dfrac{x-x^2}{(x-2)(x+3)}$ cu ajutorul tabelului de semn de mai jos:

x	$-\infty$		-3		0		1		2		$+\infty$
$x-x^2$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$(x-2)(x+3)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$E(x)$		$-$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$-$	

De aici $E(x)\geq 0$ dacă $x\in(-3,0]\cup[1,2)$.

b) Domeniul de definiţie pentru inecuaţie este $D=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$. Inecuaţia se scrie echivalent astfel:

$$\frac{x^2}{x^2-1}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^2-1}-2\geq 0\Leftrightarrow\frac{x^2-2(x^2-1)}{x^2-1}\geq 0\Leftrightarrow\frac{-x^2+2}{x^2-1}\geq 0.$$

Pentru rezolvarea ultimei inecuaţii utilizăm tabelul de semn

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2+2$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
x^2-1		$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\dfrac{-x^2+2}{x^2-1}$		$-$	0	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	0	$-$	

Din tabel găsim că $S=[-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2}]$.

Observaţie. Atragem, din nou, atenţia că nu se elimină numitorul deoarece aceasta ar însemna înmulţirea ambilor membri ai inecuaţiei cu x^2-1 care poate fi pozitiv sau negativ. Însă $\dfrac{x}{x^2+1}\geq 3\Leftrightarrow x\geq 3(x^2+1)$ deoarece am înmulţit ambii membri cu un număr pozitiv, $x^2+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$!

c) Domeniul de definiţie a inecuaţiei este $D=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$. Se grupează toţi termenii în acelaşi membru şi apoi se aduc termenii la acelaşi numitor. Avem inecuaţiile echivalente pe D:

$$\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x-1}-1\leq 0\Leftrightarrow\frac{x(x-1)-x(x+1)-(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}\leq 0\Leftrightarrow\frac{-x^2-2x+1}{(x-1)(x+1)}\leq 0.$$

Cu ajutorul tabelului de semn găsim mulţimea de soluţii $S=(-\infty,-1,-\sqrt{2}]\cup(-1,-1+\sqrt{2}]\cup(1,\infty)$.

Probleme propuse

1. **Determinaţi domeniul maxim de definiţie pentru funcţiile:**

1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{4-x^2}}$; 2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x}{x^2-3x+2}}$; 3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-3)}}$.

2. **Să se determine semnul expresiei $E(x)$ precum şi mulţimea valorilor lui $E(x)$, în cazurile:**

1) $E(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$; 2) $E(x)=\dfrac{-x^2+4}{x^2-1}$; 3) $E(x)=\dfrac{4-x^2}{2x^2-5x+3}$;

4) $E(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2+x+1}$; 5) $E(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2-16}$; 6) $E(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$.

3. **Să se determine cel mai mic întreg n pentru care** $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x+3}\le n$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

4. **Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât** $-1\le\dfrac{x^2+mx+1}{x^2-x+1}\le 1$.

5. **Se consideră** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+mx+1}{x^2-x+1}$, $m\in\mathbb{R}$. **Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât** $\mathrm{Im}f\subseteq[-3.2]$.

6. **Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-mx+1}{(m+1)x^2-x+1-m}$ **este corect definită şi** $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

7. a) **Să se rezolve ecuaţiile:** 1) $\left[\dfrac{x}{x^2-x+1}\right]=0$; 2) $\left[\dfrac{x+1}{x^2+1}\right]=2$;

b) **Să se rezolve inecuaţia** $x^2-3x+\dfrac{6}{x^2-3x}>5$.

8*. **Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+1}$ **are** $\mathrm{Im}f=[-2,2]$.

Natura şi semnele rădăcinilor ecuaţiei de gradul al doilea

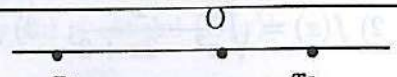
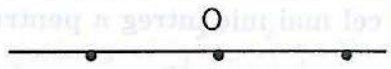
Am văzut că pentru ecuaţia de gradul al doilea în x, $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, rădăcinile acesteia sunt reale dacă $\Delta=b^2-4ac\ge 0$.

În acest caz vorbim de **natura rădăcinilor**. Mai precis avem: **rădăcini reale** dacă $\Delta\ge 0$ şi **nereale** dacă $\Delta<0$.

Mai mult în cazul rădăcinilor reale ne interesează şi semnul acestora.

Această problemă este rezolvată de semnul sumei $s=x_1+x_2$ şi semnul produsului $p=x_1x_2$. Prezentăm această discuţie sub forma tabelului de mai jos.

Δ	p	s	Concluzii	Comentarii
+	+	+	$x_1,x_2>0$	Din $p>0$ rezultă $x_1,x_2>0$ sau $x_1,x_2<0$. Cum $x_1+x_2>0$ se deduce $x_1,x_2>0$.
+	+	−	$x_1,x_2<0$	Din $p>0$ rezultă $x_1,x_2>0$ sau $x_1,x_2<0$ Din $s<0$ reţinem $x_1,x_2<0$.
+	−	+	$x_1>0,x_2<0$ $x_1>\lvert x_2\rvert$	Din $p<0$, rădăcinile au semne contrare. O x_2 x_1

Δ	p	s	Concluzii	Comentarii
$+$	$-$	$-$	$x_1 > 0,\ x_2 < 0$ $x_1 < \lvert x_2\rvert$	
$+$	0	$+$	$x_1 = 0,\ x_2 > 0$	Din $p = 0$ rezultă $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$ (sau $x_1 \neq 0$, $x_2 = 0$), iar din $s > 0$ deducem $x_2 > 0$ ($x_1 > 0$).
$+$	0	$-$	$x_1 = 0,\ x_2 < 0$	Din $p = 0$ rezultă $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$ (sau $x_1 \neq 0$, $x_2 = 0$), iar din $s < 0$ deducem $x_2 < 0$ (sau $x_1 < 0$).
$+$	$-$	0	$x_1 > 0,\ x_2 < 0$ $\lvert x_2\rvert = x_1$	

Probleme rezolvate

1. Stabiliţi semnul rădăcinilor reale ale ecuaţiilor:

a) $x^2 - x - 1 = 0$; **b)** $x^2 + 3x - 5 = 0$; **c)** $x^2 + 9x + 1 = 0$; **d)** $x^2 - 9 = 0$; **e)** $x^2 - 3x = 0$.

R. Să observăm că toate ecuaţiile considerate au rădăcini reale ($\Delta \geq 0$).

a) Din $p = -1$ deducem că rădăcinile x_1, x_2 au semne contrare. Fie $x_1 > 0$, $x_2 < 0$. Din $s = 1 > 0$ se obţine că rădăcina pozitivă x_1 este mai mare decât modulul celei negative, adică $x_1 > |x_2|$.

b) Din $p = -5$ rezultă rădăcini de semne contrare. Fie $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, iar din $s = -3 < 0$ rezultă că $|x_2| > x_1$.

c) Din $p = 1$ se obţine informaţia că rădăcinile x_1, x_2 au acelaşi semn: $x_1, x_2 > 0$ sau $x_1, x_2 < 0$. Din $s = -9$ se deduce că ambele rădăcini sunt negative. Deci $x_1, x_2 < 0$.

d) Din $p = -9 < 0$ rezultă că ambele rădăcini sunt de semne contrare: $x_1 > 0$ şi $x_2 < 0$ (sau $x_1 < 0$ şi $x_2 > 0$). Cum $s = 0$, adică $x_1 + x_2 = 0$ deducem $x_1 = -x_2$, adică cele două rădăcini sunt opuse.

e) Din $p = 0$ rezultă $x_1 = 0$ şi $x_2 \neq 0$ (sau $x_1 \neq 0$ şi $x_2 = 0$). Din $s = 3$ se deduce $x_1 + x_2 = 3 > 0$, adică $x_2 > 0$. Deci $x_1 = 0$ şi $x_2 > 0$ (o rădăcină este nulă şi alta strict pozitivă).

2. Să se discute natura şi semnele rădăcinilor ecuaţiei: $x^2 - x + m = 0$, după valorile parametrului real m.

R. Am văzut că natura rădăcinilor ecuaţiei de gradul al doilea o dă semnul lui $\Delta = 1 - 4m$, iar semnele rădăcinilor reale ale ecuaţiei sunt precizate de semnele produsului $p = x_1 x_2 = m$ şi sumei $s = x_1 + x_2 = 1 > 0$. Pentru a stabili semnul expresiilor care depind de m se rezolvă ecuaţiile $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$ şi $p = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Aceste valori pentru m împart mulţimea $\mathbb{R}$ în intervale pe care le precizăm în prima coloană a tabelului de mai jos.

m	Δ	P	S	Concluzii
$m < 0$	$+$	$-$	$+$	$x_1 > 0,\ x_2 < 0,\ x_1 > \lvert x_2\rvert$
$m = 0$	$+$	0	$+$	$x_1 = 0,\ x_2 > 0$
$m \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$	$+$	$+$	$+$	$x_1, x_2 > 0$
$m = \frac{1}{4}$	0	$+$	$+$	$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$
$m > \frac{1}{4}$	$-$	$+$	$+$	Rădăcini nereale

Poziţia rădăcinilor ecuaţiei de gradul al doilea faţă de o valoare

În unele situaţii coeficienţii ecuaţiei de gradul al doilea $ax^2+bx+c=0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, depind de un parametru m. Din acest motiv scriem aceşti coeficienti $a(m)$, $b(m)$, $c(m)$, $m\in\mathbb{R}$.

Problema care ne interesează este aceea a determinării parametrului m pentru care rădăcinile reale x_1, x_2 sunt poziţionate într-un anume fel faţă de o valoare reală dată α. Dacă $\alpha=0$, atunci acest aspect l-am analizat mai sus. Arătăm că pentru $\alpha\neq 0$, problema poziţionării rădăcinilor faţă de α se reduce la pozitionarea altor rădăcini faţă de zero (deci problema se reduce la cea analizată).

Se disting mai multe cazuri. Analizăm câteva dintre ele:

1) $x_1,x_2<\alpha$. Sistemul de condiţii ce trebuie impus pentru o astfel de poziţie a rădăcinilor în raport cu α este: $\begin{cases}\Delta\geq 0 \text{ (rădăcinile } x_1,\ x_2 \text{ sunt reale)}\\ y_1=x_1-\alpha<0 \quad \text{(numerele } y_1,\ y_2\\ y_2=x_2-\alpha<0 \quad \text{sunt negative)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geq 0\\ y_1+y_2=x_1+x_2-2\alpha<0\\ y_1y_2=(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geq 0\\ x_1+x_2-2\alpha<0\\ x_1x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2>0\end{cases}.$$

Condiţiile ca numerele $y_1=x_1-\alpha$, $y_2=x_2-\alpha$ să fie negative se traduc prin suma lor negativă ($y_1+y_2=x_1+x_2-2\alpha<0$) şi produsul lor pozitiv ($y_1y_2=(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0$). Rezolvând acest sistem de inecuaţii se determină mulţimea de valori pentru parametrul m astfel încât $x_1,x_2<\alpha$.

Observaţie. Din $y_1=x_1-\alpha$, $y_2=x_2-\alpha$ se sugerează considerarea substituţiei $y=x-\alpha$.

De aici $x=y+\alpha$, care dus în ecuaţia $ax^2+bx+c=0$, (1), dă

$a(y+\alpha)^2+b(y+\alpha)+c=0\Leftrightarrow ay^2+(b+a\alpha)y+a\alpha^2+b\alpha+c=0$, (2)

pentru care discriminantul Δ_y este egal cu Δ_x, discriminantul ecuaţiei (1), ceea ce arată că dacă ecuaţia în x (1) are rădăcini reale ($\Delta_x\geq 0$), atunci şi ecuaţia în y (2) are de asemenea rădăcini reale şi reciproc. Mai mult legătura între rădăcinile celor două ecuaţii este dată de relaţia $y=x-\alpha$. Dacă $x_1<\alpha$, $x_2<\alpha$, atunci $y_1<0$, $y_2<0$ şi am **redus problema poziţiei rădăcinilor ecuaţiei în x faţă de o valoare nenulă α la poziţionarea rădăcinilor ecuaţiei în y faţă de zero.**

Exemplu. Să se determine parametrul real m pentru care rădăcinile reale x_1, x_2 ale ecuaţiei $x^2-x+m+1=0$, sunt $x_1<1$, $x_2<1$.

R. Luăm $y=x-1$ şi deci $x=y+1$ care dus în ecuaţia în x dă ecuaţia în y, $(y+1)^2-(y+1)+1+m=0\Leftrightarrow y^2+y+1+m=0$, care are soluţiile reale $y_1=x_1-1<0$, $y_2=x_2-1<0$.

Se impun condiţiile: $\begin{cases}\Delta_y\geq 0\\ y_1+y_2<0\\ y_1y_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq -\dfrac{3}{4}\\ -3<0\\ m>-3.\end{cases}$ De aici $m\in\left(-3,-\dfrac{3}{4}\right]$.

2) $x_1<\alpha<x_2$. Se notează $y_1=x_1-\alpha<0$, $y_2=x_2-\alpha>0$ şi se impune sistemul de condiţii: $\begin{cases}\Delta_y>0\\ y_1y_2<0\end{cases}$ după care se rezolvă acest sistem de inecuaţii pentru obţinerea parametrului m.

3) $\alpha<x_1,x_2$. Punem $y_1=x_1-\alpha>0$, $y_2=x_2-\alpha>0$ pentru care trebuie să aibă loc sistemul de condiţii: $\begin{cases}\Delta_y\geq 0\\ y_1+y_2>0\\ y_1y_2>0\end{cases}$, etc.

Altfel. Această problemă a poziţiei rădăcinilor ecuaţiei de gradul al doilea $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, faţă de o valoare $\alpha\in\mathbb{R}$, poate fi abordată cu ajutorul semnului funcţiei de gradul al doilea, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$. Are loc următorul rezultat:

1) $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0$ (a şi $f(\alpha)$ au semne contrare între rădăcini);

2) $\alpha < x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 & \text{(rădăcini reale)} \\ a \cdot f(\alpha) > 0 & (a, f(\alpha) \text{ au acelaşi semn în afara rădăcinilor)} \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} & \text{(poziţionează pe } \alpha \text{ faţă de mijlocul intervalului} (x_1, x_2), \ \dfrac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow \alpha \\ & \text{la stânga rădăcinilor);} \end{cases}$

3) $x_1, x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 & \text{(rădăcini reale} \\ af(\alpha) > 0 & (a, f(\alpha) \text{ au acelaşi semn în afara rădăcinilor)} \\ \alpha > -\dfrac{b}{2a} & \text{(poziţionează pe } \alpha \text{ faţă de mijlocul intervalului } (x_1, x_2), \\ & \dfrac{x_1+x_2}{2} = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow \alpha \text{ la dreapta rădăcinilor.} \end{cases}$

Poziţia rădăcinilor ecuaţiei de gradul al doilea faţă de două valori

Fie x_1, x_2 rădăcinile reale ale ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Ne propunem să determinăm parametrul real m (de care depind coeficienţii ecuaţiei) pentru care ecuaţia are rădăcinile x_1, x_2 ordonate într-un fel faţă de două numere reale α, β ($\alpha < \beta$). Vom reduce această problemă la precedenta, **poziţionând rădăcinile x_1, x_2 faţă de fiecare din cele două valori.**

Dacă, de exemplu, $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$, atunci se impune sistemul de condiţii:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < \alpha < x_2 \\ x_1, x_2 < \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - \alpha < 0, \ x_2 - \alpha > 0 \\ x_1 - \beta < 0, \ x_2 - \beta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \\ x_1 + x_2 - 2\beta < 0 \\ (x_1 - \beta)(x_2 - \beta) > 0 \end{cases} \text{ etc.}$$

Altfel. Se consideră transformarea $y = \dfrac{x - \alpha}{x - \beta}$, când y_1, y_2 se poziţionează faţă de zero.

Altfel. Ca şi în cazul poziţionării rădăcinilor ecuaţiei de gradul al doilea faţă de o valoare, vom rezolva situarea rădăcinilor faţă de două valori, utilizând semnul funcţiei de gradul al doilea. Avem:

1) $x_1 < \alpha < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) < 0 & (\alpha \text{ este între rădăcini, deci } a \text{ şi } f(\alpha) \text{ au semne diferite}) \\ af(\beta) > 0 & (\beta \text{ este în afara rădăcinilor, deci } a \text{ şi } f(\beta) \text{ au acelaşi semn}) \\ -\dfrac{b}{2a} < \beta & (\beta \text{ este dincolo de mijlocul intervalului } (x_1, x_2) \text{ şi cum este în afara} \\ & \text{rădăcinilor este la dreapta lor}); \end{cases}$

2) $\alpha < x_1 < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(\beta) < 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$; 3) $\alpha < x_1, x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} < \beta \end{cases}$;

4) $x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}$.

Observaţie. Condiţia ca o rădăcină să fie situată în intervalul (α, β) se exprimă prin $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ (aceasta se obţine din 1) şi 2)).

Condiţia ca două ecuaţii de gradul al doilea să aibă aceleaşi rădăcini

Considerăm ecuaţiile de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$, $a'x^2 + b'x + c' = 0$, $a, a' \neq 0$. Dorim să stabilim legătura între coeficienţii celor două ecuaţii astfel încât ele să aibă aceleaşi rădăcini x_1, x_2.

Din relaţiile lui Viète avem: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{b'}{a'}$ sau $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$, (1)

şi

$x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{c'}{a'}$ sau $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{c}{c'}$, (2).

Din (1) şi (2) rezultă $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$ (dacă $b=0$, atunci $b'=0$; dacă $c=0$, atunci $c'=0$). Deci,

Două ecuaţii de gradul al doilea au aceleaşi rădăcini dacă coeficienţii lor sunt proporţionali: $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$.

Reciproca este imediată.

Exemplu. Să se determine parametrii reali m, n astfel încât ecuaţiile $(m+5)x^2+4(4n-1)x+4=0$, $(n+1)x^2+m(n-1)x+1=0$, $m\neq -5$, $n\neq -1$, să aibă aceleaşi rădăcini reale.

R. Condiţia este dată de proporţionalitatea coeficienţilor $\dfrac{m+5}{n+1}=\dfrac{4(4n-1)}{m(n-1)}=4$.

Rezolvând sistemul rezultă soluţiile $(m_1=7,\ n_1=2)$, $\left(m_2=0,\ n_2=\dfrac{1}{4}\right)$.

Se constată că a doua soluţie conduce la ecuaţii care nu au rădăcini reale. Deci $m=7$, $n=2$.

Condiţia ca două ecuaţii de gradul al doilea să aibă o rădăcină comună

Fie ecuaţiile $ax^2+bx+c=0$, $a'x^2+b'x+c'=0$, $a,b,c,a',b',c'\in\mathbb{R}$, $a,a'\neq 0$.

Să determinăm o relaţie între coeficienţii celor două ecuaţii dacă ecuaţiile au o rădăcină comună.

Fie α rădăcină comună.

Deci α verifică ecuaţiile: $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, $a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0$.

Înmulţim prima relaţie cu a' şi a doua cu $(-a)$ şi apoi le adunăm. Avem: $(a'b-ab')\alpha=ac'-a'c$.

Dacă $a'b-ab'\neq 0$, atunci $\alpha=\dfrac{ac'-a'c}{a'b-ab'}$, care înlocuită în prima relaţie dă (după unele calcule)

Ecuaţiile $ax^2+bx+c=0$, $a'x^2+b'x+c'=0$ au o rădăcină comună dacă:

$$(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c),\quad (*)$$

Dacă $a'b-ab'=0$, atunci $ac'-a'c=0$ şi deci cele două ecuaţii **au ambele rădăcini comune.**

Reciproc, dacă are loc relaţia $(*)$, atunci se arată uşor că $\alpha=\dfrac{ac'-a'c}{a'b-ab'}$ este rădăcină comună.

Observaţii. 1) Dacă se consideră sistemul $\begin{cases} a\alpha^2+b\alpha+c=0\\ a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0\end{cases}$ de necunoscute α şi α^2, atunci prin rezolvarea lui se determină α şi α^2, iar din egalitatea $(\alpha)^2=\alpha^2$ se deduce relaţia $(*)$.

2) În unele cazuri este uşor de eliminat parametrul între cele două ecuaţii când obţinem o ecuaţie pe care o verifică rădăcina comună. Printre soluţiile acestei ecuaţii se află şi rădăcina comună.

Exemplu. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţiile $x^2+mx+1=0$, $x^2+x+m=0$, să aibă o rădăcină comună reală.

R. Fie α rădăcina comună a celor două ecuaţii. Deci $\alpha^2+m\alpha+1=0$, $\alpha^2+\alpha+m=0$.

Scăzând relaţiile rezultă $(m-1)\alpha=m-1$.

Dacă $m=1$, atunci cele două ecuaţii au aceleaşi rădăcini (nereale !).

Deci $m\neq 1$, când $\alpha=1$. Pentru $\alpha=1$, din prima ecuaţie rezultă $1+m+1=0$, adică $m=-2$.

Pentru $m=-2$ ecuaţiile devin: $x^2-2x+1=0$ cu soluţiile $x_1=x_2=1$ şi respectiv $x^2+x-2=0$ cu

soluţiile $x_1 = -2$, $x_3 = 1$.
Deci răspunsul cerut este $m = -2$.
Altfel (prin eliminarea parametrului m). Din a doua ecuaţie $m = -x^2 - x$, care dus în prima ecuaţie conduce la ecuaţia $x^2 + x(-x^2 - x) + 1 = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$.
De aici singura soluţie reală este $x = 1$. Înlocuim $x = 1$ în cele două ecuaţii şi se obţine $m = -2$.

Probleme rezolvate

1. Să se arate că dacă ecuaţiile $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + cx + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, au o rădăcină iraţională comună, atunci $a = c$, $b = d$.
R. Fie $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ rădăcina comună. Avem egalităţile: $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$, $\alpha^2 + c\alpha + d = 0$, care prin scădere dau $(a-c)\alpha = d - b$. Dacă $a - c \neq 0$, atunci $\alpha = \dfrac{d-b}{a-c} \in \mathbb{Q}$, contradicţie, deoarece α este iraţional. Contradicţia a provenit din presupunerea $a - c \neq 0$. Deci $a - c = 0$ şi apoi $b - d = 0$, adică $a = c$ şi $b = d$.

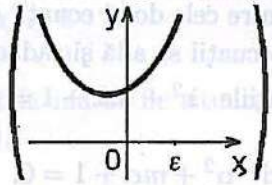
2. Să se arate că ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, impare, nu are rădăcini raţionale.
R. Fie $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$, $c = 2p + 1$, $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia admite rădăcini raţionale dacă discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$ este pătrat perfect. Arătăm că Δ nu poate fi pătrat perfect.
Avem: $\Delta = (2n+1)^2 - 4(2m+1)(2p+1) = 4(n^2 + n - 4mp - 2m - 2p - 1) + 1 = 4l + 1$, l impar.
Presupunem prin absurd că $4l + 1 = k^2$, $k \in \mathbb{Z}$ sau $4l = (k-1)(k+1)$. Dacă luăm $k = 2s$, $s \in \mathbb{Z}$, atunci se obţine contradicţie (membrul stâng este par, iar cel drept este impar). Dacă se ia $k = 2s + 1$, $s \in \mathbb{Z}$, atunci $4l = 4s(s+1)$ şi iarăşi se obţine contradicţie, deoarece membrul drept se divide prin 8, în timp ce membrul stâng nu. Deci Δ nu poate fi pătrat perfect.

3. Dacă $a + b + 1 < 0$, atunci ecuaţiile $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$ au rădăcini reale şi distincte.
R. Fie $\Delta_1 = a^2 - 4b$, discriminantul primei ecuaţii. Din $a + b + 1 < 0$ se deduce $b < -1 - a$ şi deci $\Delta_1 > a^2 - 4(-1-a) = (a+2)^2 \geq 0$. Avem $\Delta_1 > 0$, adică prima ecuaţie are rădăcini reale distincte.
Analog se procedează pentru a doua ecuaţie.

4. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ şi $A, B, C \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = A^2 + B^2 + C^2$. Să se arate că cel puţin una din ecuaţiile $bx^2 + 2Ax + c = 0$, $cx^2 + 2Bx + a = 0$, $ax^2 + Cx + b = 0$, are rădăcini reale.
R. Fie $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ discriminanţii celor trei ecuaţii. Avem:
$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 4(A^2 + B^2 + C^2 - ab - ac - bc) = 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \geq 0$. De aici rezultă că măcar unul din numerele Δ_1, Δ_2, Δ_3 este nenegativ (în caz contrar am avea $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 < 0$, fals). Deci cel puţin o ecuaţie are rădăcini reale.

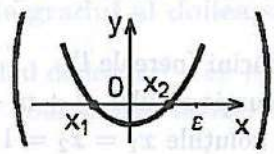
Observaţie. Fie $f(x) = a(m)x^2 + b(m)x + c(m)$, $a(m) \neq 0$. Alte probleme teoretice care apar aici sunt:
1) Să se determine m astfel încât $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [\epsilon, \infty)$.
Sunt două posibilităţi (în paranteză este prezentată situaţia grafică)

1) $\begin{cases} a(m) > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$



sau

2) $\begin{cases} a(m) > 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1, x_2 \leq \epsilon \end{cases}$

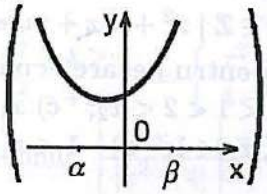


În final se face reuniunea soluţiilor celor două sisteme de inecuaţii.

2) Să se determine m astfel încât $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $(\alpha < \beta)$.

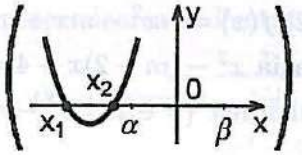
Inegalitatea are loc în patru cazuri:

1) $\begin{cases} a(m) > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$



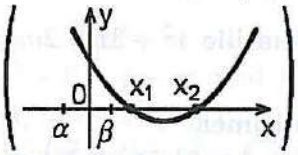
sau

2) $\begin{cases} a(m) > 0 \\ \Delta \geq 0 \\ x_1, x_2 \leq \alpha \end{cases}$



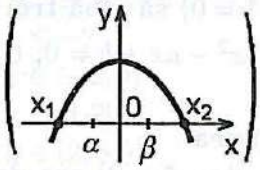
sau

3) $\begin{cases} a(m) > 0 \\ \Delta \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq \beta \end{cases}$



sau

4) $\begin{cases} a(m) < 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 \leq \alpha < \beta < x_2 \end{cases}$



În final pentru determinarea lui m se face reuniunea celor patru mulţimi de soluţii.

În aceste discuţii apare poziţia rădăcinilor ecuaţiei de grad doi faţă de o valoare şi faţă de două valori. Aceste chestiuni au fost abordate mai sus.

Analog se tratează problemele: 1') $f(x) \leq 0$, $\forall x \leq \varepsilon$, 2') $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

Probleme propuse

1. Fără a rezolva ecuaţia precizaţi semnele rădăcinilor, în cazurile:

1) $x^2 - 3x = 0$; 2) $2x - x^2 = 0$; 3) $x^2 - 3x + 2 = 0$; 4) $x^2 - 4x - 5 = 0$;

5) $x^2 + 3x + 2 = 0$; 6) $-x^2 + 3x + 4 = 0$.

2. Precizaţi natura şi semnele rădăcinilor următoarelor ecuaţii:

1) $x^2 - x + m - 1 = 0$; 2) $x^2 - mx + 1 = 0$; 3) $(m+1)x^2 - 2x + 3 = 0$;

4) $x^2 - 2mx + 2 - m = 0$; 5) $mx^2 + 2mx + 2 - m = 0$; 6) $(2m+1)x^2 - 2(m+1)x + 2m - 1 = 0$.

3. Să se determine parametrul real m astfel încât ecuaţia $x^2 - mx + m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$, să aibă rădăcini: a) egale; b) opuse; c) reale, pozitive; d) reale negative; e) nereale.

4. Să se determine parametrul real m care să verifice, pe rând, fiecare din realţiile indicate pentru fiecare ecuaţie $(m \in \mathbb{R})$:

1) $x^2 - 4x + m = 0$; a) $x_1, x_2 \leq 3$; b) $x_1, x_2 > 3$, c) $x_1 < 3 < x_2$;

2) $x^2 + mx - 4 = 0$; a) $x_1, x_2 < -1$; b) $x_1 \leq -1 < x_2$, c) $-1 < x_1$, $x_1 \neq x_2$;

3) $(m+1)x^2 - 2mx + 1 - 2m = 0$; a) $x_1 < 0 < x_2$, $|x_1| > x_2$; b) $x_1 < 1 < x_2$, c) $x_1 + x_2 = 4$;

4) $x^2 - (2m+3)x + m - 1 = 0$; a) $x_1, x_2 < 0$; b) $x_1^2 + x_2^2 \leq 3x_1x_2$; c) $x_1 < 1 < x_2$;

5) $(m-1)x^2 - (m+3)x - 1 = 0$; a) $x_1, x_2 > 0$; b) $x_1 > 2 > x_2$; c) $x_1, x_2 < 2$, $x_1 \neq x_2$.

5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât, pe rând:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + m \geq 0$, $\forall x \geq 1$;

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2mx + m - 1 \leq 0$, $\forall x < 1$.

6. **Să se determine numărul de elemente ale mulţimilor:**
1) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+mx+1=0\}\cap(1,\infty)$; 2) $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2-2x+m+3=0\}\cap(-\infty,2)$.

7. **Să se determine m pentru care, pe rând:**
1) $\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+x+m=0\}\cap(2,\infty)=\emptyset$; 2) $\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2+mx+m-2=0\}\cap(-\infty,1)=\emptyset$.

8. **Să se determine parametrul real m dacă pentru fiecare ecuaţie avem îndeplinită o relaţie:**
1) $x^2-4x+m=0$, a) $1\le x_1\le 2\le x_2$; b) $x_1<1<2<x_2$; c) $x_1<1<x_2<2$;
2) $(m+1)x^2-2(m+2)x+m+1=0$, a) $-1<x_1,x_2<1$; b) $-1<x_1\ne x_2<1$; c) $x_1<-1<1<x_2$.

9. **Să se determine m astfel încât, pe rând:**
1) $f(x)=x^2+mx+m-1\ge 0,\ \forall x\in[1,2]$; 2) $f(x)=-x^2-mx+m\le 0,\ \forall x\in[-1,1]$.

10. **Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $x^2-(m+2)x+4=0$ are o rădăcină în $(0,1)$.**

11. **Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât mulţimea $\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-mx+m-24=0\}\cap(0,1)$ are două elemente.**

12. **Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţiile $x^2+3x-2m=0$, $x^2-5x+2m=0$ să aibă o rădăcină comună.**

13. **Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât mulţimea**
$\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-mx+2=0\}\cup\{x\in\mathbb{R}\mid 2x^2-mx+1=0\}$ să aibă trei elemente.

14. **Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel ecuaţiile $5x^2-ax+b=0$, $6(a+b)x^2-9bx+4a=0$ să aibă aceleaşi rădăcini.**

15. **Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ petru care mulţimea:**
1) $\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-(a+b)x+2b=0\}\cap\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-6x+5=0\}$ **are două elemente;**
2) $\{x\in\mathbb{R}\mid (a+1)x^2+(2a-b)x+1=0\}\cup\{x\in\mathbb{R}\mid (b-1)x^2+(a+b)x+1=0\}$ **are două elemente.**

Compunerea funcţiei de gradul al doilea cu alte funcţii

1. Funcţia parte întreagă compusă cu funcţia de gradul al doilea, $f(x)=[ax^2+bx+c]$, $a\ne 0$.

Exemple. 1) Să se rezolve ecuaţiile: a) $2[x]^2-[x]-1=0$; b) $[x^2-x]=2$.

R. a) Notăm $[x]=y\in\mathbb{Z}$ şi ecuaţia devine $2y^2-y-1=0$ cu soluţiile $y_1=1$, $y_2=-\frac{1}{2}$. Reţinem doar valoarea întreagă a lui y, $y_1=1$. Revenim la substituţie şi avem de rezolvat ecuaţia $[x]=1$. De aici $x\in[1,2)$, adică mulţimea de soluţii a ecuaţiei este $S=[1,2)$.

b) Ecuaţia este echivalentă cu dubla inecuaţie (din definiţia părţii întregi): $2\le x^2-x<3$, care rezolvată conduce la mulţimea de soluţii: $S=\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2},-1\right]\cup\left[2,\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

2. Să se expliciteze funcţia: $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x^2]$.

R. Dacă $0\le x\le 2$, atunci $0\le x^2\le 4$. Prin urmare

$$[x^2]=\begin{cases}0, & 0\le x^2<1\\ 1, & 1\le x^2<2\\ 2, & 2\le x^2<3\\ 3, & 3\le x^2<4\\ 4, & x^2=4\end{cases}=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x<\sqrt{2}\\ 2, & \sqrt{2}\le x<\sqrt{3}\\ 3, & \sqrt{3}\le x<2\\ 4, & x=2\end{cases}.$$

Observaţie . Pentru explicitarea funcţiei $f(x)=[ax^2+bx+c]$ pe o mulţime A se determină $\operatorname{Im} f=f(A)$ după care se studiază f pe intervale de forma $[k,k+1)\subseteq f(A)$.

2. Funcţia modul compusă cu funcţia de gradul al doilea $f(x)=|ax^2+bx+c|$, $a\ne=0$.
De regulă problemele în care intervine funcţia modul impune explicitarea acesteia

$$|ax^2+bx+c| = \begin{cases} ax^2+bx+c & \text{dacă } ax^2+bx+c \geq 0 \\ -(ax^2+bx+c) & \text{dacă } ax^2+bx+c < 0 \end{cases}.$$

Exemple. 1) Să se expliciteze funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în cazurile: a) $f(x) = |x^2-4|$; b) $f(x) = |x|+|x^2-4|$.

R. a) Din definiţia modulului avem:

$$f(x) = |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4, & x^2-4 \geq 0 \\ -(x^2-4), & x^2-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-4, & x \in (-\infty,-2] \cup [2,\infty) \\ 4-x^2, & x \in (-2,2) \end{cases}$$

Avem tabelul cu explicitarea modulului:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\lvert x^2-4\rvert$	x^2-4	0	$4-x^2$	0	x^2-4		

b) Din explicitarea lui $|x|$ se obţine valoarea 0. Pentru scrierea funcţiei f alcătuim tabelul care cuprinde explicitarea modulelor $|x|$, $|x^2-4|$ pe intervale

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$-x$				0		x		
$\lvert x^2-4\rvert$	x^2-4	0	$4-x^2$	0	x^2-4				

Pe intervalul $(-\infty,-2]$ avem: $|x| = -x$, $|x^2-4| = x^2-4$ şi deci $f(x) = x^2-x-4$.
Pe intervalul $(-2,0)$, $|x| = -x$, $|x^2-4| = 4-x^2$ când $f(x) = -x^2-x+4$.
Pe intervalul $[0,2]$, $|x| = x$, $|x^2-4| = 4-x^2$ şi $f(x) = -x^2+x+4$.
În fine pe intervalul $(2,\infty)$, $|x| = x$, $|x^2-4| = x^2-4$, iar $f(x) = x^2+x-4$.

Aşadar $f(x) = \begin{cases} x^2-x-4, & x \leq -2 \\ -x^2-x+4, & x \in (-2,0) \\ -x^2+x+4, & x \in [0,2] \\ x^2+x-4, & x \in (2,\infty) \end{cases}$

2) Să se rezolve inecuaţia: $2|x| + |x^2-1| \leq 3$.

R. Tabelul cu explicitarea modulelor este:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$.
$2\lvert x\rvert$			$-2x$		0		$2x$		
$\lvert x^2-1\rvert$	x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1				

În rezolvarea inecuaţiei distingem cazurile:

Cazul 1. $x \leq -1$. Inecuaţia se scrie: $-2x+x^2-1 \leq 3 \Leftrightarrow x^2-2x-4 \leq 0$ cu soluţiile $x \in [1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}]$. Cum $x \leq -1$, reţinem $S_1 = [1-\sqrt{5}, -1]$.

Cazul 2. $x \in (-1,0)$. Inecuaţia devine: $-2x+1-x^2 \leq 3 \Leftrightarrow x^2+2x+2 \geq 0$ cu soluţiile $x \in \mathbb{R}$. Cum $x \in (-1,0)$ deducem că $S_2 = (-1,0)$ face parte din mulţimea soluţiilor.

Cazul 3. $x \in [0,1]$. Inecuaţia se scrie: $2x+1-x^2 \leq 3 \Leftrightarrow x^2-2x+2 \geq 0$ cu mulţimea de soluţii $x \in \mathbb{R}$. Din $x \in [0,1]$ găsim că $S_3 = [0,1]$ reprezintă o submulţime a mulţimii soluţiilor inecuaţiei date.

Cazul 4. $x \in (1,\infty)$. Inecuaţia devine: $2x+x^2-1 \leq 3 \Leftrightarrow x^2+2x-4 \leq 0$ cu soluţiile $x \in [-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}]$. Dar $x > 1$ şi reţinem $S_4 = (1, -1+\sqrt{5}]$.

În final mulţimea de soluţii a inecuaţiei este $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = [1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}]$

3) Plecând de la graficul funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2-1$ să se traseze graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2-1|$.

R. Să observăm că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce arată că graficul funcţiei f este inclus în semiplanul (închis) superior delimitat de axa Ox. Explicitând funcţia f avem:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x^2-1 \geq 0 \\ -(x^2-1), & x^2-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-1, & x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \\ -(x^2-1), & x \in (-1,1) \end{cases}$$

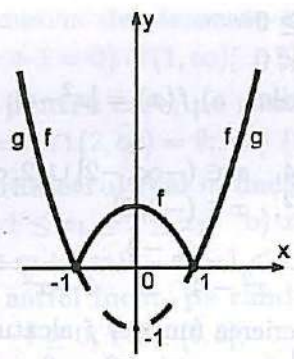


Fig. 17

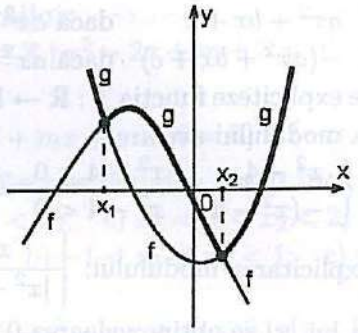


Fig. 18

Aceasta arată că f restricţionată la $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ coincide cu g şi deci graficul este acelaşi pentru cele două funcţii pe $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$. Pe intervalul $(-1,1)$ avem $f(x)=-g(x)$, ceea ce arată că punctele $(x,f(x)=-g(x)),(x,g(x))$ sunt simetrice în raport cu axa Ox. Deci pe intervalul $(-1,1)$ graficul lui f se obţine din graficul lui g prin simetrie în raport cu axa Ox (fig. 17).

3. Funcţiile min, max din funcţii de gradul al doilea.

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\min(ax^2+bx+c,a'x^2+b'x+c')$ se explicitează astfel

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & \text{dacă } ax^2+bx+c\le a'x^2+b'x+c' \\ a'x^2+b'x+c', & \text{dacă } ax^2+bx+c>a'x^2+b'x+c' \end{cases}$$

Analog se procedează cu funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\max(ax^2+bx+c,a'x^2+b'x+c')$.

Dacă am reprezenta grafic funcţiile $x\to ax^2+bx+c$, $x\to a'x^2+b'x+c'$, atunci graficul lui f pe fiecare interval este cel mai de jos, în timp ce graficul lui g este cel mai de sus (fig. 18 — porţiunea mai îngroşată).

Exemplu. Să se arate că: $\max(x^2+3x+2,x^2-5x+6)\ge\dfrac{15}{4}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

R. Explicităm maximul şi avem: $\max(x^2+3x+2,x^2-5x+6)=\begin{cases} x^2+3x+2, & x\ge\dfrac{1}{2} \\ x^2-5x+6, & x<\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Deci inegalitatea devine:

1) pentru $x\ge\dfrac{1}{2}$, $x^2+3x+2\ge\dfrac{15}{4}$ sau $4x^2+12x-7\ge 0$ cu mulţimea de soluţii $x\in\left(-\infty,-\dfrac{7}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$.

Cum mulţimea pe care rezolvăm inecuaţia, $\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$ este inclusă în mulţimea de soluţii se deduce că inegalitatea în acest caz este adevărată.

2) pentru $x<\dfrac{1}{2}$, $x^2-5x+6\ge\dfrac{15}{4}$ sau $4x^2-20x+9\ge 0$ cu mulţimea de soluţii $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{9}{2},\infty\right)$.

Se constată că şi în acest caz are loc inegalitatea. Deci în ambele cazuri inegalitatea este adevărată, ceea ce arată că este adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Rezolvarea unor sisteme de două ecuaţii cu două necunoscute

În cele ce urmează vom aborda rezolvarea unor sisteme de ecuaţii a căror rezolvare depinde de rezolvarea unei ecuaţii de gradul al doilea.

1. Sisteme de forma: $\begin{cases} mx+n=y \\ ax^2+bx+c=y,\ a\ne 0 \end{cases}$ (1)

Metoda de rezolvare a acestui sistem este **metoda substituţiei.** Sistemul (1) se scrie echivalent

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases} y=mx+n \\ mx+n=ax^2+bx+c \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=mx+n \\ ax^2+(b-m)x+c-n=0 \end{cases}$$

A doua ecuaţie a sistemului este o ecuaţie de gradul doi în necunoscuta x. Distingem următoarele cazuri de discuţie:

1) Dacă ecuaţia de gradul doi are două rădăcini reale, atunci sistemul (1) are două soluţii reale.

2) Dacă ecuaţia de gradul doi are rădăcini reale egale, atunci sistemul (1) are o soluţie reală.

3) Dacă ecuaţia de gradul doi nu are rădăcini reale, atunci sistemul (1) nu are soluţii reale.

Interpretarea geometrică a rezolvării sistemului (1). În planul cartezian ecuaţia $y = mx + n$ reprezintă ecuaţia unei drepte d, iar $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, este ecuaţia unei parabole $\mathcal{P}$. Faptul că perechea (x_0, y_0) este o soluţie a sistemului (1) se traduce geometric prin aceea că punctul $A(x_0, y_0)$ se află atât pe dreapta $d(y_0 = mx_0 + n)$ cât şi pe parabola $\mathcal{P}(y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c)$. Deci $A \in d \cap \mathcal{P}$. Spunem că soluţiile reale ale sistemului (1) (dacă există) dau coordonatele punctelor de intersecţie ale dreptei d cu parabola $\mathcal{P}$. Avem cazurile:

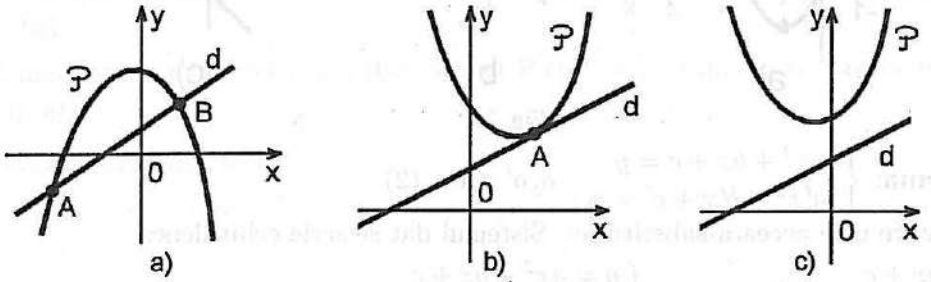


Fig. 19

1') Dacă sistemul (1) are două soluţii, atunci $d \cap \mathcal{P} = \{A, B\}$. Spunem că dreapta d este **secantă** parabolei $\mathcal{P}$ (fig. 19.a)).

2') Dacă sistemul (1) are o soluţie, atunci $d \cap \mathcal{P} = \{A\}$. Spunem că dreapta d este **tangentă** în punctul A parabolei $\mathcal{P}$ (fig. 19.b)).

3') Dacă sistemul (1) nu are soluţii reale, atunci $d \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Spunem că dreapta d este **exterioară** parabolei $\mathcal{P}$ (fig. 19.c)).

Exemple. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$; b) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 2x + 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases}$,

şi să se interpreteze rezultatele geometric.

R. a) Sistemul se scrie echivalent: $\begin{cases} y = x + 4 \\ x + 4 = x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases}$

Ecuaţia $x^2 - 3x - 4 = 0$ are soluţiile $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Din $y = x + 4$ rezultă: pentru $x_1 = -1$, $y_1 = -1 + 4 = 3$ şi pentru $x_2 = 4$, $y_2 = 4 + 4 = 8$. Prin urmare sistemul are soluţiile $(-1, 3)$, $(4, 8)$. Curba de ecuaţie $y = x^2 - 3x$ este o parabolă, iar $y = x + 4$ este ecuaţia unei drepte.

Cum sistemul are două soluţii, acestea reprezintă coordonatele punctelor de intersecţie A, B ale dreptei d cu parabola (dreapta este **secantă** parabolei) (fig. 20.a)).

b) Sistemul se scrie echivalent: $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 1 = x^2 - 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases}$

Ecuaţia de gradul doi în x are soluţia dublă $x_1 = x_2 = 2$, când $y_1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Deci sistemul are o singură soluţie $(2, 3)$ şi reprezintă coordonatele punctului de tangenţă A dintre dreapta de ecuaţie $y = 2x - 1$ şi parabola de ecuaţie $y = x^2 - 2x + 3$ (fig. 20.b)).

c) Sistemul devine echivalent cu sistemele: $\begin{cases} y = x - 2 \\ x - 2 = x^2 + x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + 3 = 0 \end{cases}$

Ecuaţia de gradul doi $x^2 + 3 = 0$ nu are soluţii reale. Deci nici sistemul dat n-are soluţii reale. În acest

caz dreapta de ecuaţie $y = x - 2$ este exterioară parabolei de ecuaţie $y = x^2 + x + 1$ (fig. 20.c)).

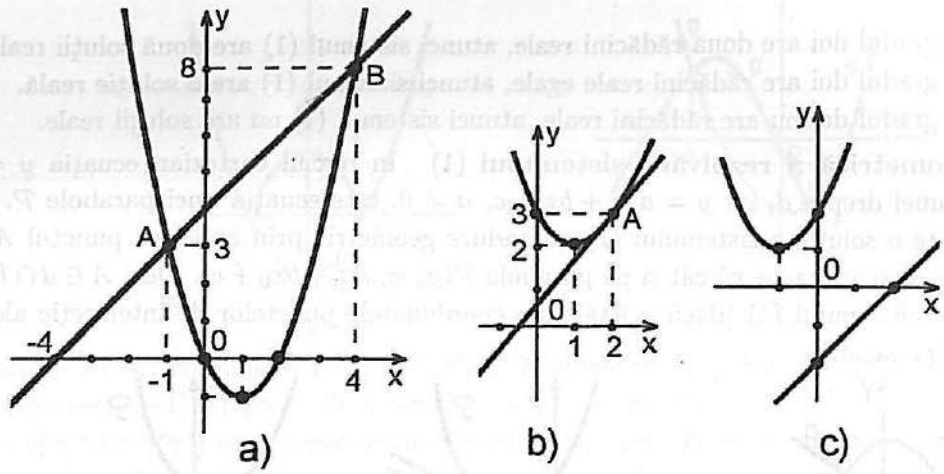


Fig. 20

2. Sisteme de forma: $\begin{cases} ax^2 + bx + c = y \\ a'x^2 + b'x + c' = y, \end{cases}$ $a, a' \neq 0$ (2)

Metoda de rezolvare este aceea a substituţiei. Sistemul dat se scrie echivalent:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ (a - a')x^2 + (b - b')x + c - c' = 0 \end{cases}.$$

Observăm că a doua ecuaţie a sistemului este de gradul doi în x, dacă $a - a' \neq 0$, adică $a \neq a'$. În acest caz, ecuaţia are (Δ_x este discriminantul ecuaţiei în x):

a) două soluţii, dacă $\Delta_x > 0$, iar sistemul (2) are două soluţii;

b) o soluţie (dublă), dacă $\Delta_x = 0$, iar sistemul (2) are o soluţie;

c) nici o soluţie, dacă $\Delta_x < 0$, iar sistemul (2) nu are soluţii reale.

Dacă $a - a' = 0$ şi $b - b' \neq 0$, atunci sistemul are o unică soluţie.

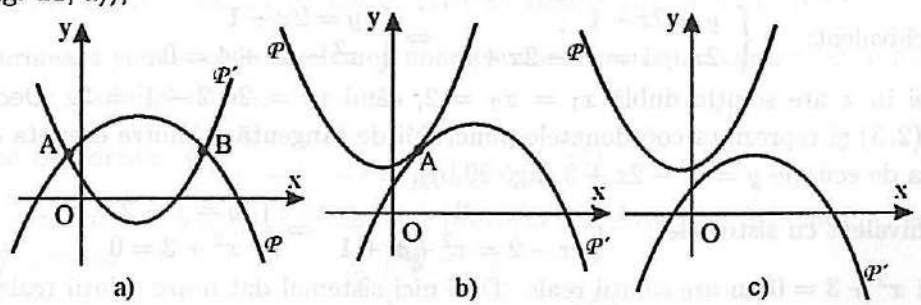
Dacă $a - a' = 0$, $b - b' = 0$ şi $c - c' \neq 0$, sistemul nu are soluţii.

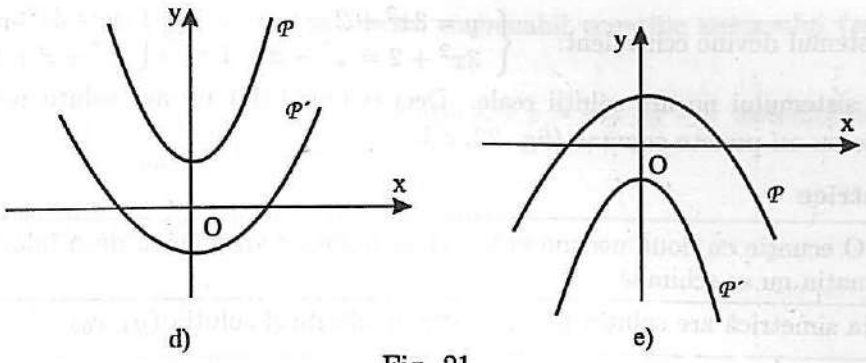
Dacă $a - a' = 0$, $b - b' = 0$ şi $c - c' = 0$, sistemul se reduce la o ecuaţie, iar mulţimea de soluţii este infinită.

Interpretarea geometrică a rezolvării sistemului (2). În planul cartezian xOy, ecuaţia $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, reprezintă ecuaţia unei parabole $\mathcal{P}$. A doua ecuaţie, $y = a'x^2 + b'x + c'$, $a' \neq 0$ este ecuaţia unei alte parabole, $\mathcal{P}'$. Dacă (x_0, y_0) este soluţie a sistemului (2), atunci punctul din planul xOy, având aceste coordonate, $A(x_0, y_0)$, se află atât pe parabola $\mathcal{P}$ cât şi pe parabola $\mathcal{P}'$, adică $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

Spunem că soluţiile reale ale sistemului (2), dacă există, reprezintă coordonatele punctelor de intersecţie ale celor două parabole. Reluând discuţia de mai sus, avem:

a') Dacă sistemul (2) **are două soluţii**, atunci $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \{A, B\}$. Spunem că parabolele $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{P}'$ sunt **secante** (fig. 21, a));





d) e)

Fig. 21

b') Dacă sistemul (2) **are o soluţie**, atunci $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \{A\}$. Spunem că parabolele $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{P}'$ **sunt tangente** în A (fig. 21, b)).

c') Dacă sistemul (2) **nu are nici o soluţie**, atunci $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$. Spunem că parabolele sunt **nesecante** (fig. 21, c), d), e)).

Exemple. Să se rezolve sistemele:

1) $\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = -x^2 + 2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 4 \\ y = x^2 - x \end{cases}$; 3) $\begin{cases} y = 3x^2 + 2 \\ y = x^2 - x + 1 \end{cases}$.

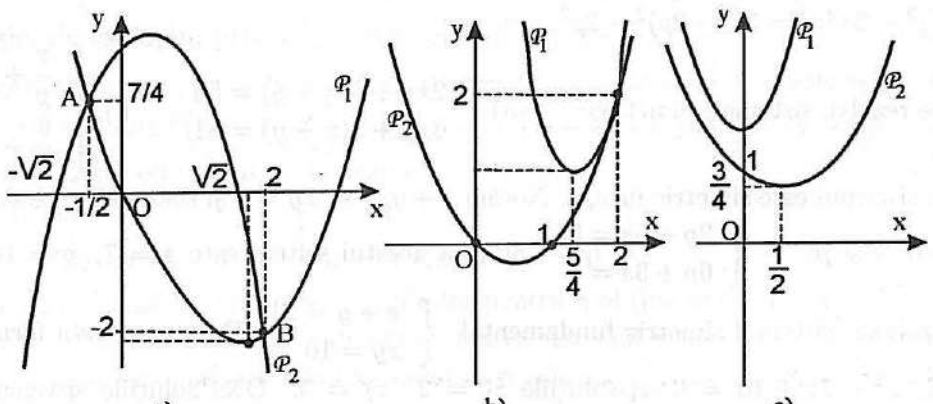
R. 1) Sistemul se scrie echivalent: $\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ x^2 - 3x = -x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 3x \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases}$.

Ecuaţia $2x^2 - 3x - 2 = 0$ are soluţiile $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. Din $y = x^2 - 3x$ pentru $x_1 = -\frac{1}{2}$ obţinem $y_1 = \frac{7}{4}$, iar pentru $x_2 = 2$ avem $y_2 = -2$. Deci soluţiile sistemului sunt: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$, $(2, -2)$. Aceste soluţii reprezintă coordonatele punctelor de intersecţie dintre cele două parabole $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$, $B(2, -2)$ (fig. 22, a)). Am notat cu $\mathcal{P}_1$, parabola corespunzătoare primei ecuaţii a sistemului, iar cu $\mathcal{P}_2$, parabola corespunzătoare celei de a doua ecuaţii.

2) Scriem echivalent sistemul $\begin{cases} y = x^2 - x \\ 2x^2 - 5x + 4 = x^2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - x \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases}$.

A doua ecuaţie a sistemului are soluţia dublă $x = 2$, când $y = 2$.

Prin urmare, sistemul are soluţia unică (2,2). Punctul $A(2, 2)$ este punctul de tangenţă al celor două parabole (fig. 22, b).



a) b) c)

Fig. 22

3) În acest caz, sistemul devine echivalent: $\begin{cases} y = 3x^2 + 2 \\ 3x^2 + 2 = x^2 - x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x^2 + 2 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$.

A doua ecuaţie a sistemului nu are soluţii reale. Deci sistemul dat nu are soluţii reale. Prin urmare, parabolele asociate nu au puncte comune (fig. 22, c)).

3. Sisteme simetrice

Definiţie. O ecuaţie cu două necunoscute x, y se numeşte **simetrică** dacă înlocuind x cu y şi y cu x ecuaţia nu se schimbă.

Dacă ecuaţia simetrică are soluţia (x_0, y_0), atunci admite şi soluţia (y_0, x_0).

Următoarele ecuaţii sunt simetrice: $5x + 3xy + 5y = 10$, $2(x^2 + y^2) - xy = 1$, dar ecuaţia $x - 2xy + 3y = 0$ nu este simetrică.

Definiţie. Se numeşte **sistem simetric** sistemul format din ecuaţii simetrice.

Sistemul simetric $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ se numeşte **sistem simetric fundamental.**

Rezolvarea sistemului simetric fundamental se face utilizând ecuaţia de gradul al doilea în z când se cunosc suma $s = x + y$ şi produsul $p = xy$ pentru necunoscutele x, y. Ecuaţia este $z^2 - sz + p = 0$ şi are rădăcinile z_1, z_2. Deci o soluţie a sistemului este $(x_1 = z_1,\ y_1 = z_2)$ şi pentru că sistemul este simetric avem şi soluţia $(x_2 = z_2,\ y_2 = z_1)$.

Exemplu. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 21. \end{cases}$

R. Ecuaţia de gradul doi în z este $z^2 - 10z + 21 = 0$ şi are soluţiile $z_1 = 3,\ z_2 = 7$. Deci sistemul are soluţiile $(3, 7), (7, 3)$.

Pentru rezolvarea unui sistem simetric în x, y se introduc două noi necunoscute $s = x + y$ şi $p = xy$ şi se exprimă ecuaţiile sistemului în funcţie de s şi p. Se rezolvă acest sistem şi apoi cu valorile obţinute pentru s şi p se revine la substituţie şi se rezolvă sisteme simetrice fundamentale. Reuniunea tuturor acestor soluţii reprezintă mulţimea de soluţii a sistemului dat.

În structura ecuaţiei simetrice apar expresii simetrice în x şi y pe care trebuie să le exprimăm în funcţie de s şi p:

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2p,$

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = s(s^2 - 3p),$

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2$, etc.

Exemple. 1) Să se rezolve sistemele simetrice: a) $\begin{cases} 2xy + 5(x + y) = 55 \\ 6xy + 3(x + y) = 81 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{10}{3} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

R. a) Observăm că sistemul este simetric în x, y. Notăm $x + y = s$, $xy = p$ şi sistemul se rescrie în funcţie de noile necunoscute s şi p: $\begin{cases} 2p + 5s = 55 \\ 6p + 3s = 8. \end{cases}$ Soluţia acestui sistem este $s = 7,\ p = 10$. Revenim la substituţie şi rezolvăm sistemul simetric fundamental $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{cases}$. Pentru aceasta formăm ecuaţia de gradul doi în z, $z^2 - 7z + 10 = 0$ cu soluţiile $z_1 = 2,\ z_2 = 5$. Deci soluţiile sistemului simetric fundamental sunt $(2, 5), (5, 2)$. Cum sistemul dat este echivalent cu sistemul simetric fundamental rezultă că $(2, 5), (5, 2)$ reprezintă soluţiile sistemului dat.

b) Se impune condiţia $x \neq 0,\ y \neq 0$ şi se rescriu convenabil ecuaţiile sistemului (punând în evidenţă $s = x+y,\ p = xy$): $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy} = \dfrac{10}{3} \\ \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$. Cu notaţia $x+y=s$ şi $xy=p$ sistemul devine:

$$\begin{cases} \dfrac{s^2-2p}{p} = \dfrac{10}{3} \\ \dfrac{s}{p} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^2-2p = \dfrac{10p}{3} \\ s = \dfrac{2p}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^2 - \dfrac{16p}{3} = 0 \\ s = \dfrac{2p}{3} \end{cases}$$

Acest ultim sistem îl rezolvăm prin metoda substituţiei: $\begin{cases} s = \dfrac{2p}{3} \\ \dfrac{4p^2}{9} - \dfrac{16p}{3} = 0 \end{cases}$.

Ultima ecuaţie are soluţiile $p_1 = 0$ (imposibil deoarece $x, y \neq 0$), $p_2 = 12$.

Pentru $p_2 = 12$ din $s = \dfrac{2p}{3}$ rezultă $s = 8$. Revenim la substituţie şi rezolvăm sistemul simetric fundamental $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=12 \end{cases}$. Găsim soluţiile $(2,6)$, $(6,2)$ care sunt şi ale sistemului dat.

2) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x+y+z=4,\ xy+yz+xz=4$. Să se arate că $x, y, z \in \left[0, \dfrac{8}{3}\right]$.

R. Se scrie sistemul de condiţii sub forma: $\begin{cases} x+y=4-z \\ xy=4-z(y+x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4-z \\ xy=4-4z+z^2. \end{cases}$

Formăm ecuaţia de gradul doi în t cu rădăcinile x, y şi avem: $t^2-(4-z)t+4-4z+z^2=0$. Cum ecuaţia are rădăcinile reale trebuie să impunem cerinţa $\Delta_t \geq 0$, care conduce la $z \in \left[0, \dfrac{8}{3}\right]$. Sistemul este simetric în x, y, z şi deci la fel se ajunge că $x, y \in \left[0, \dfrac{8}{3}\right]$.

4. Sisteme omogene de forma $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$, (1)

Denumirea provine din faptul că membrii stângi ai celor două ecuaţii sunt sume de monoame de acelaşi grad (doi) în x şi y.

Metoda de rezolvare este funcţie de natura termenilor liberi d, d'. Avem cazurile:

1) $d = d' = 0$. Se observă că $x = y = 0$ este o soluţie a sistemului (numită **soluţie banală**). Se caută alte soluţii nenule ale sistemului (cu cel puţin o componentă nenulă). Dacă $x \neq 0$, atunci împărţim prima ecuaţie, de exemplu, prin x^2 şi avem ecuaţia $a + b\dfrac{y}{x} + c\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = 0$, $(*)$. Notăm $\dfrac{y}{x} = t$ şi avem ecuaţia de gradul doi în t, $ct^2+bt+a=0$ care are cel mult două soluţii reale t_1, t_2. Ecuaţia $(*)$ se scrie $c(t-t_1)(t-t_2)=0$ sau $c\left(\dfrac{y}{x}-t_1\right)\left(\dfrac{y}{x}-t_2\right)=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{y}{x}-t_1=0 \text{ sau } \dfrac{y}{x}-t_2=0\right)$.

Deci sistemul (1) este echivalent cu reuniunea sistemelor

$$\left(\begin{cases} \dfrac{y}{x}-t_1=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=0 \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{y}{x}-t_2=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=0 \end{cases} \right).$$

Se rezolvă fiecare sistem şi se reunesc soluţiile lor pentru a obţine mulţimea de soluţii a sistemului dat.

2) $d \neq 0$ sau $d' \neq 0$. Fie $d' \neq 0$, $d = 0$. Observăm că sistemul nu mai are soluţia banală. Pentru prima ecuaţie se procedează ca mai sus, când sistemul va fi echivalent cu reuniunea a două sisteme.

3) $d \neq 0$ şi $d' \neq 0$. Se realizează o combinaţie a celor două ecuaţii astfel încât prin adunarea lor să obţinem termenul liber egal cu zero şi se aplică 2).

Exemplu. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} 3x^2-8xy+4y^2=0 \\ 5x^2-7xy-6y^2=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x^2+xy-2y^2=0 \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x^2-2xy=160 \\ x^2-3xy-2y^2=8. \end{cases}$

R. a) Sistemul are soluţia banală $(0,0)$. Căutăm soluţii (x,y) cu cel puţin o componentă nenulă. Fie $x \neq 0$. Se împart ambii membri ai primei ecuaţii prin x^2 şi obţinem ecuaţia $3-8\left(\frac{y}{x}\right)+4\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$. Notăm $\frac{y}{x}=t$ şi rescriem ecuaţia precedentă în funcţie de t, $4t^2-8t+3=0$. Această ecuaţie are soluţiile $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=\frac{3}{2}$. Sistemul dat este echivalent cu reuniunea sistemelor

$$\left(\begin{cases} \frac{y}{x}=\frac{1}{2} \\ 5x^2-7xy-6y^2=0 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{y}{x}=\frac{3}{2} \\ 5x^2-7xy-6y^2=0 \end{cases} \right).$$

Primul sistem se scrie echivalent $\begin{cases} x=2y \\ 5(2y)^2-7(2y)y-6y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 0\cdot y^2=0 \end{cases}$, ceea ce înseamnă că sistemul are soluţii de forma $(2t,t)$, $t \in \mathbb{R}^*$. Pentru $t=0$ rezultă $x=0, y=0$, adică soluţia banală a sistemului iniţial.

Al doilea sistem se scrie echivalent $\begin{cases} y=\frac{3x}{2} \\ 5x^2-7x\left(\frac{3x}{2}\right)-6\left(\frac{3x}{2}\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3x}{2} \\ x^2=0 \end{cases}$, cu soluţia $x=0$, $y=0$, fals pentru că $x \neq 0$. Deci sistemul are soluţiile de forma $(2t,t), t \in \mathbb{R}$.

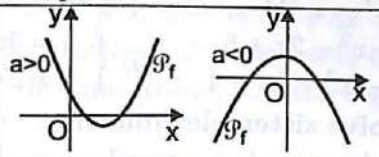
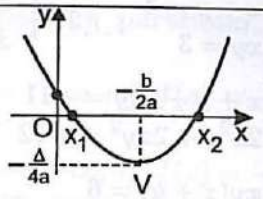
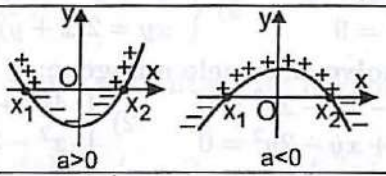
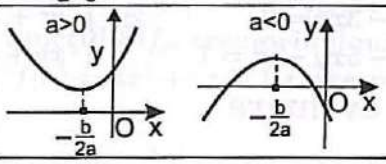
b) Să observăm că $x \neq 0$, căci altfel din $x=0$ şi prima ecuaţie rezultă $y=0$. Dar $x=0$, $y=0$ nu verifică prima ecuaţie. Deci $x \neq 0$ şi se pot împărţi ambii membri ai primei ecuaţii prin x^2. Scriem sistemul echivalent $\begin{cases} 3+\frac{y}{x}-2\left(\frac{y}{x}\right)^2=0 \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{y}{x}-\frac{3}{2}\right)=0 \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\left(\begin{cases} \frac{y}{x}=-1 \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{y}{x}=\frac{3}{2} \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} \right).$$

Primul sistem este incompatibil, iar al doilea sistem are soluţiile $(2,3)$, $(-2,-3)$. Deci sistemul iniţial are soluţiile $(2,3)$, $(-2,-3)$.

c) Se înmulţeşte a doua ecuaţie cu (-20) şi se adună la prima. Întâlnim a doua ecuaţie a sistemului dat în această ecuaţie şi avem sistemul echivalent: $\begin{cases} 3x^2-2xy=160 \\ 17x^2-58xy-40y^2=0 \end{cases}$, care este un sistem de tipul b). Găsim soluţiile: $(8,2)$, $(-8,-2)$, $\left(5,-\frac{17}{2}\right)$, $\left(-5,\frac{17}{2}\right)$.

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noţiunea	Notaţii Caracterizare	Semnificaţii. Interpretarea geometrică
Funcţia de gradul al doilea	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$	Este bine determinată dacă se cunosc a, b, c
Ecuaţia ataşată funcţiei	$ax^2+bx+c=0$	Rădăcinile reale se numesc zerourile funcţiei
Graficul funcţiei de gradul al doilea	Parabola $\mathcal{P}_f$	
Relaţiile lui Viète	$ax^2+bx+c=0$, x_1, x_2 rădăcini, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$	Vârful parabolei $x_V=-\frac{b}{2a}$, $y_V=-\frac{\Delta}{4a}$ 
Semnul funcţiei de gradul al doilea	Semnul lui a şi semnul lui $\Delta=b^2-4ac$ dau semnul funcţiei	
Intervalele de monotonie	$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$, $\left[-\frac{b}{2a},\infty\right)$	

Probleme propuse

1. **Să se expliciteze funcţia $f:A\to\mathbb{R}$, în cazurile:**
   1) $A=[-2,2]$, $f(x)=[x^2]$; 2) $A=[0,3]$, $f(x)=[x^2+1]$;
   3) $A=[1,5]$, $f(x)=[x^2-4x]$; 4) $A=[-2,4]$, $f(x)=[x^2-2x-3]$
2. **Să se expliciteze funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,** în cazurile:
   1) $f(x)=|x^2-9|$; 2) $f(x)=|x^2-3x|$; 3) $f(x)=|x^2-3x+2|$;
   4) $f(x)=|x|+|x^2-16|$; 5) $f(x)=2|x-1|-|x^2-4|$; 6) $f(x)=|x^2-3x|-3|x^2-5x+4|$.
3. Să se traseze graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ plecând de la graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în cazurile:
   1) $g(x)=x^2+1$, $f(x)=|x^2+1|$; 2) $g(x)=x^2-4$, $f(x)=|x^2-4|$;
   3) $g(x)=x^2-3x+2$, $f(x)=|x^2-3x+2|$; 4) $g(x)=-x^2+5x-6$, $f(x)=|-x^2+5x-6|$.
4. **Să se rezolve ecuaţiile:**
   1) $|x^2-3x+1|=1$; 2) $x^2-5|x|+6=0$; 3) $|x-1|+|x^2-1|+|x^2-2x+1|=0$;
   4) $|x-2|+|x^2-4|+|x^2-3x+2|=0$; 5) $|x^2-1|-3|x^2-4x-5|=4$;
   6) $|x|+|x^2-1|-3x=0$; 7) $|x^2-1|-2|x^2-4|+5x^2-1=0$.
5. **Să se rezolve inecuaţiile:**
   1) $10x^2+3|x|-1\le 0$; 2) $|x^2-1|<3$; 3) $|x^2-3|\ge 1$; 4) $x-2|x^2-5x|<x^2+1$;
   5) $(x-1)^2-2|x-1|+1\le 0$; 6) $|x^2-1|-3|x^2-4|>-2$; 7) $\left|\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}\right|\le 1$; 8) $\left|\frac{x^2+4x}{9-x^2}\right|\ge 3$.

6. **I. Să se rezolve sistemele şi să se interpreteze geometric rezultatul:**

1) $\begin{cases} y-x+1=0 \\ y=x^2-2x-1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y=x+1 \\ y=x^2-3x+5 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} y-2x=0 \\ y=x^2+x+3 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} y-x=1 \\ y=x^2-3x+1 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} y-2x+1=0 \\ y=x^2-4x+8 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} y-x+2=0 \\ y=x^2+x+3 \end{cases}$

II. Să se rezolve sistemele şi să se interpreteze geometric rezultatul:

1) $\begin{cases} y=2x^2-4x+3 \\ y=x^2-x+1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y=-x^2+6x+13 \\ y=2x^2+6x-1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} y=3x^2+x+2 \\ y=2x^2+3x+1 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} y=-x^2-2x+5 \\ y=-2x^2+4x-4 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} y=3x^2+4 \\ y=2x^2+3 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} y=x^2+3 \\ y=-x^2+1 \end{cases}$

7. **Să se rezolve sistemele simetrice:**

1) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-10 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x+y+xy=29 \\ xy-2(x+y)=2 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x+y+2xy=-11 \\ 2x^2y+2xy^2=-12 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \\ x+y=5 \end{cases}$; 7) $\begin{cases} x+y=6 \\ x^3+y^3=126 \end{cases}$;

8) $\begin{cases} xy(x+y)=6 \\ x^3+y^3=9 \end{cases}$; 9) $\begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2 \\ xy=2(x+y) \end{cases}$.

8. **Să se rezolve sistemele omogene:**

1) $\begin{cases} 3x^2-xy-2y^2=0 \\ 6x^2+xy-2y^2=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 4x^2+xy+5y^2=0 \\ x^2-3xy+2y^2=0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x^2+xy-5y^2=0 \\ 4x^2-9y^2=0 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 2x^2-3xy=0 \\ 4x^2-5xy-y^2=1 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x^2+3xy=18 \\ xy+4y^2=7 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x^2+xy=10 \\ y^2+xy=15 \end{cases}$;

Teste de evaluare

Testul 1.

1. **a) Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$, $g(x)=-x^2+4x-3$. Determinaţi punctele de intersecţie ale graficelor funcţiilor cu axele de coordonate, punctele de extrem, axele de simetrie şi intervalele de monotonie pentru aceste funcţii. Construiţi graficul lui g din graficul lui f prin simetrizare.**

b) Două parabole, cu vârfurile $V_1(1,\alpha)$, $V_2(1,\beta)$, se intersectează în punctul $A(3,4)$. Determinaţi coordonatele celui de al doilea punct de intersecţie al parabolelor.

2. **a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to[m,\infty)$, $f(x)=x^2-4x+3$ are proprietatea Im $f=[-1,\infty)$.**

b) Să se determine cel mai mare $n\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $f:(-\infty,n]\to[-1,\infty)$, $f(x)=x^2-4x+3$ are proprietatea $\forall x_1,x_2\in(-\infty,n]$, $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

Trasaţi graficele funcţiilor de la a) şi b).

3. **a) Să se determine parametrul real m pentru care $x^2+y^2-4x+6y+m\geq 0$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.**

b) Fie $f_m(x)=\dfrac{(m-2)x^2+2mx+m+1}{x^2+mx+1}$, $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât $f_m(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Să se determine extremele funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$.

4. **a) Să se determine valorile parametrului real m, pentru care ecuaţia $mx^2-(m^2-m+1)x+m-1=0$ are două rădăcini reale distincte în [0,1].**

b) Fie $m\in\mathbb{R}$ şi x_1,x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2+mx+m-4=0$. Atunci mulţimea soluţiilor

inecuaţiei $x_1 f(x_2 - m) + x_2 f(x_1 - m) \geq 0$ este: a) [0,4]; b) $[-1,1]$; c) $(-1,1)$; d) $\emptyset$; e) (0,1).

5. a) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 + 5xy = 15 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$.

b) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$, sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x - 2y + z = 2a \\ 3(xy + yz + zx) = 3a - 4 \end{cases}$ are soluţie unică.

Testul 2.

1. a) Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = x^2 + 4x + 3$. Precizaţi, pentru fiecare din funcţie, punctele de intersecţie ale graficelor lor cu axele de coordonate, punctele de extrem, axele de simetrie şi intervalele de monotonie. Construiţi graficul lui g din graficul lui f prin simetrizare.

b) Fie parabola $\mathcal{P}$ având axa de simetrie $x = 2$. Dacă $A(6,5)$ aparţine parabolei, atunci determinaţi punctul $A'(m,5)$ de pe parabolă.

2. a) Să se determine parametrul real m, pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to (-\infty, m]$, $f(x) = -x^2 + 4x$ are proprietatea Im $f = (-\infty, 4]$.

b) Să se determine cel mai mic $n \in \mathbb{R}$, pentru care funcţia $f : [n, \infty) \to (-\infty, 4]$, $f(x) = -x^2 + 4x$ are proprietatea $\forall x_1, x_2 \in [n, \infty)$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Trasaţi graficele funcţiilor de la a) şi b).

c) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x$. Notăm cu S aria delimitată de parabolă şi axa Ox. Arătaţi că: $8 < S < 16$.

3. a) Se consideră familia de funcţii de gradul al doilea $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 + (1 - 3m)x + 2m - 3$, $m \neq 0$. Arătaţi că parabolele asociate funcţiilor f_m trec prin două puncte fixe. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + 1$ trece prin cele două puncte de mai sus.

b) Să se determine parametrul real m, pentru care ecuaţiile $x^2 + x + m = 0$ şi $mx^2 + x + 1 = 0$ au o rădăcină comună.

c) Mulţimea valorilor lui m pentru care $mx^2 + 4(m-1)|x| + m - 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este:

a) (0,1); b) $(1, \infty)$; c) $\emptyset$; d) (1,2); e) $(-\infty, 1)$.

4. a) Fie ecuaţia $x^2 + mx + m + 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Mulţimea de valori ale lui m pentru care ecuaţia are rădăcini reale x_1, x_2 cu $x_1 < 1 < x_2$ este: a) $(1, \infty)$; b) (0,1); c) $\emptyset$; d) $(-\infty, -1)$; e) $\mathbb{R}$.

b) Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 3x + 1 = 0$. Atunci $\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$ este: a) număr raţional; b) $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$; d) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; e) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

c) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 1$, $m \neq 0$. Mulţimea de valori ale lui m pentru care f păstrează semn constant pe (1,2) este: a) $\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \cup (0, \infty)$; b) $\emptyset$; c) $(-\infty, -3)$; d) $\mathbb{R}$; e) $(-1, 0)$.

5. a) Fie sistemul $\begin{cases} x + y = a + 1 \\ x^2 + 2ay - 2a^2 + a - 2 = 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine a, astfel încât sistemul să admită o soluţie unică. Pentru $a = 1$, determinaţi soluţiile sistemului şi interpretaţi geometric rezultatul.

b) Să se rezolve inecuaţia $\left| \frac{2x^2 - x}{x^2 + x + 1} \right| < 2$.

Probleme suplimentare

1. **Fie** $f_k(x) = a_k x^2 + b_k x + c_k$, $k = 1,2,3$ **şi** $a_1 > a_2 > a_3$. **Arătaţi că dacă oricare din cele două parabole se taie exact într-un punct, atunci toate parabolele au un punct în comun** $\left(f_1(x) - f_2(x) = (a_1 - a_2)(x - x_{12})^2\right)$.

2. **Să se determine valarea maximă a expresiei:** $E(x,y) = 3x^2 - 8xy + 2y^2$, **dacă** $y - x = 1$.

3. **1) Dacă** $a \neq 0$ **şi** $4a^2 - 9ab - 9b^2 = 0$, **atunci să se calculeze** $\frac{b}{a}$.

2) Dacă $\frac{xy}{x^2 + 6y^2} = \frac{1}{5}$, **atunci** $\frac{xy}{x^2 - 6y^2} \in \{\pm 1\}$.

4. **Să se determine cel mai mare termen al şirului** (a_n) **cu termenul general** $a_n = \frac{n^2}{1,001^n}$. $(a_{k-1} \leq a_k \geq a_{k+1},\ k = 2001)$.

5. **Arătaţi că parabola cu vârful** V **conţine punctul** A **dacă şi numai dacă parabola cu vârful** $s(A)$ **conţine punctul** $s(V)$, **unde** $s(A)$ **este simetricul lui** A **în raport cu** Ox **(dacă** $V(u.v)$, **atunci** $y = (x-u)^2 + v$).

6. **1) Dacă** $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a,b,c \in \mathbb{Z}$ **şi** $f(k)$ **se divide prin 5, pentru orice** $k \in \mathbb{Z}$, **atunci** a, b, c **se divid prin 5.**

2) Dacă $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a,b,c \in \mathbb{Z}$, **iar** $k,l \in \mathbb{Z}$, **atunci** $f(k) - f(l)$ **se divid prin** $k - l$. **Arătaţi că dacă** $k,l,m \in \mathbb{Z}$ **astfel încât** $f(k) = l$, $f(l) = m$, $f(m) = k$, **atunci** $k = l = m$.

7. **Rădăcinile ecuaţiei** $x^2 + ax + 1 - b = 0$ **sunt întregi, nenule. Arătaţi că numărul** $a^2 + b^2$ **este neprim.**

8. **Să se arate că nu există** $a,b,c \geq 0$ **astfel încât parabolele** $y = ax^2 + bx + c$, $y = cx^2 + ax + b$, $y = bx^2 + cx + a$ **să taie simultan axa** Ox $(\Delta_1\Delta_2\Delta_3 > 0 \Rightarrow$ fals.)

9. **Dacă asupra uneia din parabolele date se efectuează una din transformările** $f(x) \to x^2 f\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ **sau** $f(x) = (x-1)^2 f\left(\frac{1}{x} - 1\right)$, **atunci din** $f(x) = x^2 + 2x - 5$ **nu se poate ajunge la** $g(x) = x^2 + 4x - 10$ $(\Delta =$constant).

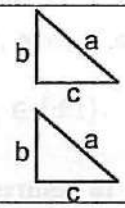
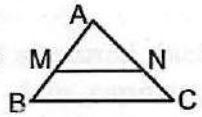
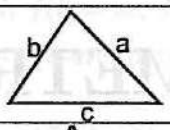
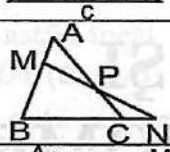
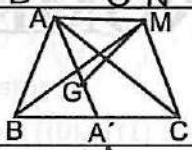
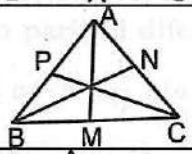
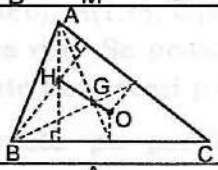
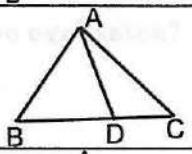
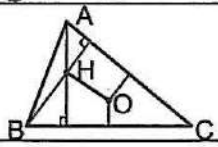
10. **Dacă** $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a,b.c \in \mathbb{Z}$ **şi** $f(0)$, $f(1)$ **sunt impare, atunci** $f(x) = 0$ **nu are rădăcini întregi** $(f(x) = (x - \alpha)\,g(x) \Rightarrow -\alpha$, $1 - \alpha$ **parităţi diferite).**

11. **Dacă** $a^2 + b^2 = \frac{a+b}{2}$, **atunci** $-\frac{1}{2} \leq a - b \leq \frac{1}{2}$ $\left((a-b)^2 = (a+b) - (a+b)^2 = t - t^2 \leq \frac{1}{4}\right)$.

12. **În reperul** xOy **se iau puctele** $O(0,0)$, $A(1,0)$, $C(0,1)$. **Este permisă simetrizarea oricărui punct** O, A, C **faţă de oricare dintre ele. Se poate obţine punctul** $(5,15)$ **?** $(x' = 2a - x$, $y' = 2b - x$, **rezultă** X', X **au coordonate de aceeaşi paritate.)**

13. **Fie** $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ **puncte pe parabola** $y = x^2$. **Dacă** $m(\widehat{BAC}) = 90°$, **atunci** $|b - c| \geq 2$ $(m_{AB} \cdot m_{AC} = -1)$. **Când are loc egalitatea?**

GEOMETRIE
ŞI
TRIGONOMETRIE

Perioada	Nume	Rezultate importante
sec VI înainte de Hristos	Pitagora	 Teorema lui Pitagora $a^2 = b^2 + c^2$
sec IV î.H.	Thales	$MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ 
sec IV î.H.	Euclid	Al cincilea Postulat Realizează o bună axiomatizare a geometriei în lucrarea „Elementele“
Era nouă, după Hristos		
sec I A.D.	Heron	 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$
sec I-II A.D.	Menelaos	 Teorema lui Menelaos M, N, P coliniare $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$
sec XVII A.D.	Leibniz (1646-1716)	 Relaţia lui Leibniz $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$
sec XVII-XVIII A.D.	Ceva G. (1647-1734)	 Teorema lui Ceva $AM \cap BN \cap CP \neq \emptyset \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$
sec XVIII A.D.	Euler (1707-1783)	 H, G, O coliniare, dreapta lui Euler
sec XVIII A.D.	Stewart (1717-1785)	 Relaţia lui Stewart $AB^2 \cdot CD - AD^2 \cdot BC + AC^2 \cdot BD = BD \cdot DC \cdot BC$
sec XIX A.D.	Sylvester (1814-1897)	 Relaţiile lui Sylvester $\vec{r}_H = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$ $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

1. VECTORI ÎN PLAN

Mărimile întâlnite în fizică, în geometrie, în ştiinţele tehnice sunt de mai multe feluri. Printre acestea sunt deosebit de importante mărimile scalare şi cele vectoriale.

Definiţie. O mărime este **scalară**, dacă pentru determinarea ei este suficient să indicăm un singur număr.

Exemple: Lungimea unui segment, aria unei suprafeţe, temperatura, căldura specifică, etc.

Definiţie. O mărime este **vectorială** dacă ea este determinată de următoarele trei elemente: **mărime** (lungime), **direcţie** şi **sens**.

Exemple: Deplasarea rectilinie a unui punct, viteza, forţa, câmpul electric, etc.
În cele ce urmează vom defini cele trei elemente care caracterizează o mărime vectorială.

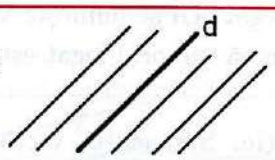
1.1. VECTORI ÎN PLAN

Vom desemna prin $\mathcal{P}$ mulţimea punctelor unui plan. Segmentele, semidreptele, dreptele le considerăm submulţimi ale acestui plan.

Direcţia unei drepte

Fie d o dreaptă a planului $\mathcal{P}$.

Definiţie. Se numeşte **direcţie a dreptei** d mulţimea formată din dreapta d şi toate dreptele paralele cu d.

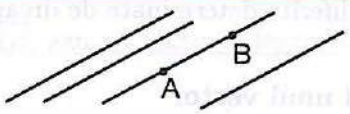


Deci două drepte d_1, d_2 **au aceeaşi direcţie** dacă sunt paralele sau coincid.

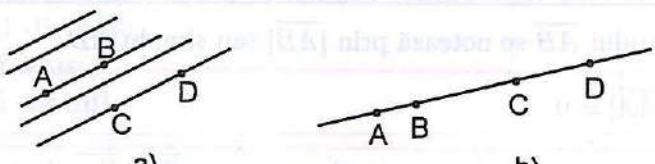
Direcţia unui segment

Fie $[AB]$ un segment. Dreapta AB pe care este situat segmentul $[AB]$ se numeşte **dreapta suport** a segmentului.

Definiţie. Se numeşte **direcţia segmentului** $[AB]$, $A \neq B$, direcţia dreptei AB.



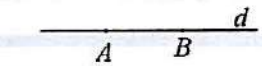
Spunem deci că două segmente $[AB]$, $[CD]$ au aceeaşi direcţie dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid (fig. 1 a)-b)).



Segmentele $[AB]$, $[CD]$ au aceeaşi direcţie
Fig.1.

Sensurile unei direcţii

Prin direcţia unei drepte d am înţeles mulţimea formată din d şi toate dreptele paralele cu d.
Fie dreapta d pe care am fixat două puncte A, B ($A \neq B$).
Atunci punctele dreptei d pot fi parcurse de la A spre B (un sens de parcurgere) sau de la B înspre A (alt sens de parcurgere, opus primului).
Prin acest procedeu spunem că am definit două sensuri pe dreapta d, numite **sensurile dreptei**.



Definiţie. Fie d o dreaptă în planul $\mathcal{P}$. Se numesc **sensurile direcţiei dreptei** d, sensurile dreptei d.

Prin urmare sensurile unei direcţii coincid cu sensurile pe care le-am fixat pentru o dreaptă din direcţie.

Sensul unui segment. Segment orientat

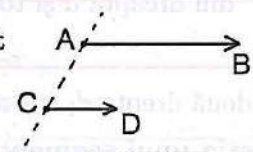
Parcurgerea unui segment $[AB]$ se poate face de la A spre B sau de la B spre A. Spunem că pe segmentul $[AB]$ avem definite două sensuri (opuse).

Definiţie. O pereche ordonată (A, B), $A, B \in \mathcal{P}$ se numeşte **segment orientat** sau **vector legat** (de A) şi se notează prin $\overrightarrow{AB}$, unde A este **originea** (sau **punctul de aplicaţie**), iar B este **extremitatea** segmentului orientat.

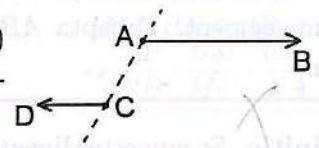
Reprezentarea grafică a segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$ este:

Deci segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ este segmentul pe care am precizat sensul de la A spre B (de la originea A la extremitatea B).
Vectorul legat $\overrightarrow{AA}$ se numeşte **vectorul legat nul**, având dreapta suport nedeterminată.
Să reţinem că vectorul legat este acel vector la care punctul de aplicaţie este fix.

Definiţie. Spunem că vectorii legaţi $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ au **acelaşi sens** (sau sunt la fel orientaţi) dacă au aceeaşi direcţie, iar extremităţile lor B, D se află în acelaşi semiplan faţă de dreapta AC, determinată de originile lor.



Vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ au **sensuri opuse** (sau sunt orientaţi diferit) dacă au aceeaşi direcţie, iar extremităţile lor B, D se află în semiplane diferite determinate de dreapta AC.



Modulul unui vector

Definiţie. Se numeşte **modulul** sau **lungimea** (sau **norma**) vectorului $\overrightarrow{AB}$, lungimea segmentului $[AB]$ (în raport cu o scară numerică).

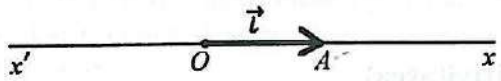
Notatie. Modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ se notează prin $|\overrightarrow{AB}|$ sau simplu AB.

Pentru vectorul nul $\overrightarrow{AA}$, $|\overrightarrow{AA}| = 0$.

Definiţie. Se numeşte **versor** sau **vector unitate** (sau unitar) vectorul de lungime egală cu 1.

Versorul unei axe

Să considerăm o dreaptă $x'x$ pe care am fixat punctul O (originea).



În origine ca punct de aplicaţie, se consideră un versor situat pe dreaptă. Îl notăm cu $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $|\vec{i}| = 1$ şi reprezintă versorul dreptei. Prin fixarea versorului pe o dreaptă aceasta devine orientată, adică devine axă, deoarece versorul precizează sensul de parcurgere pozitiv pe dreapta $x'x$ şi mărimea versorului este unitatea de măsură a lungimilor pe această dreaptă.

Egalitatea a doi vectori legaţi

Definiţie. Doi vectori legaţi $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt **egali** şi scriem

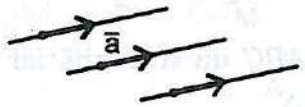
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} A = C \text{ (originile coincid)} \\ \text{şi} \\ B = D \text{(extremităţile coincid)} \end{cases}$$

Vectori liberi

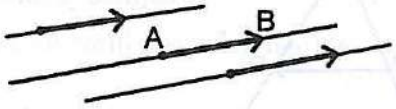
Un vector este liber dacă punctul său de aplicaţie (originea) poate fi luat în mod arbitrar în plan. Mai precis are loc următoarea:

Definiţie. Un **vector liber** este mulţimea tuturor vectorilor legaţi care au:
- **aceeaşi direcţie;**
- **acelaşi sens;**
- **acelaşi modul.**

Notaţie. Se notează vectorii liberi prin litere mici cu bară: $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$,



sau dacă $\overrightarrow{AB}$ este un vector legat, atunci $\overline{AB}$ reprezintă toţi vectorii legaţi care au **aceeaşi direcţie, acelaşi sens** şi **acelaşi modul** cu $\overrightarrow{AB}$, inclusiv $\overrightarrow{AB}$.



Vom nota mulţimea vectorilor liberi din planul $\mathcal{P}$ prin $\mathcal{V}$.

Se spune că vectorul liber $\overline{AB}$ este determinat de vectorul legat $\overrightarrow{AB}$, sau că vectorul legat $\overrightarrow{AB}$ este un **reprezentant** al vectorului liber $\overline{AB}$ şi scriem $\overrightarrow{AB} \in \overline{AB}$.

Vectori legaţi echipolenţi

Definiţie. Doi vectori legaţi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ se numesc **echipolenţi** dacă au:
1) **aceeaşi direcţie,**
2) **acelaşi sens;**
3) **acelaşi modul.**

Notaţie. Dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sunt echipolenţi, atunci notăm acest fapt prin $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ (citim: vectorul $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu vectorul $\overrightarrow{CD}$).

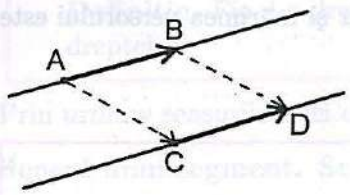
Proprietăţi ale relaţiei de echipolenţă

1) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ (**reflexivitatea**);

2) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ (**simetria**);

3) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ (**tranzitivitatea**).

O relaţie care are proprietăţile 1), 2), 3) se numeşte **relaţie de echivalenţă**. Deci, relaţia de echipolenţă „$\sim$" este o relaţie de echivalenţă.



Se verifică uşor că $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ dacă şi numai dacă:

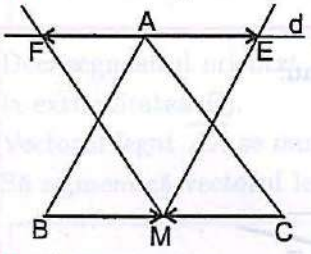
1) $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$ ($\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ au aceeaşi direcţie pentru că $ABCD$ este paralelogram şi deci $AC \parallel BD$; au acelaşi sens – extremităţile sunt situate în acelaşi semiplan în raport cu dreapta determinată de originile lor; au acelaşi modul $AC = BD$).

2) $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{BC}$ au acelaşi mijloc.

Observaţie. Atunci când în probleme intervin vectori liberi vom lucra cu reprezentanţi ai acestora, ceea ce permite să luăm originile acestor reprezentanţi oriunde în plan (de aici şi denumirea de vector liber). Dacă $A = B$, atunci $\overrightarrow{AA}$ se numeşte **vectorul nul**, notat $\overline{0}$, de modul 0, direcţie şi sens arbitrar.

Probleme rezolvate

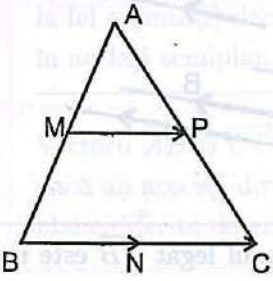
1. Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC. Să se determine punctele E şi F, astfel încât $\overrightarrow{AE} \sim \overrightarrow{BM}$ şi $\overrightarrow{AF} \sim \overrightarrow{CM}$.



R. Ducem prin A paralela d la BC, iar prin M paralele la AB şi respectiv AC, care taie pe d în E şi respectiv F.

Patrulaterele $BMEA$ şi $MCAF$ sunt paralelograme. Avem $\overrightarrow{AE} \sim \overrightarrow{BM}$ şi $\overrightarrow{AF} \sim \overrightarrow{CM}$. Mai mult, din $\overrightarrow{BM} \sim \overrightarrow{MC}$ avem $\overrightarrow{BM} \sim \overrightarrow{FA} \sim \overrightarrow{AE}$, deci A este mijlocul segmentului $[FE]$.

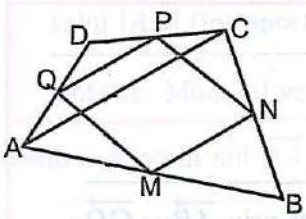
2. Fie ABC un triunghi, iar M, N şi P mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ şi respectiv $[CA]$. Să se arate că $\overrightarrow{MP} \sim \overrightarrow{BN} \sim \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{AP} \sim \overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PN} \sim \overrightarrow{AM} \sim \overrightarrow{MB}$.



R. Cum MP este linie mijlocie în triunghi, atunci se ştie că $MP \| BC$ şi $MP = \frac{BC}{2}$. Deci $MP \| BN$, $MP = BN = NC$ şi vectorii $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{NC}$ au acelaşi sens.

Deci $\overrightarrow{MP} \sim \overrightarrow{BN} \sim \overrightarrow{NC}$. Analog se arată şi celelalte relaţii.

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex, iar M, N, P, Q mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ şi respectiv $[DA]$. Arătaţi că $\overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{QP}$ şi $\overrightarrow{QM} \sim \overrightarrow{PN}$.



R. Ducem diagonala $[AC]$ a patrulaterului. În triunghiurile ABC şi ADC, $[MN]$ şi respectiv $[QP]$ sunt linii mijlocii. Deci $MN \| AC \| QP$ şi $MN = \frac{1}{2}AC = QP$. Deci patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram. Segmentele orientate $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{QP}$ au aceeaşi direcţie ($MN \| PQ$), acelaşi sens şi acelaşi modul ($MN = PQ$).

Deci $\overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{QP}$. Din $QM \| PN$, $QM = PN$, rezultă $\overrightarrow{QM} \sim \overrightarrow{PN}$.

Egalitatea a doi vectori liberi

Definiţii. 1) Doi vectori liberi **sunt egali** dacă au:
- **aceeaşi direcţie** (adică pot fi situaţi pe aceeaşi dreaptă suport sau drepte suport paralele);
- **acelaşi sens;**
- **acelaşi modul.**

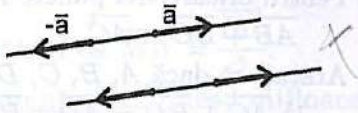
---

2) Doi vectori se numesc **ortogonali** dacă au direcţiile perpendiculare.

---

3) Doi vectori care au **aceeaşi direcţie** şi **acelaşi modul**, dar **sensuri opuse** se numesc **vectori opuşi**. Dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$ sunt vectori opuşi, atunci scriem $\bar{b} = -\bar{a}$.

Pentru $\overline{AB}$ şi $\overline{BA}$ avem $\overline{BA} = -\overline{AB}$.



1.2. OPERAŢII ELEMENTARE CU VECTORI

Adunarea vectorilor

Suma a doi sau mai mulţi vectori este tot un vector, care se obţine printr-o construcţie geometrică efectuată asupra celor doi vectori.

1) Adunarea a doi vectori după regula paralelogramului

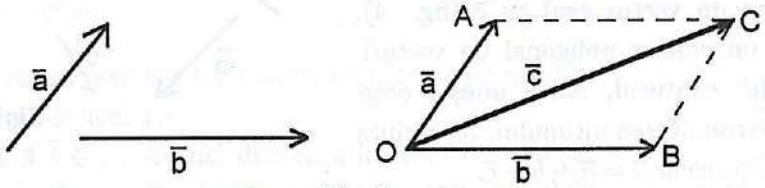


Fig. 2

Fie vectorii liberi $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{V}$ şi $\overrightarrow{OA} \in \bar{a}$, $\overrightarrow{OB} \in \bar{b}$. Construim paralelogramul de laturi OA, OB (fig. 2), $OBCA$. Vectorul $\bar{c}$ de reprezentant $\overrightarrow{OC}$ (care porneşte din originea comună) reprezintă prin definiţie **suma** vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi scriem $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.

Regula prin care am obţinut vectorul sumă se numeşte **regula paralelogramului.**

Observaţii. 1) Se arată uşor că definiţia sumei este **corectă**, adică vectorul $\bar{c}$ nu depinde de alegerea punctului O.

2) Fie triunghiul ABC. Construiţi punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ şi apoi arătaţi coliniaritatea tripletelor de puncte (P, A, N), (P, B, M), (M, C, N). Care este poziţia punctelor A, B, C pe segmentele $[PN]$, $[PM]$ şi respectiv $[MN]$?

2) Adunarea a doi vectori după regula triunghiului

Se poate ajunge la acelaşi rezultat, utilizând o construcţie echivalentă din punct de vedere geometric.

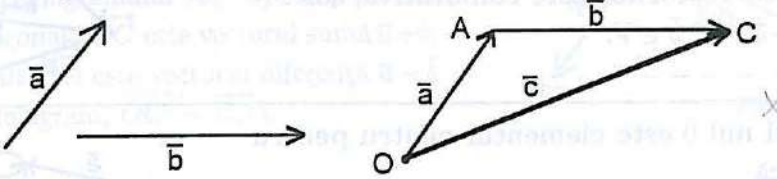


Fig. 3

Fie, ca mai sus, vectorii liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$ (fig. 3). Considerăm $\overrightarrow{OA} \in \bar{a}$, $\overrightarrow{AC} \in \bar{b}$, reprezentanţi ai vectorilor $\bar{a}$ şi respectiv $\bar{b}$. Atunci vectorul sumă a vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ este vectorul $\bar{c}$ de reprezentant $\overrightarrow{OC}$.

Această regulă de adunare a doi vectori se numeşte **regula triunghiului.**
Este uşor de văzut că vectorul sumă $\overline{c}$ este vectorul care „închide" conturul format de vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, având originea în originea unuia dintre vectori şi extremitatea în extremitatea celuilalt vector.
Este evident că triunghiul construit prin metoda a doua este jumătatea paralelogramului construit prin metoda întâi.

Observaţii. 1) Dacă $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$ atunci cu vectorii $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ se poate forma un triunghi. În plus, $|\overline{a}+\overline{b}|\leq|\overline{a}|+|\overline{b}|$, cu egalitate dacă amândoi vectorii au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens sau cel puţin unul dinte ei este vectorul nul.

2) Pentru oricare trei puncte A, B, C din plan avem **relaţia lui Chasles:**
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

3) Arătaţi că dacă A, B, C, D sunt patru puncte din plan, atunci:
1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

4) Fie ABC un triunghi şi D simetricul lui B faţă de C, E simetricul lui C faţă de A şi F simetricul lui A faţă de B. Arătaţi că $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{0}$.

3) Metoda pentru adunarea a n vectori (regula poligonului)
Dacă avem de adunat trei (sau mai mulţi vectori) liberi $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$,... aplicăm succesiv regula triunghiului.
Prin extremitatea lui $\overline{a}$ ducem un vector egal cu $\overline{b}$, prin extremitatea lui $\overline{b}$ ducem un vector egal cu $\overline{c}$ (fig. 4). În acest fel s-a format un contur poligonal de vectori. Vectorul $\overline{s}$ care „închide" conturul, adică uneşte originea primului vector cu extremitatea ultimului, reprezintă suma vectorilor daţi, adică avem $\overline{s}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$.

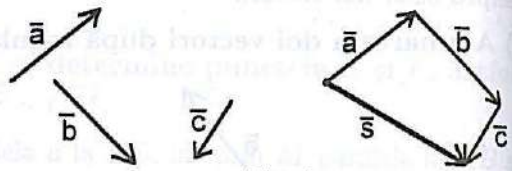


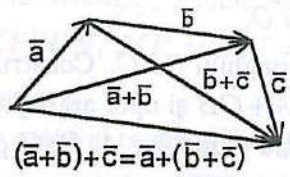
Fig. 4

Regula de obţinere a sumei a mai multor vectori se numeşte **regula poligonului.**

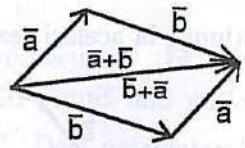
Observaţie. Dacă conturul de vectori se închide, astfel încât extremitatea unuia să coincidă cu originea următorului vector, atunci suma vectorilor reprezintă vectorul nul.

Proprietăţi ale adunării vectorilor liberi în plan

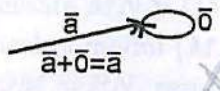
A_1. Adunarea vectorilor este asociativă, adică
$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$, $\forall\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in\mathcal{V}$.



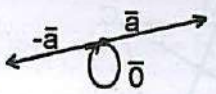
A_2. Adunarea vectorilor este comutativă, adică
$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$, $\forall\overline{a},\overline{b}\in\mathcal{V}$.



A_3. Vectorul nul $\overline{0}$ este elementul neutru pentru adunare, adică
$\overline{0}+\overline{a}=\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$, $\forall\overline{a}\in\mathcal{V}$.



A_4. Pentru orice vector $\overline{a} \in \mathcal{V}$, există $(-\overline{a}) \in \mathcal{V}$ pentru care
$\overline{a} + (-\overline{a}) = (-\overline{a}) + \overline{a} = \overline{0}$.
$-\overline{a}$ se numeşte opusul vectorului $\overline{a}$.



Demonstraţiile acestor proprietăţi se realizează uşor urmărind desenele alăturate.

Următoarele probleme utilizează, pentru rezolvrea lor, regula poligonului.

Probleme propuse

1. **Fie triunghiul ABCşi M, N mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$. Arătaţi că $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$.**

2. **Arătaţi că se poate construi un triunghi, care are ca laturi segmentele ce unesc mijloacele laturilor opuse ale unui hexagon convex.**

3. **Dacă $ABCD$ este un patrulater convex, iar E, F sunt mijloacele diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$, atunci: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{EF}$ şi $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{EF}$. Arătaţi că dacă în acest patrulater $3\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$, atunci patrulaterul este paralelogram.**

4. **Fie paralelogramele $ABCD$ şi $MNPQ$ de centre O şi O_1. Să se arate că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DQ} = 4\overrightarrow{OO_1}$.**

Scăderea vectorilor

1) Scăderea a doi vectori este tot un vector, care se poate obţine prin una din metodele de mai jos:

Metoda întâi. Fie $\overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{V}$. Atunci diferenţa lor este vectorul $\overline{x}$ definit prin $\overline{x} = \overline{a} - \overline{b}$. De aici $\overline{x} + \overline{b} = \overline{a}$, care spune că vectorul $\overline{x}$ adunat cu vectorul $\overline{b}$ dă vectorul $\overline{a}$ (fig. 5). Deci:

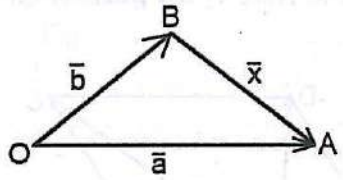


Fig. 5

Vectorul diferenţă $\overline{x}$ se construieşte unind extremitatea vectorului scăzător cu extremitatea vectorului descăzut.

În multe probleme suntem nevoiţi să exprimăm vectorul $\overrightarrow{BA}$ (fig. 5) în funcţie de vectorii legaţi $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OA}$, ai originii şi extremităţii vectorului $\overrightarrow{BA}$. Avem:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

2) **Metoda a doua.** Diferenţa vectorilor $\overline{a} - \overline{b}$ se poate transforma în sumă scriind-o sub forma $\overline{a} + (-\overline{b})$ şi aplicând regula paralelogramului (fig. 6). În paralelogramul $OACB$, diagonala $\overrightarrow{OC}$ este vectorul sumă $\overline{a} + \overline{b}$, iar cealaltă diagonală $\overrightarrow{BA}$ este vectorul diferenţă $\overline{a} - \overline{b}$ ($OC'AB$ este paralelogram, $\overrightarrow{OC'} \sim \overrightarrow{BA}$).

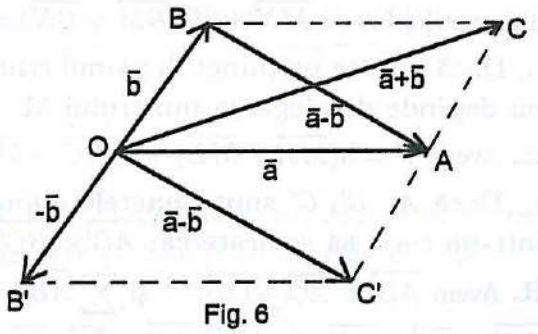
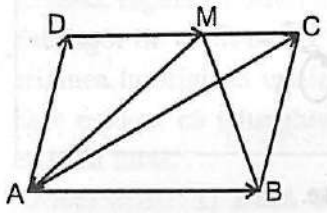


Fig. 6

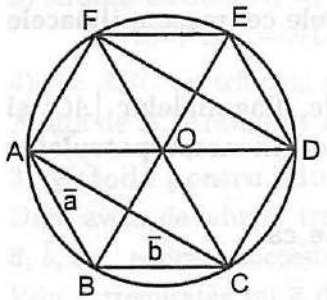
Probleme rezolvate

1. **Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi $M \in [CD]$. Calculaţi sumele:**
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DM}$; c) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BM}$; d) $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.



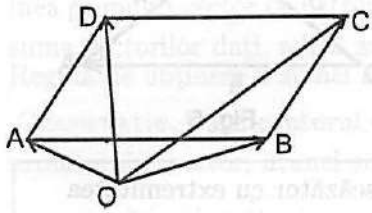
R. Utilizând regula paralelogramului sau regula triunghiului, găsim:
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (regula paralelogramului);
b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA}$ (comutativitatea adunării vectorilor) $=\overrightarrow{DA}$ (regula triunghiului);
c) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}$ $(\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{CM}$ (regula triunghiului);
d) $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AC}$ (regula paralelogramului) $=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$ (comutativitatea adunării vectorilor) $=\overrightarrow{AM}$ (regula triunghiului).

2. **Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$, în care $\overrightarrow{AB}=\bar{a}$, $\overrightarrow{BC}=\bar{b}$. Calculaţi, în funcţie de $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, vectorii: $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{DF}$.**



R. Fie O centrul cercului circumscris hexagonului regulat. S-au format triunghiurile echilaterale $AOB, BOC, \ldots, AOF$ şi paralelogramele $ABCO, BCDO, \ldots, EFAO$. Acum avem: $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BO}=-\bar{a}+\bar{b}$;
$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BA}=-\bar{a}$; $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}=-\bar{b}$;
$\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{BO}=-(-\bar{a}+\bar{b})$;
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\bar{a}+\bar{b}$;
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BC}$ (notaţie pentru $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}$);
$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BA}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{BA}=-\bar{a}+\bar{b}-\bar{a}=-2\bar{a}+\bar{b}$ (am notat $-\bar{a}-\bar{a}=-2\bar{a}$).
$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{CA}$ ($ACDF$ este dreptunghi)$=-\overrightarrow{AC}=-(\bar{a}+\bar{b})$.

3. **Fie $ABCD$ un paralelogram, iar O un punct în planul lui. Arătaţi că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.**



R. Exprimăm vectorii din membrul stâng al egalităţii utilizând regula triunghiului şi avem: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$.
Adunăm aceste egalităţi şi avem:
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}=$
$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$, deoarece $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$.
Observaţie. Vom vedea că această relaţie este caracteristică paralelogramului.

4. **Dacă A, B sunt două puncte fixe în plan să se arate că există un singur punct M astfel încât $\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$.**

R. Presupunem că există şi punctul N astfel încât $\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}$. Se scade această relaţie din cea din enunţ şi avem $\overrightarrow{MN}+2(-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN})=\vec{0}$, sau $\overrightarrow{MN}-2\overrightarrow{NM}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\vec{0}\Rightarrow M=N$.

5. **Dacă M este un punct în planul triunghiului ABC, atunci vectorul $\vec{v}=3\overrightarrow{MA}-8\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}$, nu depinde de alegerea punctului M.**

R. Avem $\vec{v}=3(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})+5(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=3\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{BC}$, care nu depinde de M.

6. **Dacă A', B', C' sunt punctele diametral opuse vârfurilor A, B, C ale triunghiului înscris într-un cerc, să se arate că: $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}$.**

R. Avem $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$, ... şi $\sum\overrightarrow{AB'}=\sum(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB'})=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$, (1). Analog,
$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC'},\ldots\Rightarrow\sum\overrightarrow{AC'}=\sum(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC'})=\sum\overrightarrow{AA'}$, (2). Din (1) şi (2) rezultă egalitatea dorită.

Înmulţirea unui vector cu un scalar

Am văzut mai sus că suma mai multor vectori liberi este tot un vector liber, care este bine precizat dacă cunoaştem: direcţia, sensul şi modulul.

De asemenea produsul dintre un număr real α şi un vector liber $\bar{a}$ este tot un vector liber, notat $\alpha\bar{a}$, ale cărui elemente definitorii sunt precizate de următoarea:

Definiţie. Fie $\alpha \neq 0$, $\bar{a} \in \mathcal{V}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$. Produsul dintre numărul real α şi vectorul liber $\bar{a}$ este vectorul notat $\alpha\bar{a}$ având:
- **aceeaşi direcţie** cu $\bar{a}$;
- **acelaşi sens** cu $\bar{a}$ dacă $\alpha > 0$; **sens contrar** lui $\bar{a}$ dacă $\alpha < 0$;
- **modulul** egal cu produsul dintre $|\alpha|$ şi modulul vectorului $\bar{a}$, adică $|\alpha\bar{a}| = |\alpha|\,|\bar{a}|$.

Dacă $\alpha = 0$ sau $\bar{a} = \bar{0}$, atunci $\alpha\bar{a} = \bar{0}$.

Dacă se dă vectorul $\bar{a}$, atunci în fig. 7 avem reprezentaţi vectorii $\frac{1}{2}\bar{a}$, $-2\bar{a}$, $3\bar{a}$.

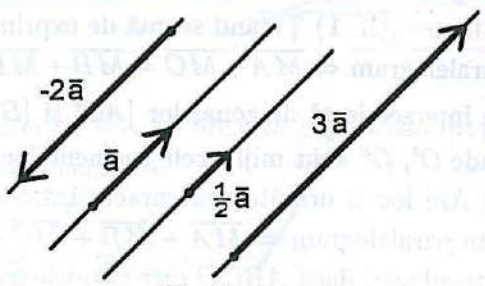


Fig. 7

Proprietăţi ale înmulţirii unui vector cu un scalar

I_1) $\alpha(\bar{a}+\bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{V}$
(Înmulţirea cu scalari este distributivă faţă de adunarea vectorilor)

I_2) $(\alpha+\beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \bar{a} \in \mathcal{V}$
(Înmulţirea cu scalari este distributivă faţă de adunarea scalarilor).

I_3) $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \bar{a} \in \mathcal{V}$
(Asociativitatea înmulţirii scalarilor).

I_4) $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$, $\forall \bar{a} \in \mathcal{V}$
(Numărul 1 este element neutru pentru înmulţirea vectorilor cu scalari).

Demonstraţia. Exerciţiu.

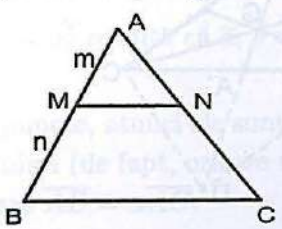
Probleme rezolvate

1. Fie ABC un triunghi, iar $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, $MN \| BC$. Dacă $AM = m$, $MB = n$, atunci exprimaţi: 1) $\overline{AM}$ în funcţie de $\overline{AB}$; 2) $\overline{BC}$ în funcţie de $\overline{MN}$ şi 3) $\overline{CN}$ în funcţie de $\overline{AC}$.

R. Din teorema fundamentală a asemănării rezultă $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$.

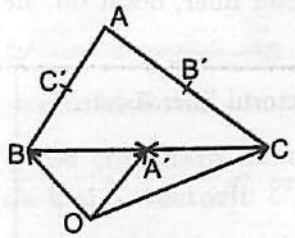
1) Din $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$ deducem $\frac{AM}{AB} = \frac{m}{m+n}$. De aici, $\overline{AM} = \frac{m}{m+n}\overline{AB}$.

2) Din $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ rezultă $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.



3) Din $\frac{AN}{NC}=\frac{m}{n}$ se obţine $\frac{AC}{NC}=\frac{m+n}{n}$, adică $\overline{CN}=-\frac{n}{m+n}\overline{AC}$ (vectorii $\overline{CN}$, $\overline{AC}$ au sensuri diferite).

2. Fie ABC un triunghi, iar A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ şi respectiv $[AB]$, iar O un punct oarecare. Arătaţi că:



1) $\overline{OA'}=\frac{1}{2}(\overline{OB}+\overline{OC})$; 2) $\overline{OA'}+\overline{OB'}+\overline{OC'}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$.

R. 1) Ţinând seamă de regula triunghiului, putem scrie:
$\overline{OA'}=\overline{OB}+\overline{BA'}$, $\overline{OA'}=\overline{OC}+\overline{CA'}$.
Adunând aceste relaţii, avem:
$2\overline{OA'}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{BA'}+\overline{CA'}$, (1).
Cum A' este mijlocul segmentului BC $(BA'=A'C)$, iar vectorii $\overline{BA'}$ şi $\overline{CA'}$ au sensuri diferite, deducem $\overline{BA'}=-\overline{CA'}$. Cu această observaţie, (1) devine $2\overline{OA'}=\overline{OB}+\overline{OC}$.
2) Utilizând 1), avem: $\overline{OA'}=\frac{1}{2}(\overline{OB}+\overline{OC})$, $\overline{OB'}=\frac{1}{2}(\overline{OC}+\overline{OA})$, $\overline{OC'}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})$. Se adună aceste relaţii şi se obţine relaţia dată spre demonstraţie.

Observaţii. **1)** Ţinând seamă de exprimarea din 1), avem următorul rezultat: Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overline{MA}+\overline{MC}=\overline{MB}+\overline{MD}$, unde M este un punct fixat. Într-adevăr, dacă O este punctul de intersecţie al diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$, atunci $\frac{1}{2}(\overline{MA}+\overline{MC})=\frac{1}{2}(\overline{MB}+\overline{MD})\Leftrightarrow \overline{MO'}=\overline{MO''}$, unde O', O'' sunt mijloacele segmentelor $[AC]$ şi respectiv $[BD]$. De aici $O'=O''=O$.

2) Are loc şi următoarea caracterizare a paralelogramului. Cu aceleaşi notaţii ca la 1), avem: $ABCD$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD}=4\overline{MO}$.
Într-adevăr, dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $(\overline{MA}+\overline{MC})+(\overline{MB}+\overline{MD})=2\overline{MO}+2\overline{MO}=4\overline{MO}$.
Reciproc, din egalitatea dată, rezultă $4\overline{MO}=2\overline{MO'}+2\overline{MO''}$, adică
$2\overline{MO}=\overline{MO'}+\overline{MO''}$, adică O este mijlocul segmentului $[O'O'']$, ceea ce atrage $O'=O''=O$, adică $ABCD$ paralelogram.

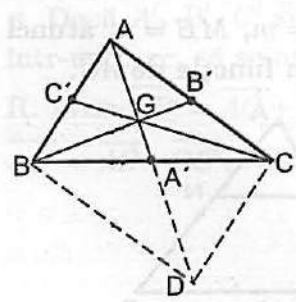
3) Dacă $ABCD$ este un patrulater convex cu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$, atunci el este paralelogram. Într-adevăr, dacă O este mijlocul lui $[BD]$, atunci $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$ şi $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CO}$. Deci $2(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO})=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}\Rightarrow O$ este mijlocul lui $[AC]$.

4) Dacă $ABCD$ este un patrulater convex, M, N mijloacele segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$, astfel încât $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Fie $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AD}+\frac{\overrightarrow{DC}}{2}$, $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\frac{\overrightarrow{BA}}{2}$ şi relaţia se rescrie $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ sau $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ (am utilizat regula poligonului). De aici $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$, adică $ABCD$ este paralelogram.

3. Fie ABC un triunghi, iar A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ şi respectiv $[AB]$. Arătaţi că: 1) $\overline{AA'}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$; 2) $\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}=\overline{0}$;

3) $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=\overline{0}$, **unde G este centrul de greutate al triunghiului.**



R. 1) Fie punctul D, astfel încât $\overline{AA'}=\overline{A'D}$. Atunci patrulaterul $ABDC$ este paralelogram şi $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}$ (regula paralelogramului).
Dar $\overline{AD}=2\overline{AA'}$.
Deci $2\overline{AA'}=\overline{AB}+\overline{AC}$, adică $\overline{AA'}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$.
2) Ţinând seamă de 1), avem:
$\overline{AA'}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC})$, $\overline{BB'}=\frac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{BA})$, $\overline{CC'}=\frac{1}{2}(\overline{CA}+\overline{CB})$.
Adunând aceste relaţii, membru cu membru, obţinem:
$\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{BA}+\overline{CA}+\overline{CB}=\overline{0}$,

deoarece $\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{BC}+\overline{CB}=\overline{AC}+\overline{CA}=\overline{0}$.

Altfel. Dacă M este un punct oarecare, atunci $\overline{AA'}=\overline{MA'}-\overline{MA}=\frac{1}{2}(\overline{MB}+\overline{MC})-\overline{MA}$, unde am folosit rezultatul de la problema 2, pct. 1). Se scriu şi celelalte exprimări pentru $\overline{BB'},\overline{CC'}$ şi apoi se adună.

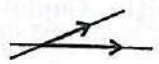
Altfel. Utilizăm relaţia lui Chasles; avem: $\overline{AA'}=\overline{AB}+\overline{BA'},\ldots$ şi se adună. Se ţine seama că $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{0}$.

3) Ştim că $CG=2GC'$. Atunci $\overline{GA}+\overline{GB}=2\overline{GC'}=\overline{CG}$ şi deci $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=\overline{0}$.

Coliniaritatea a doi vectori

Definiţie. Doi vectori liberi nenuli se numesc **coliniari** dacă au aceeaşi direcţie.

În caz contrar vectorii se numesc **necoliniari**.



Se admite că vectorul nul este coliniar cu orice vector.

Din definiţie se deduce că dacă doi vectori sunt coliniari, atunci ei au aceeaşi dreaptă suport sau drepte suport paralele. Vectorilor necoliniari le corespund drepte suport concurente.

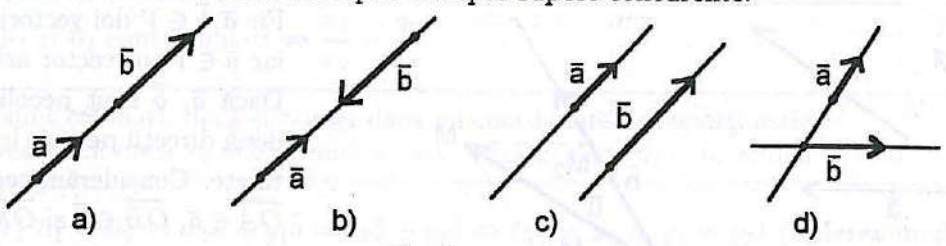


Fig. 8

În fig. 8 (a), b), c)) sunt prezentaţi vectori coliniari, iar în d) avem doi vectori necoliniari.

Să observăm din definiţie faptul că doi vectori nenuli sunt coliniari este echivalent cu dreptele lor suport coincid sau sunt paralele.

Rezultatul care urmează dă o caracterizare pentru coliniaritatea a doi vectori. Mai precis are loc următoarea:

Teoremă de coliniaritate. Doi vectori nenuli $\overline{a},\overline{b}\in\mathcal{V}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă există $\alpha\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\overline{a}=\alpha\overline{b}$.

Demonstraţie. Presupunem că $\overline{a}$, $\overline{b}$ sunt coliniari. Se analizează două cazuri după cum vectorii au acelaşi sens sau nu.

Dacă vectorii au acelaşi sens, atunci se ia $\alpha=\dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}$ şi evident $\overline{a}=\alpha\overline{b}$ (egalitatea a doi vectori !).

Dacă au sensuri opuse, atunci luăm $\alpha=-\dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}$ şi deci $\overline{a}=\alpha\overline{b}$.

Reciproc, dacă $\overline{a}=\alpha\overline{b}$, atunci vectorii $\overline{b}$ şi $\alpha\overline{b}$ au aceeaşi direcţie, iar din $\overline{a}=\alpha\overline{b}$ rezultă că $\overline{a}$, $\overline{b}$ au aceeaşi direcţie, adică sunt coliniari. ■

Observaţii. **1) (Coliniaritatea a trei puncte)** Dacă A, B, C sunt trei puncte, atunci ele sunt coliniare (situate pe aceeaşi dreaptă) dacă şi numai dacă vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ sunt coliniari (de fapt, oricare doi dintre vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ să fie coliniari), adică dacă există $\alpha\in\mathbb{R}^*$ pentru care $\overline{AB}=\alpha\overline{AC}$.

A, B, C trei puncte coliniare $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\overline{AB} = \alpha \overline{AC}$.

Vom reveni în capitolul următor asupra tehnicilor de a proba coliniaritatea a trei puncte distincte.

2) (Paralelismul a două drepte) Dacă vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt coliniari, atunci dreptele AB, CD sunt paralele sau coincid (şi reciproc).

$AB \| CD$ sau $AB = CD \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\overline{AB} = \alpha \overline{CD}$.

3) Vectorii nenuli $\bar{a}$, $\bar{b}$ **sunt colinari** dacă şi numai dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nenule simultan astfel încât $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = \bar{0}$; dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$ **sunt necoliniari**, atunci $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.

Descompunerea unui vector după doi vectori daţi

Bază

Definiţie. Cuplul $(\bar{a}, \bar{b})$ format din doi vectori liberi necoliniari şi nenuli se numeşte **bază** pentru mulţimea vectorilor din plan $(\mathcal{V})$.

O bază formată din versori ortogonali se numeşte **bază ortonormală**.

Componentele unui vector într-o bază

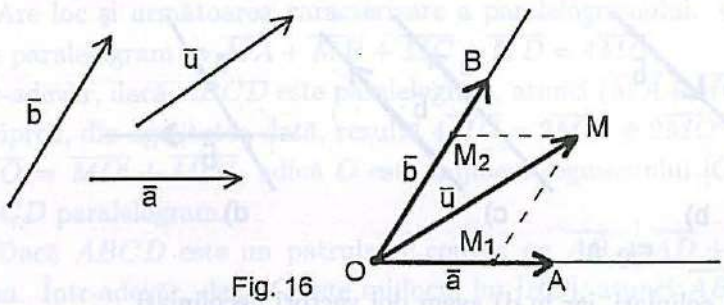


Fig. 16

Fie $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{V}$ doi vectori necoliniari fixaţi, iar $\bar{u} \in \mathcal{V}$ un vector arbitrar (fig. 16). Dacă $\bar{a}$, $\bar{b}$ sunt necoliniari, atunci cele două direcţii pe care le definesc sunt distincte. Considerăm reprezentanţii $\overrightarrow{OA} \in \bar{a}$, $\overrightarrow{OB} \in \bar{b}$ şi $\overrightarrow{OM} \in \bar{u}$. Prin punctul M, extremitatea vectorului $\overrightarrow{OM}$, ducem paralele la OB şi respectiv OA care intersectează pe OA în M_1 şi pe OB în M_2.

După regula paralelogramului avem: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, (1).

Cum vectorii $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OA}$ şi respectiv $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OB}$ sunt coliniari, există constantele reale x, y astfel încât $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OB}$. Cu aceste ultime exprimări, relaţia (1) devine $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, sau ca vectori liberi $\bar{u} = x\bar{a} + y\bar{b}$, (1′).

Vectorii $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ **se numesc componentele vectorului $\bar{u}$ după direcţiile vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.** Se mai spune că **am descompus** vectorul $\bar{u}$ după direcţiile a doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$. Să observăm că această descompunere este o operaţie inversă a adunării a doi vectori. Numerele reale x şi y se numesc **coordonatele** vectorului liber $\bar{u}$ în raport cu baza $(\bar{a}, \bar{b})$.

În plus exprimarea (1′) pentru vectorul $\bar{u}$ este **unică**.

Într-adevăr dacă $\bar{u}$ ar admite şi scrierea $\bar{u} = x'\bar{a} + y'\bar{b}$, (1″), atunci scăzând (1′) şi (1″) rezultă $\bar{0} = (x - x')\bar{a} + (y - y')\bar{b}$, (2). Dacă, prin absurd, $x - x' \neq 0$, atunci $\bar{a} = -\dfrac{y - y'}{x - x'}\bar{b}$, relaţie care arată că vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ sunt coliniari. Contradicţie. Deci $x - x' = 0$, adică $x = x'$. Relaţia (2) devine $(y - y')\bar{b} = \bar{0}$. Cum $\bar{b} \neq \bar{0}$ deducem $y - y' = 0$ sau $y = y'$.

Aşadar scrierea (1′) pentru $\bar{u}$ în funcţie de elementele bazei $(\bar{a}, \bar{b})$ este unică.

Cu acestea am demonstrat următoarea:

Teoremă. Fie $(\overline{a}, \overline{b})$ o bază pentru $\mathcal{V}$. Orice vector $\overline{u} \in \mathcal{V}$ se scrie în mod unic în funcţie de vectorii bazei sub forma $\overline{u} = x\overline{a} + y\overline{b}$, $x, y \in \mathbb{R}$, numită **expresia analitică** a vectorului $\overline{u}$.

Numerele x, y se numesc **coordonatele vectorului** $\overline{u}$ **în baza** $(\overline{a}, \overline{b})$.

Notaţie. Vectorul $\overline{u}$ având coordonatele x, y în baza $(\overline{a}, \overline{b})$ îl notăm $\overline{u} = (x, y)$ sau $\overline{u}(x, y)$.

Dacă $(\overline{a}, \overline{b})$ reprezintă o bază pentru $\mathcal{V}$, iar $\overline{u_1} = (x_1, y_1)$, $\overline{u}_2 = (x_2, y_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci se pot reformula uşor unele dintre chestiunile abordate mai sus. Are loc următoarea

Teoremă. 1. Egalitatea vectorilor Vectorii $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ sunt egali şi scriem $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 \Leftrightarrow (x_1 = x_2, y_1 = y_2)$

Cei doi vectori sunt egali dacă pe componente coincid.

2. Suma vectorilor $\overline{u}_1 + \overline{u}_2$ este vectorul $\overline{u}_1 + \overline{u}_2 = \overline{u} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Coordonatele vectorului sumă sunt egale cu suma coordonatelor vectorilor sau se mai spune că adunarea vectorilor se face pe componente.

3. Înmulţirea vectorului $\overline{u}_1 = (x_1, y_1)$ **cu scalarul** $\alpha \in \mathbb{R}$ este vectorul $\alpha\overline{u}_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1)$.

Coordonatele vectorului $\alpha\overline{u}_1$ se obţin din cele ale vectorului $\overline{u}_1$ prin înmulţire cu scalarul α.

4. Vectorii $\overline{u}_1$ şi $\overline{u}_2$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$.

Doi vectori sunt coliniari, dacă şi numai dacă au coordonatele proporţionale.
Se face convenţia că dacă $x_2 = 0$, atunci $x_1 = 0$; analog, dacă $y_2 = 0$, atunci $y_1 = 0$.

Demonstraţie. 1) $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 \Leftrightarrow x_1\overline{a} + y_1\overline{b} = x_2\overline{a} + y_2\overline{b} \Leftrightarrow (x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2)$ (scrierea unui vector este unică în funcţie de vectorii bazei).

2) $\overline{u}_1 + \overline{u}_2 = (x_1 + x_2)\overline{a} + (y_1 + y_2)\overline{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \overline{u}$.

3) $\alpha u_1 = \alpha x_1\overline{a} + \alpha y_1\overline{b} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$.

4) Vectorii $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}$, astfel încât
$\overline{u}_1 = \beta\overline{u}_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (\beta x_2, \beta y_2) \Leftrightarrow (x_1 = \beta x_2, y_1 = \beta y_2)$.

Probleme propuse

1. **În baza** $(\vec{a}, \vec{b})$ **se consideră vectorii** $v_1(1, -2)$, $v_2(-2, 3)$, $v_3(4, 1)$. **Să se determine coordonatele vectorilor** $v_1 + v_2$, $v_1 + v_2 - v_3$, $2v_1 + 3v_2 - 4v_3$.

2. **Dacă** $(\vec{a}, \vec{b})$ **este o bază, atunci şi perechile de vectori** $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$, $(2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$, $(2\vec{a} + 3\vec{b}, -\vec{a} + 2\vec{b})$ **sunt, de asemenea, baze.**

3. **Dacă vectorii** $\vec{a}$, $\vec{b}$ **sunt necoliniari, atunci şi vectorii** $\vec{v_1} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v}_2 = 2\vec{a} + \vec{b}$ **sunt necoliniari.**

4. **Dacă** $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} = -2\vec{b}$, **atunci vectorii** $\vec{v}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{v}_2 = 3\vec{a} - \vec{b}$ **sunt coliniari.**

5. **Fie** $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ **şi necoliniari,** $\vec{v_1} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{v_2} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$. **Arătaţi că vectorii** $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ **sunt necoliniari şi exprimaţi vectorul** $\vec{v} = 4\vec{a} - 5\vec{b}$ **în funcţie de** $\vec{v_1}$ **şi** $\vec{v_2}$. **Exprimaţi vectorii** $\vec{a}$, $\vec{b}$ **în funcţie de** $\vec{v_1}$ **şi** $\vec{v_2}$.

6. 1) **Se consideră triunghiul** ABC **şi punctele** M, N, P **mijloacele laturilor** $[AB]$, $[BC]$ **şi respectiv** $[CA]$.

a) **Exprimaţi în baza** $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{CN})$ **vectorii** $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BP}$.

b) **Determinaţi coordonatele vectorilor** $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$, $3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$, $4\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CM}$ **în baza** $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM})$.

2) **Fie triunghiul** ABC **şi punctele** $M \in [AB]$, $AM = \frac{1}{2}AB$, $N \in [BC]$, $BN = \frac{1}{3}BC$, $P \in [CA]$, $CP = \frac{1}{4}CA$.

a) **Exprimaţi în baza** $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{BN})$ **vectorii** $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BP}$.

b) **Determinaţi coordonatele vectorilor** $2\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{AN}$, $4\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AB}$, $5\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{BC}$ **în baza** $(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{NB})$.

7. 1) **Se consideră pătratul** $ABCD$, O **intersecţia diagonalelor sale,** M **mijlocul lui** $[AB]$, N **mijlocul lui** $[AD]$. **Scrieţi vectorii** $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ **în funcţie de vectorii bazelor:**
1°) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$; 2°) $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MN})$; 3°) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DB})$; 4°) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2) **Fie** $ABCD$ **un pătrat,** O **intersecţia diagonalelor,** $M \in [AB]$, $AM = \frac{1}{3}AB$, $N \in [AD]$, $AN = \frac{1}{4}AD$. **Scrieţi vectorii** $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{DM}$ $\overrightarrow{BN}$, **în funcţie de vectorii bazelor:**
1°) $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})$; 2°) $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$; 3°) $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OD})$ **şi apoi determinaţi coordonatele vectorilor** $\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BD}$, $2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{DC}$, $4\overrightarrow{CM}-2\overrightarrow{CN}+3\overrightarrow{BN}$, $6\overrightarrow{DM}-3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$ **în fiecare din bazele date.**

8. **Fie paralelogramul** $ABCD$ **şi** O **intersecţia diagonalelor sale,** $M \in [AD]$, $AM = \frac{1}{3}AB$.

1) **În baza** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ **determinaţi vectorii** $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{CM}+3\overrightarrow{DM}$.

2) **În baza** $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$ **determinaţi vectorii** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $3\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}$, $2\overrightarrow{OM}+3\overrightarrow{MC}$.

3) **În baza** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ **determinaţi vectorii** $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CO}$, $2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{DM}+5\overrightarrow{MO}$.

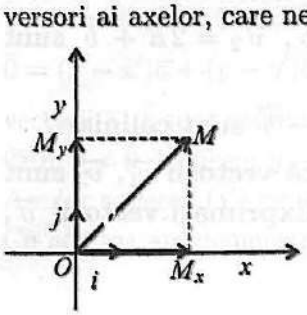
9. **Dacă** $\vec{a} = (2,5)$, $\vec{b} = (3,-2)$, **atunci să se determine coordonatele vectorilor** 1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $-\vec{a}+3\vec{b}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$; 4) $2(\vec{a}-3\vec{b})$; 5) $2(\vec{a}+2\vec{b})-3\vec{a}+4\vec{b}$.

10. **Se consideră hexagonul regulat** $ABCDEF$ **şi** O **intersecţia diagonalelor sale. În baza:**
1) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})$ **să se determine vectorii** $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$;
2) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ **să se determine vectorii** $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CF}$;
3) $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BC})$ **să se determine vectorii** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AC}$.

Reper cartezian în plan

În planul $\mathcal{P}$ se consideră două drepte perpendiculare $x'x$, $y'y$ organizate ca axe $(x'x, O, \vec{i})$, $(y'y, O, \vec{j})$, unde O este punctul lor de intersecţie, iar $\vec{i}$, $\vec{j}$ sunt versorii (vectorii unitari) celor două axe, care definesc sensul pe fiecare axă: semiaxele Ox, Oy sunt semiaxe pozitive, iar semiaxele Ox', Oy' sunt cele negative. Cuplul de axe $(x'x, O, \vec{i})$, $(y'y, O, \vec{j})$ se numeşte *reper cartezian*.

Pentru simplitate îl notăm prin tripletul $(O, \vec{i}, \vec{j})$, indicând punctul O, originea reperului, şi cei doi versori ai axelor, care nefiind coliniari şi nenuli formează o bază, numită *bază ortonormată*.



Coordonate carteziene. Dorim să exprimăm, pentru un punct M din planul xOy, vectorul $\overrightarrow{OM}$ în funcţie de vectorii $\vec{i}$, $\vec{j}$.

A duce prin M paralele la vectorii $\vec{i}$, $\vec{j}$ revine la a duce prin M perpendiculare pe axele Ox, Oy, adică a proiecta punctul M pe Ox (în M_x) şi pe Oy (în M_y). Atunci $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x}+\overrightarrow{OM_y}$. Cum perechile de vectori $(\vec{i}, \overrightarrow{OM_x})$, $(\vec{j}, \overrightarrow{OM_y})$ sunt formate din vectori coliniari deducem că exixtă $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{OM_x} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_y} = y\vec{j}$ şi

deci $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

Vectorul $\overrightarrow{OM}$ este vector legat de punctul O şi se numeşte **vectorul de poziţie al punctului** M.

Numerele $x, y \in \mathbb{R}$ se numesc **coordonatele carteziene ale punctului** M **sau ale vectorului** $\overrightarrow{OM}$ şi scriem $M(x,y)$ sau $\overrightarrow{OM} = (x,y)$. Numărul x se numeşte **abscisa punctului** (sau **vectorului**) şi pentru că se citeşte de pe axa $x'x$, aceasta o vom numi **axa absciselor.**

A doua componentă y se numeşte **ordonata punctului** M (sau a **vectorului**) şi pentru că o citim de pe axa $y'y$, aceasta o vom numi **axa ordonatelor.**

Coordonatele carteziene ale unui vector. Să considerăm două puncte $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ şi să exprimăm vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}$ în funcţie de coordonatele carteziene ale punctelor M_1, M_2. Avem $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} - (x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j}) = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j}$. Deci

$$\boxed{\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j}}$$

este **expresia analitică** a vectorului $\overrightarrow{M_1M_2}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$. Deci $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ având abscisa egală cu diferenţa absciselor (extremitate şi origine) şi ordonata egală cu diferenţa ordonatelor (extremitate şi origine).

Lungimea unui vector. Fie $M_1M_3 \| Ox$ şi $M_2M_3 \| Oy$. Din triunghiul dreptunghic $M_1M_2M_3$ avem $M_1M_2 = \sqrt{M_1M_3^2 + M_2M_3^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Deci

$$\boxed{|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

adică modulul (lungimea) vectorului $\overrightarrow{M_1M_2}$ este egal cu radical din suma dintre diferenţa absciselor la pătrat şi diferenţa ordonatelor la pătrat.

Vectorii $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_1} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j}$ sunt egali dacă $x = x_1$ şi $y = y_1$.

Probleme propuse

1) Pentru punctele $A(1,2)$, $B(-2,3)$, $C(-1,-2)$, $D(-3,0)$, $E(0,5)$), scrieţi vectorii de poziţie şi vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$, $2\overrightarrow{AB}$, $-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{CB}$, $2\overrightarrow{AD} - 5\overrightarrow{ED}$. Calculaţi apoi lungimile vectorilor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $3\overrightarrow{DA}$, $-2\overrightarrow{CB}$, $2\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CD}$.

2) Dacă $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$ şi $A(x,y)$ este mijlocul segmentului $[A_1A_2]$, atunci $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ (utilizaţi relaţia $\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{AA_2}$).

3) Dacă $A(1,1)$, $B(5,3)$, $C(3,7)$ sunt vârfurile unui triungi, atunci determinaţi mijloacele laturilor. Calculaţi perimetrul triunghiului ABC.

4) Punctele $M(2,-1)$, $N(-1,4)$, $P(-2,2)$ sunt mijloacele laturilor unui triunghi . Să se determine vârfurile triunghiului şi perimetrul lui.

5) Determinaţi simetricul lui A faţă de B în cazurile:

a) $A(-2,0)$, $B(3,0)$; b) $A(1,3)$, $B(0,-2)$; c) $A(-1,3)$, $B(1,2)$.

6. Dacă $A(-4,2)$, $B(2,0)$, $C(2,4)$, atunci determinaţi punctul D pentru care $ABCD$ este paralelogram.

7. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ pentru care vectrii $\vec{v_1} = (m-1)\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$, $\vec{v_2} = 2\,\vec{i} - (n+2)\,\vec{j}$ sunt egali.

5. Dacă $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$, atunci:

1) determinaţi coordonatele punctului B, dacă $A(1,-2)$;

2) determinaţi coordonatele lui A dacă $B(-2,3)$.

6. 1) Dacă $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} - \vec{i}$, atunci exprimaţi în funcţie de $\vec{a}$, $\vec{b}$ vectorii $\vec{j}$, $3\vec{i}$, $5\vec{j}$, $2\vec{i} + 3\vec{j}$, $3\vec{i} - 4\vec{j}$.

2) Arătaţi că vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ sunt necoliniari. La fel sunt şi vectorii $\vec{v_1} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v_2} = \vec{a} - 5\vec{b}$.

7. În reperul xOy se dau punctele $A(1,0)$, $B(0,3)$, $C(2,2)$. Să se determine coordonatele lui D în cazurile: 1) $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BD} - 4\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

8. Se consideră punctele $A(x,1)$, $B(-1,y)$, $C(1,3)$. Să se determine x, y în cazurile:

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

9. Fie vectorii $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + n\vec{j}$, $m, n \in \mathbb{R}$. Să se determine m, n în cazurile:

1) $2\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{0}$; 2) $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 3$.

10. 1) Fie $A(0,-3)$, $B(2,-2)$, $C(4,-7)$, $D(-2,-10)$. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari.

2) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care tripletele de puncte conţin puncte coliniare:

a) $A(m,-1)$, $B(4,1)$, $C(-2,3)$; b) $A(1,2)$, $B(-3,-3)$, $C(m,1)$.

11. Se consideră baza $(\vec{i}, \vec{j})$ şi vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$. Stabiliţi care din vectorii de mai jos sunt coliniari:

1) $\vec{u}(-2,3)$, $\vec{v}(2,-6)$; 2) $\vec{u}(0,3)$, $\vec{v}(1,4)$; 3) $\vec{u}(5,0)$, $\vec{v}(6,0)$.

12. Fie $A(1,-1)$, $B(3,1)$, $C(0,4)$, $D(-2,2)$. Stabiliţi dacă $ABCD$ este paralelogram.

13. Fie $A(-2,-3)$, $B(1,-1)$, $C(2,5)$. Să se determine D astfel încât cele patru puncte să determine un paralelogram.

14. Arătaţi că $ABCD$ este dreptunghi în cazurile:

1) $A(-4,-2)$, $B(4,-2)$, $C(4,2)$, $D(-4,2)$; 2) $A(0,-1)$, $B(2,5)$, $C(-1,6)$, $D(-3,0)$.

15. 1) Dacă $A(3,2)$, $B(5,4)$, atunci să se determine punctul $C \in Ox$ (şi respectiv $C' \in Oy$) astfel încât triunghiul ABC (ABC') să fie isoscel.

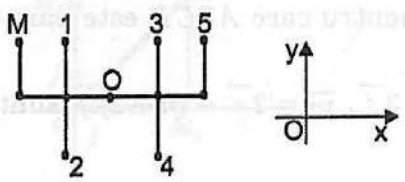
2) Fie $A(-2,-1)$, $B(2,2)$. Să se determine C astfel încât triunghiul ABC să fie echilateral.

16. Vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ formează un triunghi, dacă şi numai dacă $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ (Chasles). Cu vectorii $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ se poate forma un triunghi.

17*. Să se arate că $\overrightarrow{AB} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, $\overrightarrow{CA} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j}$ nu pot fi laturile unui triunghi echilateral cu $x_k, y_k \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{1,3}$.

Probleme de fizică rezolvate cu ajutorul vectorilor

1. Schimbătorul de viteze al unei maşini are structura din schema de mai jos, unde M = marşarier, O = poziţia zero (neutră), iar 1, 2, 3, 4, 5 marcate prin puncte corespund celor 5 viteze.



Vitezele se selectează prin deplasarea schimbătorului de viteze de-a lungul şanţurilor. Distanţele între poziţiile vitezelor marcate prin puncte este de 1 cm.

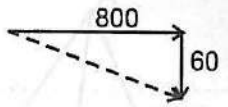
Utilizând componenetele cu O ca origine, descrieţi deplasarea schimbătorului de viteze de la:

1) O la 3; 2) O la 5; 3) O la 4; 4) O la M; 5) O la 2.

R. 1) $(1,1)$; 2) $(2,1)$; 3) $(1,-1)$; 4) $(-2,1)$; 5) $(-1,-1)$;

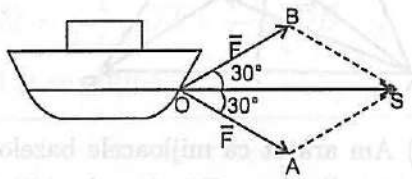
2. Un avion zboară cu 800 km/h în direcţia est, iar vântul bate cu 60km/h din direcţia nord. Care va fi direcţia de deplasare a avionului?

R. Vom reprezenta cele două viteze prin vectori care acţionează pe două direcţii perpendiculare după schema alăturată. Adunând cei doi vectori după regula triunghiului se obţine direcţia de deplasare reală a avionului (marcată punctat).



3. Două remorchere tractează un vapor cu aceeaşi forţă $\overline{F}$. Unghiul dintre direcţiile forţelor este de 60°. Care va fi direcţia după care se va deplasa vaporul?

R. Schematic, asupra vaporului acţionează forţele $\overline{F}$, $\overline{F}$ în punctul O. Le-am reprezentat pe figură prin vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$. Adunând aceşti vectori după regula paralelogramului obţinem vectorul $\overrightarrow{OS}$, pe direcţia căruia se va deplasa vaporul.



Probleme rezolvate

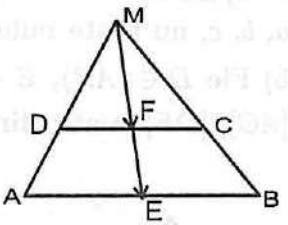
1. **Fie $ABCD$ trapez, cu $AB||CD$, $AD \cap BC = \{M\}$, iar E şi F mijloacele bazelor $[AB]$ şi respectiv $[CD]$. Arătaţi că punctele M, F, E sunt coliniare.**

R. Ideea de rezolvare este de a exprima vectorii $\overline{MF}$ şi $\overline{ME}$ în funcţie de aceiaşi vectori necoliniari (aici $\overline{MA}$ şi $\overline{MB}$) şi a arăta că există $\alpha \in \mathbb{R}^*$, pentru care $\overline{MF} = \alpha\overline{ME}$, relaţie echivalentă cu coliniaritatea punctelor M, F, E. Avem:

$\overline{MF} = \frac{1}{2}(\overline{MD} + \overline{MC})$, $\overline{ME} = \frac{1}{2}(\overline{MA} + \overline{MB})$.

Din $DC||AB$, rezultă $\frac{MD}{MA} = \frac{MC}{MB} = k$. De aici $\overline{MD} = k\overline{MA}$ şi $\overline{MC} = k\overline{MB}$. Cu acestea, $\overline{MF}$ se scrie

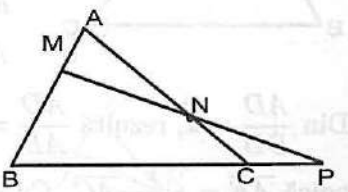
$\overline{MF} = \frac{1}{2}(k\overline{MA} + k\overline{MB}) = \frac{k}{2}(\overline{MA} + \overline{MB}) = k\overline{ME}$.



2. **Pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ ale triunghiului ABC se consideră punctele M, N şi respectiv P, astfel încât $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{MB}$, $\overline{PB} = 5\overline{PC}$ şi $\overline{CN} = \frac{3}{5}\overline{NA}$. Arătaţi că punctele M, N, P sunt coliniare.**

R. Vom demonstra că vectorii $\overline{MN}$ şi $\overline{MP}$ sunt coliniari. Pentru aceasta îi vom exprima în funcţie de vectorii necoliniari $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$.

Avem $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AN}$, unde din $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$ rezultă $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$, adică $\overline{MA} = \frac{1}{4}\overline{BA} = -\frac{1}{4}\overline{AB}$, iar din $\frac{CN}{NA} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AC}{NA} = \frac{8}{5} \Rightarrow \overline{AN} = \frac{5}{8}\overline{AC}$.



Deci, $\overline{MN} = -\frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{5}{8}\overline{AC}$, (1).

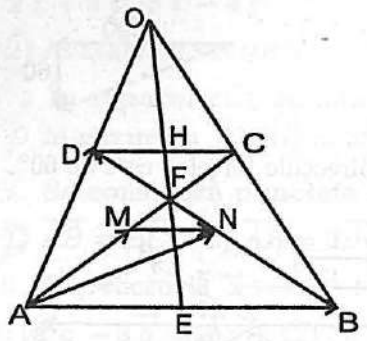
Asemănător, $\overline{MP} = \overline{MB} + \overline{BP}$, unde $\overline{MB} = \frac{3}{4}\overline{AB}$, $\overline{BP} = \frac{5}{4}\overline{BC}$.

De aici, $\overline{MP} = \frac{3}{4}\overline{AB} + \frac{5}{4}\overline{BC} = \frac{3}{4}\overline{AB} + \frac{5}{4}(\overline{BA} + \overline{AC}) = \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right)\overline{AB} + \frac{5}{4}\overline{AC} = -\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{5}{4}\overline{AC}$, (2).

Din (1) şi (2), rezultă $\overline{MP} = 2\overline{MN}$, ceea ce probează coliniaritatea vectorilor $\overline{MP}$ şi $\overline{MN}$, adică a punctelor M, N, P.

3. 1) **Să se demonstreze că în orice trapez, dreapta care unește mijloacele diagonalelor, este paralelă cu bazele.**

2) **Să se arate că, în orice trapez, următoarele puncte sunt coliniare: mijloacele bazelor, punctul de intersecție al diagonalelor și punctul de intersecție al suporturilor laturilor neparalele.**



R. 1) A proba paralelismul dreptelor MN și AB, revine la a arăta că vectorii $\overline{MN}$ și $\overline{AB}$ sunt coliniari. Avem: $\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM}$, unde $\overline{AN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AD})$ (N mijlocul lui $[BD]$) și $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{DC})$ (M mijlocul lui $[AC]$).

Deci $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{DC})$, (1). Dar vectorii $\overline{AB}$ și $\overline{DC}$ sunt coliniari $(AB||DC)$ și deci există $\alpha \in \mathbb{R}^*$ pentru care $\overline{DC} = \alpha\overline{AB}$.

Cu acestea, (1) devine $\overline{MN} = \frac{1-\alpha}{2}\overline{AB}$, relație ce arată că vectorii $\overline{MN}$ și $\overline{AB}$ sunt coliniari, adică $MN||AB$.

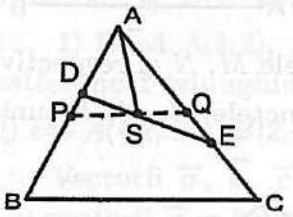
2) Am arătat că mijloacele bazelor E, H și punctul de intersecție al laturilor neparalele într-un trapez, sunt coliniare. Rămâne de arătat că punctele O, H, F sunt coliniare, ceea ce este echivalent cu vectorii $\overline{OH}$, $\overline{OF}$ coliniari. Pentru aceasta se utilizează asemănările de triunghiuri $\triangle ODC \sim \triangle OAB$, $\triangle DFC \sim \triangle ABF$. Avem egalitățile $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{DC} = \frac{FA}{FC} = \frac{FB}{FD} = \alpha$,

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\overline{OA} + \alpha\overline{OC}}{1+\alpha} = \frac{\alpha\overline{OD} + \alpha\overline{OC}}{1+\alpha} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}\,\frac{\overline{OD} + \overline{OC}}{2} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}\overline{OH}.$$

De aici rezultă coliniaritatea vectorilor $\overline{OH}$ și $\overline{OF}$, adică punctele O, H, F sunt coliniare.

4. a) **Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare, dacă și numai dacă există trei numere a, b, c, nu toate nule, astfel încât $a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC} = \overline{0}$, $\forall M$ punct din plan.**

b) **Fie $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel încât $\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EA}$. Arătați că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[AC]$, $[DE]$ sunt coliniare.**



R. a) Punctele A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\overline{AB} = \alpha\overline{AC} \Leftrightarrow \overline{MB} - \overline{MA} = \alpha(\overline{MC} - \overline{MA}) \Leftrightarrow (\alpha-1)\overline{MA} + \overline{MB} - \alpha\overline{MC} = \overline{0}$. Nu avem decât să luăm $a = \alpha - 1$, $b = 1$, $c = -\alpha$.

b) Fie P, Q, S, miloacele segmentelor $[AB]$, $[AC]$ și respectiv $[DE]$. Aplicăm punctul a) pentru $M = A$ și demonstrăm că există $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care $a\overline{AS} + b\overline{AP} + c\overline{AQ} = \overline{0}$, (1). Vom lua ca bază pentru vectori $(\overline{AB}, \overline{AC})$.

Avem $\overline{AS} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{AE})$, (2).

Din $\frac{AD}{DB} = k$, rezultă $\frac{AD}{AB} = \frac{k}{k+1}$ și deci $\overline{AD} = \frac{k}{k+1}\overline{AB}$. Analog, din $\frac{CE}{EA} = k$ se obține $\frac{AC}{AE} = k+1$, adică $\overline{AE} = \frac{1}{k+1}\overline{AC}$. Cu acestea, (2) devine $\overline{AS} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1}\overline{AB} + \frac{1}{k+1}\overline{AC}\right)$.

De asemenea, $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. În fine, (1) se scrie $\left(\frac{ak}{k+1} + b\right)\overline{AB} + \left(\frac{a}{k+1} + c\right)\overline{AC} = \overline{0}$.

Vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, nefiind coliniari, implică egalitatea cu zero a coeficienților, $\frac{ak}{k+1} + b = 0$, $\frac{a}{k+1} + c = 0$.

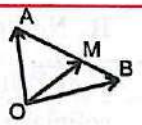
De aici, $a = -c(k+1)$, $b = ck$ și relația de demonstrat este $-(k+1)\overline{AS} + k\overline{AP} + \overline{AQ} = \overline{0}$.

Observație. Arătați că punctele P, S, Q sunt coliniare, dacă și numai dacă vectorii $\overline{PS}$ și $\overline{PQ}$ sunt coliniari.

Punctul care împarte un segment într-un raport dat

Fie $A \neq B$, două puncte în plan şi $M \in [AB]$ pentru care $\overline{AM} = k\overline{MB}$ ($\frac{AM}{MB} = k$), iar O un punct arbitrar al planului. Să se arate că

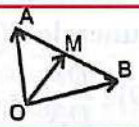
Teoremă. $\overline{OM} = \frac{1}{1+k}\overline{OA} + \frac{k}{1+k}\overline{OB}$.



Demonstraţie. Din regula triunghiului avem: $\overline{AO} + \overline{OM} = \overline{AM}$ (în triunghiul AOM) şi $\overline{OM} + \overline{MB} = \overline{OB}$ sau încă $\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM}$ (în triunghiul OMB). Cu aceste exprimări pentru $\overline{AM}$ şi $\overline{MB}$ relaţia $\overline{AM} = k\overline{MB}$ devine
$\overline{AO} + \overline{OM} = k(\overline{OB} - \overline{OM})$ sau $\overline{OM}(1+k) = k\overline{OB} - \overline{AO}$ sau încă $\overline{OM} = \frac{1}{k+1}\overline{OA} + \frac{k}{k+1}\overline{OB}$. ■

În particular dacă M **este mijlocul segmentului** $[AB]$, atunci $k = 1$ şi se obţine

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$$



Observaţii. 0) Formula demonstrată dă exprimarea vectorului $\overline{OM}$ în funcţie de vectorii bazei $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$, unde $x = \frac{1}{k+1}$, $y = \frac{k}{k+1}$ sunt coordonatele lui $\overline{OM}$ în această bază.

1) Dacă $\alpha = \frac{1}{1+k}$, $\beta = \frac{k}{1+k}$, $\alpha, \beta \geq 0$ şi $\alpha + \beta = 1$, atunci relaţia demonstrată se poate pune sub forma:

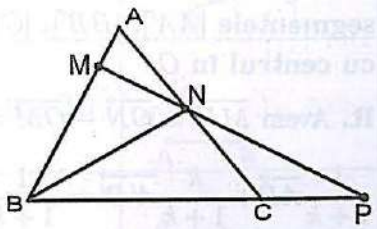
$$\overline{OM} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB},\ \alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1$$

2) În aceeaşi manieră se arată că punctele A, M, B sunt coliniare dacă şi numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care $\overline{OM} = \alpha\overline{OA} + (1-\alpha)\overline{OB}$.
Dacă $M \in (AB)$, atunci $\alpha \in (0,1)$, iar dacă $M \in AB - [AB]$, atunci $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

Probleme rezolvate

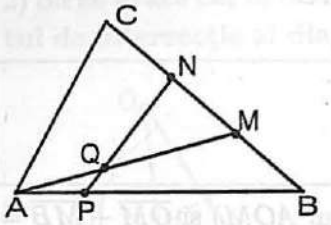
1. Fie ABC un triunghi, iar $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, $P \in BC$, $C \in [BP]$, astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$, $\frac{NC}{NA} = \frac{2}{3}$, $\frac{PC}{PB} = \frac{2}{9}$. Să se arate că punctele M, N, P sunt coliniare.

R. Ideea de rezolvare este cea din teoremă, adică să arătăm că există $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$, astfel încât $\overline{BN} = \alpha\overline{BM} + \beta\overline{BP}$. Vom exprima vectorii $\overline{BM}$ şi $\overline{BP}$ în funcţie de vectorii unei baze, aici formată din $(\overline{BA}, \overline{BC})$.



Avem din $\frac{NC}{NA} = \frac{2}{3}$, $\overline{BN} = \frac{\overline{BC} + \frac{2}{3}\overline{BA}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}\overline{BC} + \frac{2}{5}\overline{BA}$, (1). Dar din $\frac{BM}{MA} = \frac{3}{1}$, rezultă $\frac{BM}{BA} = \frac{3}{4}$, adică $\overline{BM} = \frac{3}{4}\overline{BA}$. De asemenea, din $\frac{PC}{PB} = \frac{2}{9}$ se obţine $\overline{BP} = \frac{9}{7}\overline{BC}$. Cu acestea, (1) se scrie $\overline{BN} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}\overline{BM} + \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9}\overline{BP} = \frac{8}{15}\overline{BM} + \frac{7}{15}\overline{BP}$. Luăm $\alpha = \frac{8}{15}$, $\beta = \frac{7}{15}$, $\alpha + \beta = 1$. Prin urmare, punctele M, N, P sunt coliniare.

2. **Pe latura $[BC]$ a triunghiului ABC se iau punctele M şi N, astfel încât $BM = MN = NC$, iar pe latura $[AB]$ se ia punctul P, astfel încât $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{4}$. Notăm cu Q, punctul de intersecţie al dreptelor AM şi NP. Determinaţi raportul $\frac{AQ}{AM}$.**



R. Notăm $\frac{AQ}{QM} = x$. Ideea de rezolvare este exprimarea vectorilor $\overline{NQ}$ şi $\overline{NP}$ în funcţie de vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ şi raportul x. Din cerinţa de coliniaritate a vectorilor $\overline{NQ}$ şi $\overline{NP}$, ceea ce înseamnă proporţionalitatea componentelor lor, se obţine x. Avem:

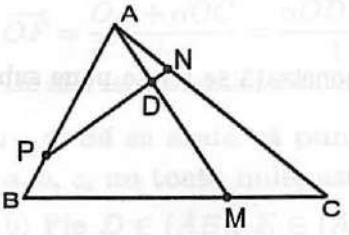
$\overline{NQ} = \overline{AQ} - \overline{AN} = x\overline{AM} - \overline{AN}$. Dar $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AC} + \frac{2}{3}\overline{AB}$, $\overline{AN} = \frac{2}{3}\overline{AC} + \frac{1}{3}\overline{AB}$. Cu aceasta,

$\overline{NQ} = \frac{1}{3}[(x-2)\overline{AC} + (2x-1)\overline{AB}]$, $\overline{NP} = \overline{AP} - \overline{AN} = \frac{1}{4}\overline{AB} - \frac{2}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB} = -\frac{1}{12}\overline{AB} - \frac{2}{3}\overline{AC}$.

Din cerinţa $\overline{NQ} \| \overline{NP}$ rezultă $-4(2x-1) = -\frac{x-2}{2}$, adică $x = \frac{2}{5}$.

3. **Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M \in [BC]$, $N \in [CA]$, $P \in [AB]$ astfel încât $\frac{MB}{MC} = 2$, $\frac{NC}{NA} = 3$, $\frac{PA}{PB} = 4$. Fie $AM \cap NP = \{D\}$, $\frac{DP}{DN} = k$, $\frac{AD}{DM} = \lambda$.**

1) Exprimaţi vectorul $\overline{AD}$ în funcţie de vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$; 2) Determinaţi rapoartele λ şi k.



R. 1) Să observăm că vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$, fiind necoliniari, formează o bază şi deci, vectorul $\overline{AD}$ se exprimă în mod unic în funcţie de aceştia.

Din $\frac{BM}{MC} = 2$, deducem $\overline{AM} = \frac{\overline{AB} + 2\overline{AC}}{1+2} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC}$.

Din $\frac{AD}{DM} = \lambda$, rezultă $\frac{AD}{AM} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$, adică

$\overline{AD} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overline{AM} = \frac{\lambda}{3(\lambda+1)}\overline{AB} + \frac{2\lambda}{3(\lambda+1)}\overline{AC}$, (1).

Din $\frac{PD}{DN} = k$, se obţine $\overline{AD} = \frac{1}{k+1}\overline{AP} + \frac{k}{k+1}\overline{AN} = \frac{4}{5(k+1)}\overline{AB} + \frac{k}{4(k+1)}\overline{AC}$, (2) (din $\frac{AP}{PB} = 4$ se obţine $\frac{AP}{AB} = \frac{4}{5}$, adică $\overline{AP} = \frac{4}{5}\overline{AB}$; $\overline{AN} = \frac{1}{4}\overline{AC}$). Cum scrierea lui $\overline{AD}$ în funcţie de vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ este unică, din (1) şi (2) rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{3(\lambda+1)} = \frac{4}{5(k+1)} \\ \frac{2\lambda}{3(\lambda+1)} = \frac{k}{4(k+1)} \end{cases}$$

. De aici $k = \frac{32}{5}$, $\lambda = \frac{12}{25}$ (se împart cele două ecuaţii).

4. **Fie $ABCD\ A'B'C'D'$ paralelograme cu acelaşi centru O. Punctele M, N, P, Q împart segmentele $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$ în acelaşi raport k. Arătaţi că $MNPQ$ este paralelogram cu centrul în O.**

R. Avem $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OB'}}{1+k} - \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OA'}}{1+k} = \frac{1}{1+k}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \frac{1}{1+k}(\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}) =$

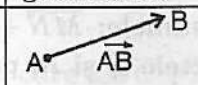
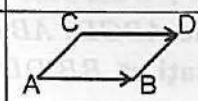
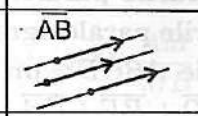
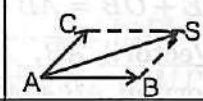
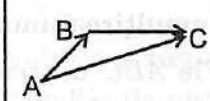
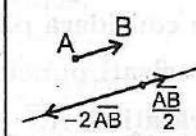
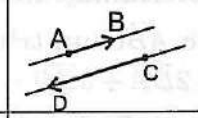
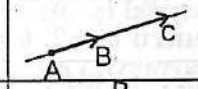
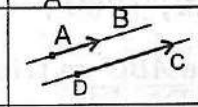
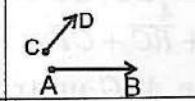
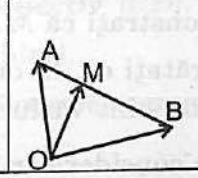
$\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{DC} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{D'C'} = \frac{1}{1+k}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) + \frac{k}{1+k}(\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OD'} = \frac{\overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{OC'}}{1+k} -$

$\frac{\overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{OD'}}{1+k} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow MNPQ$ este paralelogram.

Din $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OA'}}{1+k} + \frac{\overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{OC'}}{1+k} = \frac{1}{1+k}[\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + k(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'})] = \overrightarrow{0} \Rightarrow O$ este mijlocul

lui $[MP]$. Analog se arată că $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{0}$.

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noţiunea	Notaţie	Definiţie Caracterizare	Reprezentarea geometrică
Segment orientat	$\overrightarrow{AB}$	O pereche ordonată (AB), $A, B \in \mathcal{P}$	
Vectori echipolenţi	$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ au: 1) aceeaşi direcţie; 2) acelaşi sens; 3) acelaşi modul	
Vector liber	$\overline{AB}$	Toate segmentele orientate echipolente cu $\overrightarrow{AB}$	
Adunarea vectorilor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$	$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AS}$	Regula paralelogramului. Se construieşte paralelogramul de laturi $[AB]$, $[AC]$. Suma vectorilor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ este vectorul $\overline{AS}$	
Adunarea vectorilor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$	$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$	Regula triunghiului. Vectorul sumă $\overline{AC}$ are originea în originea primului vector $(\overline{AB})$ şi extremitatea în extremitatea celui de al doilea vector $(\overline{BC})$.	
Înmulţirea unui vector $(\overline{AB})$ cu un scalar $\alpha \neq 0$	$\alpha\overline{AB}$	$\alpha\overline{AB}$ are: 1) aceeaşi direcţie cu $\overline{AB}$; 2) acelaşi sens cu $\overline{AB}$,dacă $\alpha > 0$ şi sens contrar dacă $\alpha < 0$; 3) modulul egal cu $\lvert\alpha\rvert \cdot \lvert\overline{AB}\rvert$	
Vectori coliniari $\overline{AB}$, $\overline{CD}$	$\overline{AB} \| \overline{CD}$	Doi vectori nenuli $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ care au aceeaşi direcţie $\overline{AB} = \alpha\overline{CD}$, $\alpha \in \mathbb{R}$	
Punctele A, B, C sunt coliniare dacă		Doi din vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ sunt coliniari	
Drepte paralele	$AB \| CD$	Vectorii $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ sunt coliniari	
Bază în $\mathcal{V}$	$(\overline{AB}, \overline{CD})$	Oricare doi vectori nenuli şi necoliniari $\overline{AB}$, $\overline{CD}$	
Punctul care împarte un segment într-un raport dat	$M \in [AB]$, $\frac{AM}{MB} = k$	$\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + k\overline{OB}}{1+k}$ $\forall O \in \mathcal{P}$ $\overline{OM} = \alpha\overline{OA} + (1-\alpha)\overline{OB}$	

Probleme propuse

1. Adunarea vectorilor

1. Fie $ABCD$ un paralelogram, iar O punctul de intersecţie al diagonalelor. Arătaţi că $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=\overline{0}$.

2. Fie ABC un triunghi, iar M, N, P, mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ şi respectiv $[AC]$. Calculaţi sumele: $\overline{MN}+\overline{BM}$, $\overline{MN}+\overline{NP}$, $\overline{AM}+\overline{AP}$, $\overline{CN}+\overline{CP}$ în funcţie de $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ şi determinaţi punctele Q şi R, pentru care $\overline{MB}+\overline{MN}=\overline{MQ}$ şi $\overline{PN}+\overline{PC}=\overline{PR}$. Arătaţi că $\overline{QR}=\overline{MP}$.

3. Fie $ABCD$, $AB'CD'$ două paralelograme, cu diagonala $[AC]$ comună. Arătaţi că $BB'DD'$ este paralelogram.

4. Fie $ABCD$ un paralelogram iar S un punct în interiorul său, prin care se duc paralele la laturile paralelogramului. Notăm cu M,N,P,Q punctele de intersecţie ale paralelelor cu laturile paralelogramului ($M\in[AB]$, $N\in[BC]$, $P\in[CD]$, $Q\in[AD]$). Arătaţi că $\overline{MQ}+\overline{QP}=\overline{BC}$.

5. Fie $ABCDE$ un pentagon convex, iar O un punct în planul său. Arătaţi că:
1) $\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CA}=\overline{BD}+\overline{CE}$; 2) $\overline{OE}+\overline{BC}+\overline{DB}+\overline{AD}=\overline{AE}+\overline{OC}$;
3) $\overline{AE}+\overline{OB}=\overline{AB}+\overline{OE}$; 4) $\overline{AE}+\overline{BO}+\overline{CD}+\overline{OC}+\overline{DA}+\overline{EB}=\overline{O}$.

6. Vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ au modulele $AB=AC=1$, iar $\mathrm{m}(\widehat{BAC})=90^0$. Determinaţi modulul vectorului $\overline{AB}+\overline{AC}$.

2. Înmulţirea unui vector cu un scalar

1. Fie ABC un triunghi, iar M,N,P mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ şi respectiv $[AB]$. Arătaţi că: 1) $\overline{AM}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$; 2) $\overline{AM}+\overline{BN}+\overline{CP}=\overline{O}$.

2. Se consideră pătratul $ABCD$, de latură 1.
1) Precizaţi punctele E, F, G pentru care $\overline{BE}=\frac{1}{3}\overline{BC}$, $\overline{DF}=2\overline{DC}$, $\overline{DG}=-\overline{DA}$.
2) Arătaţi că $\overline{AG}+\overline{GF}+\overline{FB}=\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{EB}+\overline{FE}$.
3) Determinaţi modulele vectorilor $\overline{AB}+\overline{BE}$, $\overline{AB}+\overline{CF}$.

3. Fie ABC un triunghi. Determinaţi punctul D, pentru care
$2\overline{DA}+3\overline{DB}-5\overline{DC}=\overline{O}$.

4. Fie A,B,C trei puncte în planul $\mathcal{P}$ şi $f:\mathcal{P}\to\mathcal{V}$, $\overline{f(M)}=a\overline{MA}+b\overline{MB}+c\overline{MC}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $M\in\mathcal{P}$.
1) Pentru $a=2$, $b=3$, $c=-5$, arătaţi că $\overline{f(M)}$ nu depinde de M.
2) $\overline{f(M)}=\overline{f(M')}\Leftrightarrow a+b+c=0$.

5. Fie ABC un triunghi. Să se construiască punctele M, N, P, Q, R, astfel încât $\overline{MB}=\frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{NC}=\frac{1}{4}\overline{BC}$, $\overline{CP}=2\overline{BC}$, $\overline{QC}=-2\overline{QA}$, $\overline{AR}=2\overline{RB}$. Să se arate că
$\overline{MR}+\overline{RC}+\overline{CP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{MA}+\overline{AN}+\overline{NQ}+\overline{QB}$.

6. Fie ABC un triunghi şi punctele M,N,P, pentru care $\overline{AB}=3\overline{AM}$, $\overline{BC}=3\overline{CP}$, $\overline{CA}=3\overline{CN}$. Demonstraţi că $\overline{MP}=2\overline{MN}$.

7. Arătaţi că, în orice patrulater convex, mijloacele a două laturi opuse şi mijloacele diagonalelor sunt vârfurile unui paralelogram (daţi soluţie sintetică şi vectorială).

8. Se consideră triunghiul ABC şi $M\in(AB)$, astfel încât $\overline{AM}=\frac{1}{3}\overline{AB}$. Paralela dusă prin M la BC, taie pe AC în N. Exprimaţi pe $\overline{AN}$ în funcţie de $\overline{AC}$, iar pe $\overline{MN}$ în funcţie de $\overline{CB}$.

9. Fie $ABCD$ un trapez $(AB||CD)$, iar M, N, P, Q mijloacele segmentelor $[AD]$, $[BC]$, $[AC]$ şi respectiv $[BD]$.

Arătaţi că: 1) $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$; 2) $\overline{PQ} = \frac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{DC})$.

10. Fie $ABCD$ un patrulater, în care M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Să se arate că:

1) $\overline{MP} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$, $\overline{QN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$; 2) $\overline{MP} + \overline{QN} = \overline{AC}$.

11. Considerăm triunghiul ABC. Arătaţi că nu există punctul M, pentru care $2\overline{MC} + \overline{MA} - 3\overline{MB} = \overline{AC}$.

3. Descompunerea unui vector după două direcţii date

1. În triunghiul ABC, fie A', B', C' mijloacele laturilor $[BC], [AC], [AB]$. Exprimaţi vectorii $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ în funcţie de vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$.

2. Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [AN]$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$, $\frac{BN}{NC} = \frac{3}{4}$, $\frac{AP}{PN} = \frac{1}{3}$. Exprimaţi vectorii $\overline{AN}, \overline{MN}, \overline{AP}$ în funcţie de vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.

3. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctele $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CD]$, $Q \in [AD]$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$, $\frac{BN}{NC} = 2$, $\frac{CP}{PD} = \frac{1}{2}$, $\frac{DQ}{QA} = \frac{1}{4}$. Exprimaţi vectorii $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QM}$, $\overline{MP}$, $\overline{NQ}$ în funcţie de vectorii $\overline{AB}$, $\overline{BC}$.

4. Pe latura $[AB]$ şi diagonala $[AC]$ ale paralelogramului $ABCD$ se iau punctele M şi respectiv N, astfel încât $\overline{AM} = m\overline{AB}$, $\overline{AN} = n\overline{AC}$. Exprimaţi vectorii $\overline{MN}$ şi $\overline{MD}$ în funcţie de vectorii $\overline{AD}$ şi $\overline{AB}$. Caz particular, $m = \frac{1}{5}$, $n = \frac{1}{6}$. Arătaţi, în acest caz, că $\overline{MN} = \frac{1}{6}\overline{MD}$.

5. Fie triunghiul ABC şi punctele $D \in [BC]$, $M \in [AD]$, astfel încât $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$, $\frac{AM}{MD} = 2$.

1) Determinaţi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pentru care $\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM} = \alpha\overline{AB} + \beta\overline{AC}$.

2) Dacă O este un punct oarecare din plan, scrieţi vectorul $\overline{OM}$ în funcţie de vectorii $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$.

4. Coliniaritatea a doi vectori. Paralelismul a două drepte

1. Fie ABC un triunghi în care prelungim latura $[BC]$ cu segmentul $CD = \frac{1}{3}BC$ şi latura $[BA]$ cu segmentul $AE = \frac{AB}{2}$. Dacă O este punctul de intersecţie al dreptelor AD şi CE, arătaţi că O este mijlocul segmentului $[AD]$.

2. Se consideră triunghiul ABC şi M, N, P, astfel încât $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AB}$, $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{AC} = \overline{CP}$. Arătaţi că:

1) $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} - \frac{1}{3}\overline{BA}$, $\overline{NP} = \frac{3}{2}\overline{BC} - \overline{BA}$; 2) M, N, P sunt coliniare.

3. În paralelogramul $ABCD$, se consideră punctele E, F pe $[AD]$ şi respectiv $[CD]$, astfel încât $\overline{AE} = \overline{ED}$ şi $\frac{CF}{FD} = \frac{1}{3}$. Arătaţi că vectorii $2\overline{CE} + \overline{AF}$ şi $\overline{AB}$ sunt coliniari.

4. Fie $ABCDE$ pentagonul convex, pentru care P, S, Q, T, M, N sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[PQ]$ şi respectiv $[TS]$. Arătaţi că $MN||AE$.

5. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ (sau pe prelungirile lor) ale triunghiului ABC se iau punctele M şi N, astfel ca $BM = CN$. Fie Q mijlocul lui $[MN]$, iar R mijlocul lui $[BC]$. Să se arate că QR este paralelă cu bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

6. Fie triunghiul ABC, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, astfel încât $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$. Dacă M este mijlocul laturii $[BC]$, iar $\{O\} = CD \cap BE$, să se arate că:

1) $DE \| BC$ şi $BC = 3DE$; 2) Punctele A, O, M sunt coliniare.

7. Fie ABC un triunghi şi M, N, P puncte pe laturile $[AB]$, $[AC]$ şi respectiv $[BC]$, astfel încât $\overline{MA} = -\frac{1}{3}\overline{MB}$, $\overline{NC} = -\frac{2}{3}\overline{NA}$, $\overline{PC} = \frac{2}{9}\overline{PB}$. Arătaţi că punctele M, N, P sunt coliniare.

8. Pe latura $[AB]$ şi diagonala $[AC]$ ale paralelogramului $ABCD$ se iau punctele M şi N, astfel încât $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB}$, $\overline{AN} = \frac{1}{4}\overline{AC}$. Arătaţi că punctele M, N, D sunt coliniare.

9. Fie $ABCD$ un paralelogram. Definim punctele E şi F prin $\overline{AE} = \frac{3}{2}\overline{AB}$, $\overline{AF} = 3\overline{AD}$. Să se arate că punctele C, E, F sunt coliniare.

10. Fie M, N, P, Q, R şi S mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[MP]$, $[AQ]$ şi $[RN]$. Arătaţi că punctele D, Q, S sunt coliniare.

Teste de evaluare

Testul 1.

1. Fie triunghiul ABC şi punctele M, N, P, astfel încât $\overline{AB} = 3\overline{AM}$, $\overline{BC} = 3\overline{CP}$, $\overline{CA} = 3\overline{CN}$. Arătaţi că $\overline{MP} = 2\overline{MN}$, exprimând vectorii în funcţie de $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$.

2. Arătaţi că dacă $ABCD$ este paralelogram de centru O, atunci $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 4\overline{MO}$, $\forall M$.

3. Vectorii $\overline{GM}, \overline{GN}$ şi $\overline{GP}$ au acelaşi modul, iar suma lor este zero (G, M, N, P fiind distincte). Arătaţi că G este centrul de greutate al triunghiului.

4. Fie P un punct interior triunghiului echilateral de centru O. Dacă P_1, P_2, P_3 sunt proiecţiile lui P pe laturile triunghiului, atunci $\overline{PP_1} + \overline{PP_2} + \overline{PP_3} = \frac{3}{2}\overline{PO}$.

Testul 2.

1. Fie A, B, C, D patru puncte distincte, iar M, N mijloacele segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$. Să se arate că $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$.

2. Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctele $E \in [AD]$, $AE = ED$, $S \in [BC]$, $\frac{CS}{BC} = \frac{1}{3}$, $R \in [DC]$, $\frac{DR}{DC} = \frac{1}{3}$. Exprimaţi vectorii $\overline{BE}, \overline{RS}$ în funcţie de $\overline{AB}$ şi $\overline{AD}$ şi apoi deduceţi că $BE \| RS$.

3. Fie $ABCDEF$ hexagonul regulat înscris în cercul de centru O.
Să se arate că $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} + \overline{AF} = 6\overline{AO}$.

4. Să se arate că într-un triunghi echilateral ABC, înscris în cercul de centru O, avem $\overline{AB} + \overline{AC} = 3\overline{AO}$.

5. În hexagonul $ABCDEF$ fie K, L, M, N, P, Q mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, $[FA]$. Dacă segmentele $[KN]$, $[LP]$ şi $[QM]$ se intersectează şi formează un triunghi echilateral, atunci aceste segmente sunt egale ($\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{0}$).

2. COLINIARITATE, CONCURENŢĂ, PARALELISM. CALCUL VECTORIAL ÎN GEOMETRIA PLANĂ

Vectorul de poziţie al unui punct

Definiţie Fie în planul $\mathcal{P}$ un punct fixat O. Dacă M este un punct din plan atunci vectorul $\overrightarrow{OM}$ îl numim **vector legat** (de punctul O sau de polul O) sau **vectorul de poziţie al punctului** M.

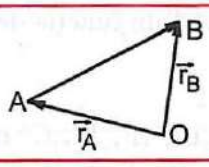
Notaţie. Vectorul legat $\overrightarrow{OM}$ îl notăm $\vec{r}_M$.

Dacă în plus în $\mathcal{P}$ se consideră baza $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, atunci $\vec{r}_M = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, unde x, y reprezintă **coordonatele vectorului de poziţie** în baza dată şi scriem $\vec{r}_M = (x, y)$ sau $\vec{r}_M(x, y)$.

Exprimarea unui vector legat în funcţie de vectorii de poziţie

Căutăm o scriere a vectorului legat $\overrightarrow{AB}$ cu ajutorul vectorilor de poziţie ai punctelor A şi B. Aplicăm regula triunghiului şi avem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, adică
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ sau

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad (1)$$



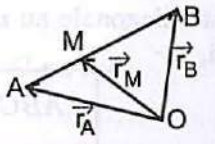
Vectorul de poziţie al punctului care împarte un segment într-un raport dat

În continuare, vom găsi o exprimare a vectorului de poziţie al punctului M care împarte segmentul $[AB]$ în raportul $\dfrac{AM}{MB} = k > 0$, în funcţie de vectorii de poziţie ai punctelor A, B (capetele segmentului) şi raportul k.

Din $\dfrac{AM}{MB} = k$, deducem relaţia vectorială $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}$. Rescriem această egalitate cu ajutorul vectorilor de poziţie ai punctelor A, M şi B, utilizând formula (1).
Avem: $\vec{r}_M - \vec{r}_A = k(\vec{r}_B - \vec{r}_M)$ sau $(1+k)\vec{r}_M = \vec{r}_A + k\vec{r}_B$. De aici

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + k\vec{r}_B}{1+k} \quad (2)$$

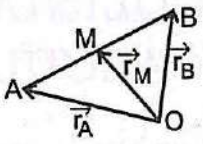
$\vec{r}_M$ este vectorul de poziţie al punctului $M \in (AB)$, $\dfrac{AM}{MB} = k$.



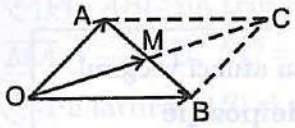
Observaţii. 1) Pentru $k = 1$, avem $MA = MB$, adică M este mijlocul segmentului $[AB]$ şi din (2) rezultă

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

Vectorul de poziţie al mijlocului M al segmentului $[AB]$.



2) Acest rezultat se poate obţine apelând la adunarea vectorilor după regula paralelogramului.



Prelungim segmentul (OM) dincolo de M cu segmentul (MC), astfel încât $OM = MC$. Patrulaterul $OBCA$ este paralelogram (diagonalele se înjumătăţesc) şi deci $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ sau $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, adică $\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$.

3) Dacă M este exterior segmentului $[AB]$ pentru care $\frac{MA}{MB} = k$, atunci $\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A - k\vec{r}_B}{1-k}$. Într-adevăr, din $\frac{MA}{MB} = k$ rezultă $\frac{MA}{AB} = \frac{k}{1-k}$ şi aplicăm formula pentru $A \in [MB]$, când $\vec{r}_A = \dfrac{\vec{r}_M + \frac{k}{1-k}\vec{r}_B}{1 + \frac{k}{1-k}}$, iar de aici se obţine formula pentru $\vec{r}_M$.

4) Fie triunghiul ABC şi AA' înălţime. Atunci $\overrightarrow{AA'} = \frac{A'B}{a}\overrightarrow{AC} + \frac{A'C}{a}\overrightarrow{AB}$. Într-devăr, din $BA' + A'C = a$ rezultă $A'C\left(\frac{BA'}{A'C} + 1\right) = a$. Fie $k = \frac{BA'}{A'C}$. Atunci $\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k} = \frac{A'C}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{A'B}{a}\overrightarrow{AC}$. Dacă $m(\widehat{A}) = 90°$, exprimaţi $\sum \overrightarrow{AA'}$ în funcţie de $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

Probleme rezolvate

1. Fie ABC un triunghi, iar A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ şi respectiv $[AB]$. Să se arate că $\vec{r}_{A'} + \vec{r}_{B'} + \vec{r}_{C'} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$.

R. Avem $\vec{r}_{A'} = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C)$, $\vec{r}_{B'} = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C)$, $\vec{r}_{C'} = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$, care adunate dau relaţia dorită.

2. Arătaţi că un patrulater este paralelogram, dacă şi numai dacă diagonalele sale se înjumătăţesc.

R. Fie $ABCD$ patrulaterul, iar $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$, $\vec{r}_D$, vectorii de poziţie ai punctelor A, B, C şi respectiv D, în raport cu polul O. Atunci avem echivalenţele:

$ABCD$ paralelogram $\Leftrightarrow (AB \| CD, AB = CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_C - \vec{r}_D \Leftrightarrow \vec{r}_B + \vec{r}_D = \vec{r}_C + \vec{r}_A \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_D) = \frac{1}{2}(\vec{r}_C + \vec{r}_A)$.

Ultima egalitate spune că vectorii de poziţie ai mijloacelor diagonalelor $[BD]$ şi $[AC]$ sunt egali, adică aceste diagonale au acelaşi mijloc.

Deci,

$$ABCD \text{ paralelogram} \Leftrightarrow \vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$$

3. Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctele $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CD]$, $Q \in [AD]$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = k$. Arătaţi că $MNPQ$ este paralelogram.

R. Vom utiliza rezultatul din problema precedentă: $MNPQ$ este paralelogram: $\Leftrightarrow \vec{r}_M + \vec{r}_P = \vec{r}_N + \vec{r}_Q$.

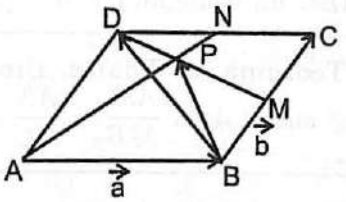
Pentru aceasta vom exprima vectorii de poziţie ai punctelor M, N, P şi Q în funcţie de vectorii de poziţie ai punctelor A, B, C, D. Din enunţ avem:

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + k\vec{r}_B}{1+k}, \quad \vec{r}_N = \frac{\vec{r}_B + k\vec{r}_C}{1+k}, \quad \vec{r}_P = \frac{\vec{r}_C + k\vec{r}_D}{1+k}, \quad \vec{r}_Q = \frac{\vec{r}_D + k\vec{r}_A}{1+k}.$$

Avem echivalenţele $\vec{r}_M + \vec{r}_P = \vec{r}_N + \vec{r}_Q \Leftrightarrow \vec{r}_A + \vec{r}_C + k(\vec{r}_B + \vec{r}_D) = \vec{r}_B + \vec{r}_D + k(\vec{r}_C + \vec{r}_A)$, adevărată deoarece $ABCD$ fiind paralelogram avem $\vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$.

4. **(Determinarea valorii unui raport). Fie paralelogramul $ABCD$, M mijlocul lui $[BC]$, N mijlocul lui $[CD]$. Fie $AN \cap DM = \{P\}$. Să se calculeze valoarea rapoartelor $\frac{DP}{PM} = k$ şi $\frac{AP}{PN} = l$.**

R. Vom scrie vectorii de poziţie ai punctelor raportaţi la polul $O = B$.



Fie $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ şi $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Avem: $\vec{r}_P = \frac{\vec{r}_D + k\vec{r}_M}{1+k}$ şi $\vec{r}_P = \frac{\vec{r}_A + l\vec{r}_N}{1+l}$.

Deci $\frac{\vec{r}_D + k\vec{r}_M}{1+k} = \frac{\vec{r}_A + l\vec{r}_N}{1+l}$, (1)

Vom exprima vectorii care apar în egalitate în funcţie de vectorii necoliniari $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Să observăm că

$$\vec{r}_D = \vec{b} - \vec{a}, \ \vec{r}_M = \frac{1}{2}\vec{b}, \ \vec{r}_A = -\vec{a}, \ \vec{r}_N = \frac{1}{2}(\vec{r}_D + \vec{r}_C) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}.$$

Cu acestea (1) devine:

$$\frac{\vec{b}\left(1+\frac{k}{2}\right) - \vec{a}}{1+k} = \frac{-\left(1+\frac{l}{2}\right)\vec{a} + l\vec{b}}{1+l} \Leftrightarrow \left(\frac{1+\frac{l}{2}}{1+l} - \frac{1}{1+k}\right)\vec{a} + \left(\frac{1+\frac{k}{2}}{1+k} - \frac{l}{1+l}\right)\vec{b} = \vec{0}.$$

Cum vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ sunt necoliniari, rezultă sistemul $\frac{1+\frac{l}{2}}{1+l} - \frac{1}{1+k} = 0$, $\frac{1+\frac{k}{2}}{1+k} - \frac{l}{1+l} = 0$, cu soluţia $k = \frac{2}{3}$, $l = 4$.

5. **(Exprimarea vectorului de poziţie al punctului interior triunghiului.)** Dacă M este interior triunghiului ABC, atunci $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{S}\left(S_{MBC} \cdot \overrightarrow{OA} + S_{MCA} \cdot \overrightarrow{OB} + S_{MAB} \cdot \overrightarrow{OC}\right)$, unde S este aria triunghiului ABC, S_{MBC} aria triunghiului MBC etc.

R. Fie $AM \cap BC = \{A'\}$, $\frac{AA'}{MA'} = \frac{h_a}{h_m}$, h_a, h_m sunt înălţimile din A şi M pe BC. De aici

$$\frac{AA'}{MA'} = \frac{S}{S_{BMC}} \Rightarrow \frac{AM}{MA'} = \frac{S - S_{BMC}}{S} = k \text{ şi}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OA}}{1+k} = \frac{S_{BMC}\overrightarrow{OA} + (S - S_{BMC})(\overrightarrow{OA'})}{S}, \ (1).$$

Pe de altă parte $\frac{BA'}{A'C} = \frac{h_b}{h_c}$, unde h_b, h_c sunt lungimile peependicularelor din B şi C pe AA'.

De aici $\frac{BA'}{A'C} = \frac{S_{MAB}}{S_{MAC}}$ şi $\overrightarrow{OA'} = \frac{\overrightarrow{OB} + \left(\frac{S_{MAB}}{S_{MAC}}\right)\overrightarrow{OC}}{1 + \frac{S_{MAB}}{S_{MAC}}}$, (2). Din (1) şi (2) rezultă relaţia dorită.

5. Coordonatele unui punct care împarte un segment într-un raport dat

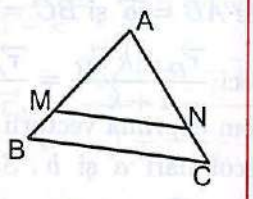
Dacă se consideră în planul $\mathcal{P}$ baza $(\vec{a}, \vec{b})$, unde $\vec{a}$, $\vec{b}$ sunt vectori legaţi în O, atunci $\vec{r}_M = x_M\vec{a} + y_M\vec{b}$, unde x_M, y_M reprezintă coordonatele vectorului de poziţie în baza dată. Scriem $\vec{r}_M = (x_M, y_M)$. Dacă $\vec{r}_A = x_A\vec{a} + y_A\vec{b}$, $\vec{r}_B = x_B\vec{a} + y_B\vec{b}$, $\vec{r}_M = x_M\vec{a} + y_M\vec{b}$, atunci:

Coordonatele mijlocului M al segmentului $[AB]$ sunt:	$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$, $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$
Coordonatele punctului M care împarte segmentul $[AB]$ în raportul $k = \frac{AM}{MB}$ sunt:	$x_M = \frac{x_A + kx_B}{1+k}$, $y_M = \frac{y_A + ky_B}{1+k}$

Fie ABC un triunghi, iar $M \in [AB]$, $N \in [AC]$. Atunci se ştie din gimnaziu:

Teorema lui Thales. Dreapta MN este paralelă cu dreapta BC dacă şi numai dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.

O paralelă la o latură a unui triunghi, determină pe celelalte două segmente proporţionale.



Să redemonstrăm acest rezultat în limbaj vectorial.

Dacă $MN||BC$ atunci vectorii $\overline{MN}$ şi $\overline{BC}$ sunt coliniari. Deci există $\alpha \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\overline{MN} = \alpha\overline{BC}$. Dar $\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM}$ şi $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$. Cum perechile de vectori $(\overline{AM}, \overline{AB})$, $(\overline{AN}, \overline{AC})$ conţin vectorii coliniari, există $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\overline{AM} = \beta\overline{AB}$, $\overline{AN} = \gamma\overline{AC}$. Cu acestea $\overline{MN} = \gamma\overline{AC} - \beta\overline{AB}$, $\overline{MN} = \alpha(\overline{AC} - \overline{AB})$, adică $\gamma\overline{AC} - \beta\overline{AB} = \alpha\overline{AC} - \alpha\overline{AB}$. Vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, fiind necoliniari deducem $\alpha = \beta = \gamma$. Aşadar, $AM = \alpha AB$, $AN = \alpha AC$, adică $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, iar de aici $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.

Reciproc, presupunem că $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ şi să demonstrăm că $MN||BC$ sau echivalent, vectorii $\overline{MN}$ şi $\overline{BC}$ sunt coliniari. Fie polul O fixat în plan. Din $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = k$, rezultă $\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + k\vec{r}_B}{1+k}$, $\vec{r}_N = \frac{\vec{r}_A + k\vec{r}_C}{1+k}$. Cu acestea avem $\overrightarrow{MN} = \vec{r}_N - \vec{r}_M = \frac{k}{1+k}(\vec{r}_C - \vec{r}_B) = \frac{k}{1+k}\overrightarrow{BC}$. Această relaţie arată că vectorii $\overline{MN}$ şi $\overline{BC}$ sunt coliniari, şi deci $MN||BC$. ■

Condiţia de coliniaritate a trei puncte

Fie $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_M$ vectorii de poziţie ai punctelor A, B şi respectiv M $(A \neq B)$ în raport cu O, $O \notin AB$. Atunci are loc următoarea

Teoremă. Punctele A, B, M sunt coliniare $\Leftrightarrow \vec{r}_M = \alpha\vec{r}_A + \beta\vec{r}_B$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta = 1$.

Demonstraţie. Punctele A, B, M sunt coliniare $\Leftrightarrow$ vectorii $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \vec{r}_M = \frac{1}{1+k}\vec{r}_A + \frac{k}{1+k}\vec{r}_B \Leftrightarrow \alpha\vec{r}_A + \beta\vec{r}_B = \frac{1}{1+k}\vec{r}_B + \frac{k}{1+k}\vec{r}_B \Leftrightarrow$

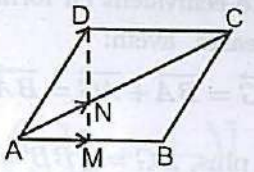
$\Leftrightarrow \left(\alpha = \frac{1}{1+k}, \beta = \frac{k}{1+k}\right)$. Ultima echivalenţă are loc deoarece vectorii $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ sunt necoliniari $(A \neq B)$. În plus, evident $\alpha + \beta = 1$. ■

Exemplu. Fie $ABCD$ un paralelogram. Pe $[AB]$ şi $[AC]$ se iau punctele M şi N, astfel încât $AM = \frac{1}{5}AB$, $AN = \frac{1}{6}AC$. Arătaţi că punctele D, N, M sunt coliniare.

R. Vom considera vectorii de poziţie faţă de polul $O = A$. Avem egalitatea $\vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$. Dar $\vec{r}_B = 5\vec{r}_M$, $\vec{r}_C = 6\vec{r}_N$.

De aici, $\vec{r}_N = \frac{1}{6}\vec{r}_C = \frac{1}{6}(\vec{r}_B + \vec{r}_D) = \frac{5}{6}\vec{r}_M + \frac{1}{6}\vec{r}_D$.

Aşadar, $\vec{r}_N = \alpha\vec{r}_M + \beta\vec{r}_D$, $\alpha = \frac{5}{6}$, $\beta = \frac{1}{6}$, $\alpha + \beta = 1$, ceea ce arată că punctele D, N şi M sunt coliniare.



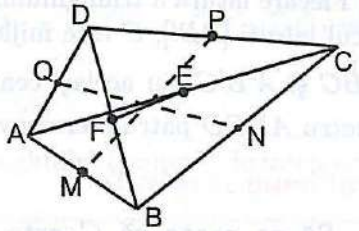
Condiţia de concurenţă a trei segmente

Se poate proba concurenţa unor segmente $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$,... arătând că un punct (de concurenţă) le împarte în acelaşi raport, adică vectorul lui de poziţie are aceeaşi exprimare.

$$\frac{\vec{r}_{A_1} + k_1\vec{r}_{B_1}}{1+k_1} = \frac{\vec{r}_{A_2} + k_1\vec{r}_{B_2}}{1+k_1} = \frac{\vec{r}_{A_3} + k_1\vec{r}_{B_3}}{1+k_1} = \dots$$

Aplicaţie. Fie $ABCD$ un patrulater. Să se arate că segmentele care unesc mijloacele laturilor opuse şi segmentul determinat de mijloacele diagonalelor sunt concurente.

R. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ şi respectiv $[AD]$, iar E, F mijloacele diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$. Ideea este de a arăta că segmentele din concluzia problemei au acelaşi mijloc, deci acelaşi vector de poziţie.



Pentru segmentul $[MP]$, mijlocul are vectorul de poziţie

$$\frac{1}{2}(\vec{r}_M + \vec{r}_P) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) + \frac{1}{2}(\vec{r}_C + \vec{r}_D)\right] = \frac{1}{4}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D) = \frac{1}{4}\left(\sum \vec{r}_A\right).$$

În mod similar pentru segmentele $[QN]$ şi $[EF]$ mijloacele lor au vectorii de poziţie

$\frac{1}{2}(\vec{r}_Q + \vec{r}_N) = \frac{1}{4}\left(\sum \vec{r}_A\right)$ şi respectiv $\frac{1}{2}(\vec{r}_E + \vec{r}_F) = \frac{1}{4}\left(\sum \vec{r}_A\right)$.

Deci, trei vectori de poziţie ai mijloacelor segmentelor coincid. Aceasta arată concurenţa celor trei segmente.

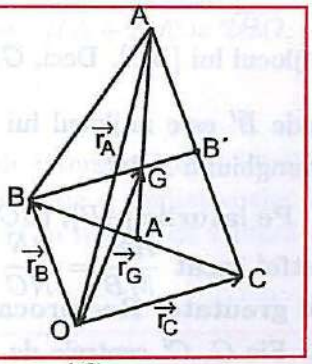
Vectorul de poziţie al centrului de greutate al unui triunghi

Considerăm triunghiul ABC şi punctul O arbitrar fixat. Notăm cu $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ vectorii de poziţie ai punctelor A, B şi respectiv C. Are loc următoarea

Teoremă. Medianele în triunghiul ABC sunt concurente în punctul G, numit **centrul de greutate al triunghiului**, având vectorul de poziţie

$$\vec{r}_G = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C), \quad (1)$$

Punctul G este situat pe fiecare mediană la $\frac{2}{3}$ de vârf şi $\frac{1}{3}$ de bază.



Demonstraţie. Fie mediana $[AA']$ pe care se consideră punctul G, astfel încât $\frac{AG}{GA'} = 2$. Atunci vectorul de poziţie al acestui punct are exprimarea

$$\vec{r}_G = \frac{\vec{r}_A + 2\vec{r}_{A'}}{1+2} = \frac{\vec{r}_A + (\vec{r}_B + \vec{r}_C)}{3} = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}, \quad (*).$$

Mai rămâne acum să arătăm că punctele B, G, B' sunt coliniare (B' este mijlocul lui $[AC]$). Aceasta

este echivalent cu formularea că vectorii $\overrightarrow{BG}$ şi $\overrightarrow{BB'}$ sunt coliniari. Din $\frac{AG}{GA'}=2$ rezultă $\frac{AG}{AA'}=\frac{2}{3}$. Cu aceasta, avem:

$$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'})=\overrightarrow{BA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}.$$

În plus, $BG=\frac{2}{3}BB'$ şi deci $\frac{BG}{GB'}=2$. Analog se arată coliniaritatea punctelor C, G, C' (C' este mijlocul lui $[AB]$). ■

Observaţii. **1)** Pentru coliniaritatea punctelor B, G, B' se poate utiliza $(*)$ şi condiţia de coliniaritate a trei puncte, expusă mai sus. Avem:

$$\vec{r}_G=\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C}{3}=\frac{\vec{r}_B+2\cdot\frac{1}{2}(\vec{r}_A+\vec{r}_C)}{1+2}=\frac{\vec{r}_B+2\vec{r}_{B'}}{1+2}=\frac{1}{3}\vec{r}_B+\frac{2}{3}\vec{r}_{B'}$$

(în care $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{2}{3}$ şi $\alpha+\beta=1$). Tot de aici se deduce $\frac{BG}{GB'}=2$.

2) Fiecare latură a triunghiului ABC se prelungeşte cu un segment egal cu latura astfel încât B este mijlocul laturii $[AB']$, C este mijlocul laturii $[BC']$ şi A este mijlocul laturii $[CA']$. Arătaţi că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate şi că $S_{ABC}=\frac{1}{7}S_{A'B'C'}$. Formulaţi o problemă analoagă pentru $ABCD$ patrulater convex.

Probleme rezolvate

1. Să se arate că G este centrul de greutate al triunghiului ABC, dacă şi numai dacă $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

R. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci are loc egalitatea (1) din teoremă. Vom rescrie egalitatea vectorială din problemă, utilizând vectorii de poziţie.

Avem: $\vec{r}_A-\vec{r}_G+\vec{r}_B-\vec{r}_G+\vec{r}_C-\vec{r}_G=\vec{0}$ sau $\sum\vec{r}_A=3\vec{r}_G$, care este adevărată.

Reciproc, presupunem că are loc relaţia $\sum\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ şi să arătăm că G este centrul de greutate al triunghiului. Dacă are loc relaţia $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ să probăm că G este centrul de greutate al triunghiului. Fie O un punct în plan şi vectorii de poziţie ai punctelor A, B, C, G respectiv $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$, $\vec{r}_G$.

Relaţia se rescrie $\vec{r}_G=\frac{1}{3}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C)$. De aici, $\vec{r}_G=\frac{\vec{r}_A+2\cdot\frac{1}{2}(\vec{r}_B+\vec{r}_C)}{1+2}=\frac{\vec{r}_A+2\vec{r}_{A'}}{1+2}$, unde A' este mijlocul lui $[BC]$. Deci, $G\in[AA']$ şi $\frac{AG}{GA'}=2$. Analog, din $\vec{r}_G=\frac{\vec{r}_B+2\cdot\frac{1}{2}(\vec{r}_A+\vec{r}_C)}{1+2}=\frac{\vec{r}_B+2\vec{r}_{B'}}{1+2}$, unde B' este mijlocul lui $[AC]$, rezultă $G\in[BB']$ şi $\frac{BG}{GB'}=2$. Deci G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

2. Pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ ale unui triunghi se construiesc punctele M, N şi respectiv P, astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}=k$. Arătaţi că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate. Reciproca este adevărată?

R. Fie G, G' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi MNP. Vom arăta că punctele G, G' au acelaşi vector de poziţie faţă de un punct fixat, O. Avem:

$$\vec{r}_G=\frac{1}{3}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C),\ \vec{r}_{G'}=\frac{1}{3}(\vec{r}_M+\vec{r}_N+\vec{r}_P).$$

Punctele M, N, P care împart laturile triunghiului în raportul k au vectorii de poziţie $\vec{r}_M=\frac{\vec{r}_A+k\vec{r}_B}{1+k}$, $\vec{r}_N=\frac{\vec{r}_B+k\vec{r}_C}{1+k}$, $\vec{r}_P=\frac{\vec{r}_C+k\vec{r}_A}{1+k}$. Înlocuind aceste exprimări în $\vec{r}_{G'}$, găsim $\vec{r}_G=\vec{r}_{G'}$, adică $G=G'$.

Arătăm că şi reciproca este adevărată. Fie $\frac{BN}{NC}=k$, $\frac{CP}{PA}=l$, $\frac{AM}{MB}=m$. Vom considera punctul B ca pol şi vom exprima ceilalţi vectori în funcţie de vectorii necoliniari $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{BA}$.

Ştim că $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$ şi $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BM}\right)$. Dar,

$$\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\left[\frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC}+\frac{\overrightarrow{BC}+l\overrightarrow{BA}}{1+l}+\frac{1}{m+1}\overrightarrow{BA}\right]=\frac{1}{3}\left[\overrightarrow{BC}\left(\frac{k}{k+1}+\frac{1}{l+1}\right)+\overrightarrow{BA}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{l}{l+1}\right)\right].$$

Cum $\overrightarrow{BG}$ are o exprimare unică funcţie de $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{BA}$, deducem egalităţile:

$\frac{k}{k+1}+\frac{1}{l+1}=1$, $\frac{1}{m+1}+\frac{l}{l+1}=1$. De aici $k=l$ şi $l=m$, adică $l=k=m$.

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi O intersecţia diagonalelor sale. Arătaţi că centrele de greutate ale triunghiurilor OAB, OBC, OCD şi ODA sunt vârfurile unui paralelogram.

R. Fie G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor. Avem

$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OG_4}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA})$.

Deci $\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_3}=\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_4}\Rightarrow\overrightarrow{OG_3}-\overrightarrow{OG_4}=\overrightarrow{OG_2}-\overrightarrow{OG_1}\Rightarrow\overrightarrow{G_4G_3}=\overrightarrow{G_1G_2}\Rightarrow G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.

Vectorul de poziţie al centrului cercului circumscris unui triunghi

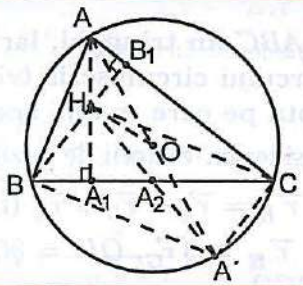
Fie ABC un triunghi, O centrul cercului circumscris şi H ortocentrul triunghiului (punctul de intersecţie al înălţimilor). Atunci are loc:

Relaţia lui Sylvester:

$$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$$

Luând H ca pol, relaţia se rescrie

$$\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C=2\vec{r}_O.$$



Demonstraţie. Fie A' punctul diametral opus lui A, $[AA_1]$, $[BB_1]$ înălţimi. Patrulaterul $BHCA'$ este paralelogram ($A'C\perp AC$, $BB_1\perp AC\Rightarrow A'C\|BB_1$; $CH\perp AB$, $A'B\perp AB\Rightarrow CH\|A'B$). Deci diagonalele sale se înjumătăţesc în A_2. Avem: $\overrightarrow{HA'}=\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}$. Adunând aici $\overrightarrow{HA}$ rezultă $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA'}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}$. În triunghiul AHA', $[HO]$ este mediană şi deci $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA'}=2\overrightarrow{HO}$. Deci $2\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}$. ■

Vectorul de poziţie al ortocentrului unui triunghi

Reamintim că dat fiind un triunghi ABC, ortocentrul său, H, este punctul de intersecţie al înălţimilor sale, iar centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC se obţine ca intersecţie a mediatoarelor laturilor $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$. Vom determina vectorul de poziţie al ortocentrului H în funcţie de vectorii de poziţie ai punctelor A, B, C când polul este punctul O.

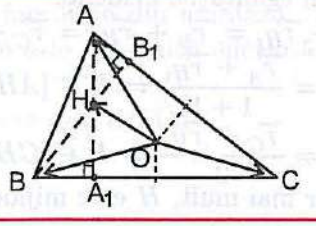
Mai precis, are loc următoarea:

Teoremă. (Relaţia lui Sylvester)

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

Dacă polul este O, atunci

$$\vec{r}_H=\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C.$$



Demonstraţie. Ca şi în teorema precedentă, A' este punctul diametral opus lui A. Patrulaterul $BHCA'$ fiind paralelogram, avem relaţia $\vec{r}_H + \vec{r}_{A'} = \vec{r}_B + \vec{r}_C$. Dar $\vec{r}_{A'} = -\vec{r}_A$ şi deci $\vec{r}_H = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$. ■

Consecinţă. Înălţimile într-un triunghi sunt concurente.

Demonstraţie. Fie $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$, iar $AA_1 \cap BB_1 = \{H\}$. De mai sus $\vec{r}_H = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$, (1). Considerăm $CC_1 \perp AB$, a treia înălţime a triunghiului şi fie $CC_1 \cap AA_1 = \{H_1\}$. Atunci, din demonstraţia teoremei $\vec{r}_{H_1} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$, (2). Din (1) şi (2), $\vec{r}_H = \vec{r}_{H_1}$ şi deci $H = H_1$, adică înălţimile sunt concurente în H. ■

Observaţii. 1) Din relaţia lui Sylvester $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$, deducem relaţiile $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG}$, iar de aici $2\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{HG}$ (punctele H, G, O sunt coliniare). Într-adevăr $\sum \overrightarrow{HA} = \sum \left(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}\right) = 3\overrightarrow{HO} + \sum \overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{HO}$ şi $\sum \overrightarrow{HA} = \sum \left(\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GA}\right) = 3\overrightarrow{HG} + \sum \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{HG}$.

2) Dacă $ABCD$ este patrulater inscriptibil H_1, H_2, H_3, H_4 sunt ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB şi ABC. atunci patrulaterele $ABCD$, $H_1H_2H_3H_4$ sunt congruente. Într-adevăr, dacă O este centrul cercului circumscris patrulaterului $ABCD$, atunci $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$, $\ldots, \Rightarrow \overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = -(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = -\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{H_3H_4} = -\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{H_2H_3} = -\overrightarrow{BC} \Rightarrow$ $\Rightarrow ABCD \equiv H_1H_2H_3H_4$.

Probleme rezolvate

1. **Fie ABC un triunghi, iar H, G, O sunt ortocentrul, centrul de greutate şi respectiv centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că punctele H, G, O sunt coliniare. (Dreapta pe care se află aceste puncte se numeşte dreapta lui Euler.)**

R. Considerăm vectorii de poziţie de pol O şi arătăm că vectorii $\vec{r}_G$ şi $\vec{r}_H$ sunt coliniari.

Avem: $\vec{r}_H = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$ (relaţia lui Sylvester), şi $\vec{r}_G = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$.

De aici $\vec{r}_H = 3\vec{r}_G$, $OH = 3OG$ sau $HG = 2OG$. Prin urmare, punctele H, G, O sunt coliniare şi $HG = 2GO$.

2. **Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB şi respectiv ABC. Să se arate că dreptele AH_1, BH_2, CH_3, DH_4 sunt concurente.**

R. Ideea de rezolvare este de a arăta că punctul de intersecţie, dacă există, aparţine tuturor dreptelor. Fie O centrul cercului circumscris patrulaterului. Vom scrie vectorii de poziţie ai punctelor raportaţi la O. Din relaţia lui Sylvester, avem:

$\vec{r}_{H_1} = \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D$, $\vec{r}_{H_2} = \vec{r}_A + \vec{r}_C + \vec{r}_D$, $\vec{r}_{H_3} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_D$, $\vec{r}_{H_4} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$.

Considerăm punctul H definit de vectorul de poziţie

$\vec{r}_H = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D)$.

Vom arăta că H aparţine segmentelor $[AH_1]$, $[BH_2]$, $[CH_3]$, $[DH_4]$, ceea ce înseamnă că el este punctul lor de intersecţie.

Avem egalităţile evidente:

$\vec{r}_A + \vec{r}_{H_1} = \vec{r}_B + \vec{r}_{H_2} = \vec{r}_C + \vec{r}_{H_3} = \vec{r}_D + \vec{r}_{H_4} = 2\vec{r}_H$. De aici

$\vec{r}_H = \dfrac{\vec{r}_A + \vec{r}_{H_1}}{1+1} \Rightarrow H \in [AH_1]$, $\vec{r}_H = \dfrac{\vec{r}_B + \vec{r}_{H_2}}{2} \Rightarrow H \in [AH_2]$,

$\vec{r}_H = \dfrac{\vec{r}_C + \vec{r}_{H_3}}{2} \Rightarrow H \in [CH_3]$, $\vec{r}_H = \dfrac{\vec{r}_D + \vec{r}_{H_4}}{2} \Rightarrow H \in [DH_4]$.

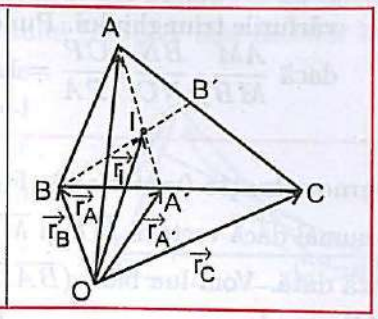
Chiar mai mult, H este mijlocul acestor segmente. Deci, dreptele sunt concurente.

Vectorul de poziţie al centrului cercului înscris în triunghi

Fie ABC un triunghi, iar $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ bisectoarele unghiurilor A, B şi respectiv C, iar O un punct arbitrar (pol) în raport cu care luăm vectorii de poziţie ai punctelor din plan. Notăm $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Are loc următoarea

Teoremă. Vectorul de poziţie al punctului I de intersecţie a bisectoarele unghiurilor unui triunghi ABC este dat de formula

$$\vec{r}_I = \frac{a}{a+b+c}\vec{r}_A + \frac{b}{a+b+c}\vec{r}_B + \frac{c}{a+b+c}\vec{r}_C.$$



Demonstraţie. Din teorema bisectoarei rezultă $\frac{BA'}{A'C} = \frac{c}{b}$ şi deci

$$\vec{r}_{A'} = \frac{\vec{r}_B + \frac{c}{b}\vec{r}_C}{1+\frac{c}{b}} = \frac{b}{b+c}\vec{r}_B + \frac{c}{b+c}\vec{r}_C, \quad (1).$$

Fie $AA' \cap BB' = \{I\}$. În triunghiul ABA' teorema bisectoarei (pentru $[AI]$) ne dă $\frac{AI}{IA'} = \frac{AB}{BA'} = \frac{c}{BA'}$, unde $\frac{BA'}{A'C} = \frac{c}{b}$ dă $\frac{BA'}{BC} = \frac{c}{b+c}$, adică $BA' = \frac{ac}{b+c}$. Aşadar, $\frac{AI}{IA'} = \frac{b+c}{a}$. Vectorul de poziţie al lui $I \in [AA']$ este dat de egalitatea $\vec{r}_I = \frac{\vec{r}_A + \frac{b+c}{a}\vec{r}_A}{1+\frac{b+c}{a}} = \frac{a}{a+b+c}\vec{r}_A + \frac{b+c}{a+b+c}\vec{r}_{A'}$, (2).

Ţinând seamă de (1), relaţia (2) devine $\vec{r}_I = \frac{a}{a+b+c}\vec{r}_A + \frac{b}{a+b+c}\vec{r}_B + \frac{c}{a+b+c}\vec{r}_C$. ■

Observaţie. Dacă $AA' \cap CC' = \{I_1\}$, atunci, ca mai sus, $\vec{r}_{I_1} = \vec{r}_I \Leftrightarrow I = I_1$, ceea ce arată că bisectoarele într-un triunghi sunt concurente. Dacă $O = I$, atunci $a\overrightarrow{AI} + b\overrightarrow{BI} + c\overrightarrow{CI} = \vec{0}$.

Aplicaţie. Dacă $\vec{u} = \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$, $\vec{v} = a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}$, ($ABC$ triunghi, I centrul cercului înscris, G centrul de greutate), atunci $\vec{u}$ şi $\vec{u}$ sunt coliniari şi $3|\vec{v}| = (a+b+c)|\vec{u}|$.

R. Din teoremă, pentru $O = G$, avem $\vec{v} = (a+b+c)\overrightarrow{GI}$, iar din $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$ deducem (pentru $M = I$), $3\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$ şi deci $\vec{u} = 3\overrightarrow{IG}$. Aşadar, $\vec{v} = -\frac{a+b+c}{3}\vec{u}$, ceea ce arată că vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari, iar $3|\vec{v}| = (a+b+c)|\vec{u}|$.

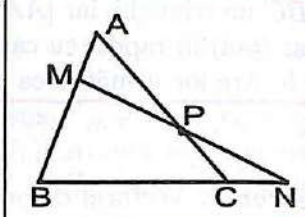
Probleme de coliniaritate. Teorema lui Menelaos

În cele ce urmează, vom prezenta mai multe tehnici (metode) pentru a proba coliniaritatea a trei puncte (pe care le presupunem distincte). O parte din aceste metode vă sunt familiare din gimnaziu, altele sunt noi. Metoda vectorială descrisă în paragrafele precedente a arătat că este o tehnică eficientă dacă stăpâniţi calculul vectorial şi formulaţi în mod adecvat cerinţele.

Una dintre metodele fecunde pentru a demonstra coliniaritatea a trei puncte este dată de

Metoda 1 (Reciproca teoremei lui Menelaos). Prezentăm pentru aceasta

Teorema lui Menelaos. Fie ABC un triunghi, iar M, N, P puncte pe laturile (sau prelungiri) $[AB]$, $[BC]$ şi respectiv $[AC]$, diferite de vârfurile triunghiului. Punctele M, N, P sunt coliniare dacă şi numai dacă $\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{CP}{PA}=1$.



Demonstraţie (vectorială). Fie $\dfrac{AM}{MB}=\alpha$, $\dfrac{BN}{NC}=\beta$, $\dfrac{CP}{PA}=\gamma$. Punctele M, N, P sunt coliniare, dacă şi numai dacă vectorii $\overline{MP}$ şi $\overline{MN}$ sunt coliniari, echivalent cu proporţionalitatea coordonatelor lor într-o bază dată. Vom lua baza $(\overline{BA},\overline{BC})$. Avem: $\overline{MN}=\overline{MB}+\overline{BN}$, (1). Din $\dfrac{MA}{MB}=\alpha$ rezultă $\dfrac{MB}{AB}=\dfrac{1}{\alpha+1}$, adică $\overline{MB}=\dfrac{1}{\alpha+1}\overline{AB}=-\dfrac{1}{\alpha+1}\overline{BA}$, (2). Analog găsim $\overline{BN}=\dfrac{\beta}{\beta-1}\overline{BC}$, (3).

Ţinând seama de (2) şi (3), (1) devine: $\overline{MN}=-\dfrac{1}{\alpha+1}\overline{BA}+\dfrac{\beta}{\beta-1}\overline{BC}$, (*).

Vectorul $\overline{MP}$, din triunghiul MBP, are exprimarea $\overline{MP}=\overline{MB}+\overline{BP}$, (4).

Dar $\overline{MB}=-\dfrac{1}{\alpha+1}\overline{BA}$, iar $\overline{BP}=\dfrac{\overline{BC}+\gamma\overline{BA}}{1+\gamma}$ şi deci (4) devine:

$\overline{MP}=\left(\dfrac{\gamma}{1+\gamma}-\dfrac{1}{\alpha+1}\right)\overline{BA}+\dfrac{1}{1+\gamma}\overline{BC}$, (**).

Punem condiţia ca vectorii $\overline{MN}$ şi $\overline{MP}$ daţi de (*) şi (**) să aibă coeficienţii proporţionali. Avem:

$$\frac{-\dfrac{1}{\alpha+1}}{\dfrac{\gamma}{1+\gamma}-\dfrac{1}{\alpha+1}}=\frac{\dfrac{\beta}{\beta-1}}{\dfrac{1}{1+\gamma}}\Leftrightarrow\alpha\beta\gamma=1.\ \blacksquare$$

Observaţie. Utilizând formula pentru aria triunghiului $S=\dfrac{ab\sin C}{2}$ şi $\sin(\pi-A)=\sin A$ au loc egalităţile: $\dfrac{S_{PCN}}{S_{MAP}}=\dfrac{PC\cdot PN}{PM\cdot PA}$, $\dfrac{S_{MAP}}{S_{MBN}}=\dfrac{AM\cdot MP}{BM\cdot MN}$, $\dfrac{S_{MBN}}{S_{PCN}}=\dfrac{NM\cdot NB}{NP\cdot NC}$, care se înmulţesc.

Soluţia sintetică. Presupunem că M, N, P sunt coliniare şi să arătăm că produsul de rapoarte este egal cu 1. Ducem $CD\|AB$, $D\in MN$. Din teorema fundamentală a asemănării avem perechile de triunghiuri asemenea: $\triangle NCD\sim\triangle NBM\left(\Rightarrow\dfrac{NB}{NC}=\dfrac{MB}{CD}\right)$, $\triangle CDP\sim\triangle MAP\left(\Rightarrow\dfrac{PC}{PA}=\dfrac{CD}{AM}\right)$.

Înmulţind egalităţile din parantezele rotunde, rezultă $\dfrac{NB}{NC}\cdot\dfrac{PC}{PA}=\dfrac{MB}{CD}\cdot\dfrac{CD}{AM}$ sau $\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{CP}{PA}=1$, adică relaţia de demonstrat. Reciproc, dacă are loc relaţia $\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{CP}{PA}=1$, (1), atunci să arătăm că M, N, P sunt puncte coliniare. Vom proceda prin reducere la absurd. Presupunem că M, N, P nu sunt coliniare. Fie $MP\cap BC=\{N'\}$. Conform teoremei directe, avem $\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN'}{N'C}\cdot\dfrac{CP}{PA}=1$, (2). Din (1) şi (2), rezultă $\dfrac{BN'}{N'C}=\dfrac{BN}{NC}$. De aici, $N'=N$, deoarece există un singur punct pe segment (sau în afara lui), care-l împarte într-un raport dat. Contradicţie!. În final, M, N, P sunt coliniare. $\blacksquare$

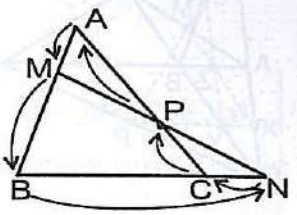
Observaţii. 1) Refaceţi demonstraţia în cazul punctelor M, N, P, situate pe prelungirile laturilor.

2) Pentru coliniaritatea punctelor M, N, P, folosim reciproca teoremei lui Menelaos. Se calculează rapoartele $\dfrac{AM}{MB}$, $\dfrac{BN}{NC}$, $\dfrac{CP}{PA}$. Dacă produsul lor este egal cu 1, atunci punctele sunt coliniare.

Orice dreaptă care taie două laturi ale unui triunghi şi prelungirea celei de a treia laturi (care însă nu

trece printr-un vârf al triunghiului) sau prelungirile laturilor, se numeşte **transversală.**
Când aplicăm teorema lui Menelaos, trebuie să indicăm triunghiul şi transversala sub forma: **pentru triunghiul ABC şi transversala $\overline{MNP}$ aplicăm teorema lui Menelaos.** Uneori, cele două elemente le marcăm între paranteze rotunde $(ABC, \overline{MNP})$.

3) Să observăm că punctele M, N, P împart laturile triunghiului din interiorul sau exteriorul lor într-un raport dat. În cazul figurii din enunţul teoremei, M este interior segmentului $[AB]$, N este exterior lui $[BC]$, iar P este interior lui $[AC]$. Produsul de rapoarte de mai sus se poate reţine uşor grafic, plecând din vârful A cu creionul, descriem arcul care-l uneşte cu M, iar apoi, fără să ridicăm creionul de pe hârtie, unim pe M cu B tot printr-un arc. Până aici, am evidenţiat raportul $\frac{AM}{MB}$. Pe B îl unim cu N (corespunzător laturii $[BC]$ – aici prelungirea ei), iar acesta cu C. Am descris raportul $\frac{BN}{NC}$.



De aici, unim pe C cu P şi apoi acesta se uneşte cu A, întorcându-ne de unde am început. În ultimul pas, am descris raportul $\frac{CP}{PA}$.

4) Dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$, $\frac{CP}{PA} = \frac{3}{5}$, atunci determinaţi $\frac{BN}{NC}$. Consideraţi şi alte valori pentru cele două rapoarte date.

Probleme rezolvate

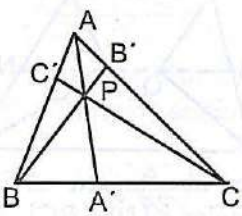
1. (Relaţia lui Van Aubel) Fie ABC un triunghi şi trei ceviene, AA', BB', CC', concurente în punctul P. Atunci are loc relaţia lui Van Aubel: $\frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{AP}{PA'}$.

(Prin **cevianã** într-un triunghi, înţelegem orice dreaptă care trece printr-un vârf al triunghiului).

R. Rapoartele care apar în membrul stâng ne sugerează să aplicăm, pentru exprimarea lor, teorema lui Menelaos pentru:

1) **triunghiul $AA'C$ şi transversala $\overline{BPB'}$**, când avem:

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CB}{BA'} \cdot \frac{A'P}{PA} = 1, \text{ iar de aici } \frac{AB'}{B'C} = \frac{BA'}{CB} \cdot \frac{PA}{A'P}, \quad (1).$$



2) **triunghiul $AA'B$ şi transversala $\overline{CPC'}$**:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BC}{CA'} \cdot \frac{A'P}{PA} = 1, \text{ când } \frac{AC'}{C'B} = \frac{CA'}{BC} \cdot \frac{PA}{A'P}, \quad (2).$$

Se adună (1) cu (2) şi rezultă relaţia dorită.

Altfel. Folosind ariile în exprimarea rapoartelor. Avem:

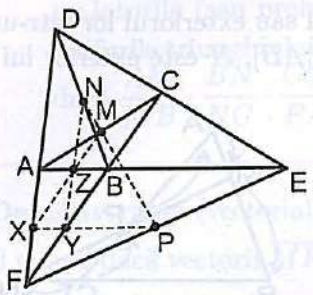
$$\frac{B'A}{B'C} = \frac{S_{ABA'}}{S_{BCB'}} = \frac{S_{ABP}}{S_{BPC}}, \frac{AC'}{C'B} = \frac{S_{PAC}}{S_{BPC}}, \text{ iar}$$

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{S_{ABP}}{S_{PA'B}} = \frac{S_{PAC}}{S_{PA'C}} = \frac{S_{ABP} + S_{PAC}}{S_{PA'B} + S_{PA'C}} = \frac{S_{ABP} + S_{PAC}}{S_{BPC}} = \frac{B'A}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}.$$

2. (Dreapta lui Newton–Gauss) Fie patrulaterul $ABCD$ în care prelungirile laturilor opuse $[AB]$ şi $[CD]$ se taie în E, iar prelungirile laturilor $[AD]$ şi $[BC]$ se taie în F. Figura astfel obţinută se numeşte patrulater complet, notat $ABCDEF$. Punctele A, B, C, D, E, F se numesc vârfurile patrulaterului, iar segmentele $[AC]$, $[BD]$ şi $[EF]$ se numesc diagonalele patrulaterului complet. Să se arate că mijloacele celor trei diagonale ale unui patrulater complet sunt coliniare (Dreapta pe care se află cele trei puncte se numeşte dreapta Newton–Gauss).

R. Fie M, N, P mijloacele diagonalelor $[AC]$ $[BD]$ şi respectiv $[EF]$ şi X, Y, Z mijloacele segmentelor $[AF]$, $[BF]$ şi respectiv $[AB]$.

Observăm că $[XY]$, $[YZ]$, $[XZ]$ sunt linii mijlocii în triunghiul ABF. Deci $XY||AB$, $YZ||AF$, $XZ||BF$ şi punctele M, N, P sunt pe prelungirile acestor drepte (printr-un punct exterior unei drepte se duce o singură paralelă la acea dreaptă), $P \in XY$, $N \in YZ$, $M \in XZ$.



Ideea de demonstraţie este de a aplica reciproca teoremei lui Menelaos pentru triunghiul XYZ şi punctele M, N, P, adică să arătăm că are loc egalitatea $\frac{XP}{PY} \cdot \frac{YN}{NZ} \cdot \frac{ZM}{MX} = 1$. Pentru aceasta, vom evalua rapoartele respective. Din $XP||AE$ rezultă $\frac{PX}{PY} = \frac{AE}{EB}$, (1).

Analog, $\frac{YN}{YZ} = \frac{FD}{FA}$ $(YN||DF)$, (2) şi $\frac{ZM}{MX} = \frac{BC}{FC}$ $(XM||FC)$, (3).

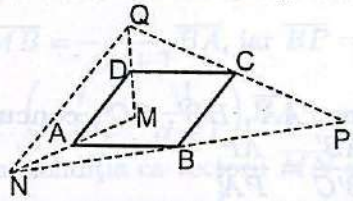
Înmulţim relaţiile (1), (2), (3), membru cu membru, şi avem:

$$\frac{PX}{PY} \cdot \frac{YN}{NZ} \cdot \frac{ZM}{MX} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{FD}{FA} \cdot \frac{BC}{FC} = 1,$$

deoarece este teorema lui Menelaos aplicată pentru triunghiul ABF şi transversala $\overline{DCE}$.

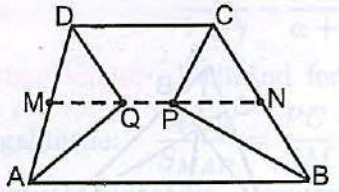
Metoda 2 (cu ajutorul mijlocului unui segment). Dacă A, B, C sunt punctele, atunci ele sunt coliniare, dacă de exemplu arătăm că B este mijlocul lui $[AC]$.

Exemplu. Se consideră un punct M în interiorul paralelogramului $ABCD$. Fie N simetricul lui M faţă de A, P simetricul lui N faţă de B şi Q simetricul lui P faţă de C. Arătaţi că M, D, Q sunt coliniare şi $MD = DQ$.



R. În triunghiul NPQ, $[BC]$ este linie mijlocie. Deci $BC||NQ$ şi $NQ = 2BC$. Cum $AD||BC$ şi $AD = BC$, deducem $NQ = 2AD$, $NQ||AD$. Dar A este mijlocul lui $[MN]$. De aici rezultă că D este mijlocul segmentului $[MQ]$ şi $MD = DQ$.

Metoda 3 (cu ajutorul distanţelor). Punctele M, N, P situate de aceeaşi parte a unei drepte sunt coliniare, dacă sunt la aceeaşi distanţă de acea dreaptă.



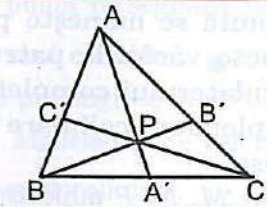
Exemplu. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB||CD$. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ se taie în P, iar bisectoarele unghiurilor $\widehat{CDA}$, $\widehat{DAB}$ se taie în Q. Arătaţi că punctele P, Q, mijloacele laturilor $[AD]$ şi $[BC]$ sunt coliniare.

R. În rezolvarea problemei utilizăm proprietatea pe care o au punctele de pe bisectoarea unui unghi: se află la egală distanţă de laturile unghiului. Fie M, N mijloacele segmentelor $[AD]$, $[BC]$. Notăm $d(P, AB)$ distanţa de la P la dreapta AB. Din enunţ, rezultă $d(P, AB) = d(P, BC) = d(P, CD)$, adică P este la mijlocul distanţei dintre dreptele AB, CD. Deci $P \in [MN]$ (linia mijlocie a trapezului). Analog se arată că $Q \in [MN]$. Deci, punctele M, Q, P, N sunt coliniare.

Probleme de concurenţă. Teorema lui Ceva

Pentru a demonstra concurenţa unor linii într-un triunghi, vom prezenta, ca şi în cazul coliniarităţii a trei puncte, mai multe tehnici. Cunoaşterea lor ajută la rezolvarea unor asemenea probleme. Una dintre metodele cele mai eficiente are la bază reciproca teoremei lui Ceva. Reamintim că prin **ceviană** într-un triunghi, se înţelege orice dreaptă care trece printr-un vârf al triunghiului.

Teorema lui Ceva. Fie ABC un triunghi şi punctele $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente, atunci $\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$.



Demonstraţie. Fie P punctul de intersecţie al cevienelor AA', BB', CC'. Aplicăm teorema lui Menelaos pentru triunghiul ABA' şi ceviana $\overline{CPC'}$ şi avem:

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BC}{CA'}\cdot\frac{A'P}{PA}=1,\ (1).$$

Aceeaşi teoremă, aplicată triunghiului $AA'C$ şi cevienei $\overline{BPB'}$ ne dă egalitatea:

$$\frac{A'B}{BC}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AP}{PA'}=1,\ (2).$$

Înmulţind, membru cu membru, relaţiile (1) şi (2) se obţine relaţia dorită. ■

Reciproca teoremei lui Ceva. Fie ABC un triunghi şi punctele $A'\in BC$, $B'\in AC$, $C'\in AB$. Dacă are loc relaţia $\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$, atunci cevienele AA', BB', CC' sunt concurente.

Demonstraţie. Presupunem că $AA'\cap BB'=\{P\}$. Fie $\{C_1\}=CP\cap AB$. Vom arăta că $C_1=C'$, ceea ce înseamnă că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

Pentru cevienele AA', BB', CC_1 scriem teorema lui Ceva şi avem: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1.$

Din această egalitate şi cea din ipoteză, deducem $\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC_1}{C_1B}$.

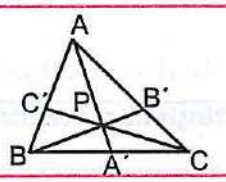
Ştim că există un singur punct interior (sau exterior) care împarte un segment într-un raport dat.

Deci $C'=C_1$. ■

Cu acestea, teorema lui Ceva o putem formula astfel:

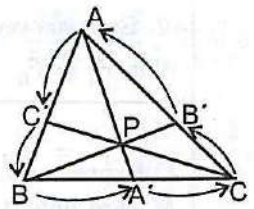
Fie ABC un triunghi şi $A'\in BC$, $B'\in AC$, $C'\in AB$.

Cevienele AA', BB', CC' sunt concurente $\Leftrightarrow \frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1.$



Observaţie. Ca şi în cazul teoremei lui Menelaos, produsul de rapoarte care apar în teorema lui Ceva se poate reţine astfel. Se alege un vârf al triunghiului, să spunem A. Punctele A', B', C' împart segmentele $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ în rapoarte care apar în relaţie.

Plecând din A, ducem arcul care-l uneşte cu C' şi apoi arcul care uneşte pe C' cu B. În continuare, se uneşte B cu A' (punctul care împarte segmentul $[BC]$ în al doilea raport) şi apoi A' cu C. În final, unim C cu B' (punctul care împarte pe $[AC]$ în ultimul raport din teoremă) şi apoi B' cu A, ajungând la punctul de la care am plecat.



Soluţia vectorială a teoremei lui Ceva Fie $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ vectorii de poziţie ai vârfurilor triunghiului. Notăm $\frac{AC'}{C'B}=k$, $\frac{BA'}{A'C}=l$, $\frac{CB'}{B'A}=m$ şi avem: $\vec{r}_{C'}=\frac{\vec{r}_A+k\vec{r}_B}{1+k}$, $\vec{r}_{A'}=\frac{\vec{r}_B+l\vec{r}_C}{1+l}$, $\vec{r}_{B'}=\frac{\vec{r}_C+m\vec{r}_A}{1+m}$.

Dacă P este punctul de intersecţie al cevienelor, iar $\vec{r}_P$ este vectorul său de poziţie, atunci avem (din condiţia de coliniaritate a trei puncte):

$\vec{r}_P=x\vec{r}_{A'}+(1-x)\vec{r}_A$ $(P\in AA')$, $\vec{r}_P=y\vec{r}_{C'}+(1-y)\vec{r}_C$ $(P\in CC')$,

$\vec{r}_P=z\vec{r}_{B'}+(1-z)\vec{r}_B$ $(P\in BB')$. Putem presupune că A este polul şi deci $\vec{r}_A=0$.

Egalând aceşti trei vectori şi identificând coeficienţii, rezultă sistemul

$\frac{x}{1+l}=1-y$, $\frac{lx}{1+l}=\frac{y}{1+m}$, $\frac{x}{1+l}=\frac{zk}{1+k}$, $\frac{lx}{1+l}=1-z$. Din cele patru relaţii se pot elimina x,y,z

şi rezultă $klm = 1$. ■

Observaţii. **1)** Tehnica dezvoltată aici este benefică în a demonstra concurenţa a trei drepte. Dacă $AA' \cap BB' = \{P\}$, atunci pentru a proba că CC' trece prin P arătăm că punctele C, P, C' sunt coliniare, demonstrând o egalitate de forma $\vec{r}_P = \alpha\vec{r}_C + \beta\vec{r}_{C'}$, $\alpha + \beta = 1$.

2) Utilizând reciproca teoremei lui Ceva se probează concurenţa unor linii importante în triunghi.

a) **Concurenţa medianelor.** În acest caz A', B', C' sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ şi respectiv $[AC]$. Deci $\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Deci, medianele într-un triunghi sunt concurente.

b) **Concurenţa bisectoarelor.** Cum $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ sunt bisectoare, avem relaţiile (teorema bisectoarei) $\frac{AC'}{C'B} = \frac{b}{a}$, $\frac{BA'}{A'C} = \frac{c}{b}$, $\frac{CB'}{B'A} = \frac{a}{c}$ (unde $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$).

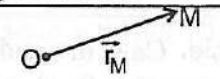
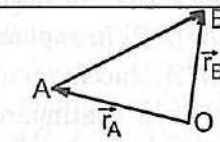
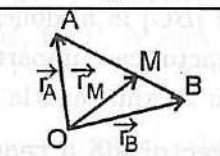
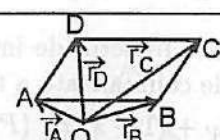
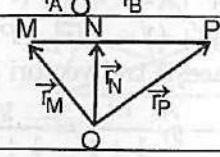
De aici $\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1$. Aşadar, bisectoarele într-un triunghi sunt concurente.

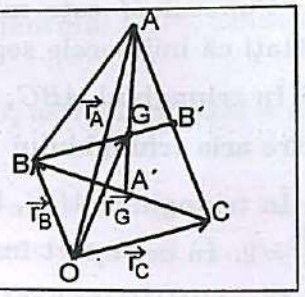
c) **Concurenţa înălţimilor.** Vom exprima segmentele din rapoarte din triunghiurile dreptunghice formate. Din triunghiul $AC'C$ rezultă $\cos A = \frac{AC'}{AC}$, adică $AC' = b\cos A$. Analog, din triunghiul dreptunghic $CC'B$, $BC' = a\cos B$. Cu acestea, primul raport din teoremă este egal cu $\cos\frac{AC'}{C'B} = \frac{b\cos A}{a\cos B}$.

Analog, celelalte rapoarte se exprimă astfel: $\frac{BA'}{A'C} = \frac{c\cos B}{b\cos C}$, $\frac{CB'}{B'A} = \frac{a\cos C}{c\cos A}$.

Se verifică uşor că produsul acestor trei rapoarte este egal cu 1. Deci, înălţimile într-un triunghi sunt concurente.

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noţiuni şi rezultate	Formula matematică	Reprezentarea geometrică
1. Vectorul de poziţie al punctului M în raport cu polul O.	$\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$	
2. Expresia vectorului $\overrightarrow{AB}$ cu ajutorul vectorilor $\vec{r}_A$ şi $\vec{r}_B$	$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$	
3. Expresia vectorului de poziţie al punctului M care împarte segmentul $[AB]$ în raportul $\frac{AM}{MB} = k$. Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$	$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + k\vec{r}_B}{1+k}$. $\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$	
4. $ABCD$ este paralelogram, dacă şi numai dacă	$\vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$	
5. Punctele M, N, P sunt coliniare, dacă şi numai dacă	$\exists\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta = 1$, $\vec{r}_N = \alpha\vec{r}_M + \beta\vec{r}_P$	

6. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC, dacă şi numai dacă	$\vec{r}_G = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$	

Probleme propuse

1. Vectorul de poziţie al unui punct

1. a) Pe segmentul $[AB]$ se consideră punctele C_1, C_2, C_3, astfel încât $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3B$. Determinaţi vectorii de poziţie ai punctelor C_1, C_2, C_3 în funcţie de vectorii de poziţie ai punctelor A, B.

b) Fie segmentul $[AB]$, $M \in [AB]$, $AM = 3MB$, $P \in AB$, $A \in [PB]$, $PA = \frac{1}{3}AB$. Să se determine vectorii de poziţie ai punctelor M şi P în funcţie de $\vec{r}_A$ şi $\vec{r}_B$.

2. Se consideră segmentul $[AB]$ pe care se iau punctele M, N pentru care $\frac{AM}{MN} = \frac{1}{2}$ şi $\frac{MN}{NB} = \frac{2}{3}$. Exprimaţi vectorii de poziţie ai punctelor M, N în funcţie de vectorii de poziţie ai punctelor A şi B.

3. Pe o dreaptă se consideră punctele, în ordine, A, B, C, D, astfel încât $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$. Pe segmentul $[BC]$ se ia punctul M, astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{3}{4}$. Determinaţi vectorul de poziţie al punctului M în raport de vectorii de poziţie ai punctelor A şi D.

4. Se consideră paralelogramul $ABCD$, $AB < AD$. Bisectoarea unghiului $\widehat{DAB}$ taie latura $[BC]$ în K şi prelungirea laturii $[DC]$ în M, $BK = 3$ şi $MC = 1$. Arătaţi că $4\overrightarrow{AK} = 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$.

5. În trapezul $ABCD$, bazele $AB = 7$, $CD = 3$, iar $M \in [AD]$, astfel încât $\frac{AM}{MD} = \frac{7}{3}$. Dacă $MN \| AB$, $N \in [CD]$, atunci arătaţi că $5\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{AB}$.

6. Se consideră triunghiul ABC, $M \in [AB]$, $AB = 5$, $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$, $N \in [AC]$, $AC = 7$, $\frac{AN}{NC} = \frac{2}{5}$, $BN \cap CM = \{P\}$.

1) Determinaţi vectorii de poziţie ai punctelor M, N în raport cu un pol O.

2) Determinaţi rapoartele $\frac{BP}{PN}$, $\frac{CP}{PM}$.

7. Fie $ABCD$ un pătrat şi $A_1 \in [AB]$, $B_1 \in [BC]$, $C_1 \in [CD]$, $D_1 \in [DA]$, astfel încât $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{DD_1}{D_1A} = k$. Arătaţi că $A_1B_1C_1D_1$ este pătrat.

8. În paralelogramul $ABCD$, M este mijlocul laturii $[BC]$, N este mijlocul laturii $[CD]$. Arătaţi că dreptele AM şi AN taie pe diagonala $[BD]$ segmente congruente.

9. Arătaţi că, dacă punctul O de intersecţie al diagonalelor patrulaterului $ABCD$ şi M, N mijloacele laturilor opuse $[AB]$ şi $[CD]$ sunt coliniare, atunci $ABCD$ este trapez sau paralelogram.

10. Punctul M este mijlocul segmentului $[AB]$, iar M' este mijlocul segmentului $[A'B']$. Arătaţi că mijloacele segmentelor $[AA']$, $[MM']$, $[BB']$ sunt coliniare.

11. În triunghiul ABC, mediana $[BD]$ întâlneşte bisectoarea $[AF]$ în punctul O. Raportul dintre aria triunghiului DOA şi aria triunghiului BOF este egal cu $\frac{3}{8}$. Arătaţi că $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$.

12. În triunghiul ABC, bisectoarea $[AD]$ împarte latura $[BC]$ în raportul $\frac{BD}{DC} = 2$. În ce raport împarte mediana bisectoarea $[AD]$?

13. Fie $ABCDE$ un pentagon înscris într-un cerc de centru O, iar $H_1, H_2, \ldots, H_5$ ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDE, DEA şi respectiv EAB. Să se arate că triunghiurile H_1DE, H_2EA, H_3AB, H_4BC, H_5CD au acelaşi centru de greutate.

14. Fie M un punct în planul triunghiului ABC, N, P, Q simetricele punctului M în raport cu mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ şi respectiv $[AC]$. Să se arate $\overrightarrow{MG'} = 2\overrightarrow{MG}$, G, G' fiind centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi respectiv NPQ.

15. Dacă I, H sunt centrul cercului înscris, respectiv ortocentrul triunghiului ABC, să se arate că $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IH} \Leftrightarrow ABC$ este triunghi echilateral.

16. Dacă O, I, H sunt centrele cercului circumscris, înscris, respectiv ortocentrul triunghiului ABC, să se arate că $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IH} + 2\overrightarrow{HO}$.

17. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater inscriptibil şi H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ şi respectiv $A_4A_1A_2$. Să se arate că $\overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_3H_4} = \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_3A_2}$.

18. Fie A, B, C, D, E, F puncte conciclice. Dacă H_1, H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor ABC, respectiv DEF să se arate că:
1) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{H_1H_2}$; 2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD}$.

19. Fie O, I, G, H centrele cercurilor circumscris, înscris, centrul de gretate, respectiv ortocentrul triunghiului ABC. Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OH} \Leftrightarrow ABC$ triunghi echilateral.

20. Dacă H, I, G sunt ortocentrul, centrul cercului înscris, respectiv centrul de greutate într-un triunghi ABC, să se arate că dacă $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, atunci H, I, G sunt coliniare.

21. Dacă G, I, H reprezintă centrul de greutate, centrul cercului înscris, respectiv ortocentrul triunghiului ABC de laturi $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, să se arate că:
1) $3(a+b+c)\overrightarrow{GI} = (2a-b-c)\overrightarrow{GA} + (2b-c-a)\overrightarrow{GB} + (2c-a-b)\overrightarrow{GC}$;
2) $a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} + c\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow ABC$ este triunghi echilateral.
(Utilizaţi $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{a+b+c}\sum a\overrightarrow{MA}$ şi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ pentru 1); $\sum a\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{0}$ pentru 2).)

22. Fie ABC un triunghi de laturi $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ şi O centrul cercului circumscris. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral $\Leftrightarrow (b+c)\overrightarrow{OA} + (c+a)\overrightarrow{OB} + (a+b)\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$.

2. Probleme de coliniaritate

1. Se dă triunghiul ABC şi se consideră punctul $D \in (BC)$, astfel încât $BC = 3DC$. Fie E mijlocul medianei $[CC']$. Arătaţi că punctele A, D, E sunt coliniare.

2. Fie triunghiul neisoscel ABC, iar D, E, F picioarele bisectoarelor exterioare ale unghiurilor triunghiului. Arătaţi că punctele D, E, F sunt coliniare.

3. Se consideră triunghiul oarecare ABC şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$, $P \in (AB)$, astfel încât $MB = MC$, $AN = 2NC$, $AP = 3PB$. Dacă Q este mijlocul segmentului $[MP]$, arătaţi că punctele B, Q, N sunt coliniare.

4. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M \in BC$, $N \in CA$, $P \in AB$, astfel încât $BM = MC$, $AN = AP = \frac{1}{2}(AB + AC)$. Arătaţi că punctele M, N, P sunt coliniare.

5. Se consideră triunghiul ABC şi o dreaptă d. Prin A se duce o paralelă la BC, care taie pe d' în A' şi fie A_1 simetricul lui A' faţă de A. Analog se determină punctele B_1 şi C_1. Arătaţi că punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare.

6. În triunghiul ABC se duce o dreaptă oarecare prin centrul de greutate al triunghiului, care taie laturile $[AB]$ şi $[AC]$ în Q şi respectiv P. Arătaţi că $\frac{BQ}{AQ} + \frac{CP}{AP} = 1$.

7. Fie $ABCD$ un patrulater convex, în care O este punctul de intersecţie al diagonalelor, iar $M \in (BC)$, $N \in (AD)$. Arătaţi că M, O, N sunt coliniare, dacă şi numai dacă $\frac{AN}{ND} \cdot \frac{DO}{OB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CO}{OA} = 1$.

8. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \| CD$ şi $M \in (AB)$, $N \in (CD)$ astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{ND}$. Arătaţi că dreapta MP trece printr-un punct fix.

9. (Teorema lui Menelaos pentru patrulater) Fie $ABCD$ un patrulater convex şi d o dreaptă, care nu trece prin vârfurile patrulaterului, intersectând dreptele AB, BC, CD, DA în punctele M, N, P şi respectiv Q. Arătaţi că are loc relaţia $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1$. (Urmăriţi în formulă segmentele începând cu A.)

10. Se consideră triunghiul ABC, iar punctul E, simetricul centrului de greutate G faţă de mijlocul laturii $[BC]$. Paralela dusă prin E la BC taie dreapta AC în M, paralela prin E la AC taie pe AB în N şi paralela prin E la AB taie pe BC în P. Arătaţi că punctele M, N, P sunt coliniare.

3. Probleme de concurenţă

1. În triunghiul ABC, fie $M \in [BC]$. Bisectoarea unghiului $\widehat{AMB}$ intersectează latura $[AB]$ în punctul P, iar bisectoarea unghiului $\widehat{AMC}$ intersectează latura $[AC]$ în N. Arătaţi că dreptele AM, BN şi CP sunt concurente.

2. a) Arătaţi că dreptele care unesc vârfurile unui triunghi cu punctele de tangenţă ale cercului înscris, sunt concurente (punctul de concurenţă se numeşte punctul lui Gergonne – notat Γ).

b) Dacă în locul cercului înscris, se consideră unul din cercurile exînscrise (tangent la o latură şi la prelungirile celorlalte două ale triunghiului), atunci concluzia de la a) rămâne adevărată (punctele de concurenţă se numesc punctele adjuncte ale lui Gergonne – notate Γ_a, Γ_b, Γ_c).

3. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \| CD)$ şi cercul tangent laturilor $[AB]$, $[AD]$, $[BC]$ în H, F şi respectiv E. Dacă I este punctul de intersecţie al laturilor AD şi BC, atunci dreptele AE, FB, IH sunt concurente.

4. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(\mathrm{m}(\widehat{A}) = 90^0)$. Pe cateta $[AC]$ se ridică în C perpendicu-

lara CC' cu $[CC'] \equiv [AC]$, iar pe cateta AB se ridică perpendiculara BB', cu $[BB'] \equiv [AB]$. Să se arate că dreptele BC', CB' şi înălţimea AA' sunt concurente.

5. Se dă triunghiul ABC şi punctul P în interiorul triunghiului. Vârfurile unite cu P, intersectează laturile opuse în L, M, N. Cercul circumscris triunghiului LMN intersectează laturile $[BC]$, $[CA]$ şi $[AB]$ în punctele A', B', C'. Să se arate că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

6. Se dau cercurile de centre O şi O' tangente exterior în T şi A un punct oarecare în planul cercurilor, situat în exteriorul lor. Tangenta comună exterioară a cercurilor este tăiată de dreptele AO, AO', respectiv în M şi N. Arătaţi că dreptele AT, ON şi $O'M$ sunt concurente.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Se consideră segmentul $[AB]$, pe care luăm punctele C şi D (de la A spre B) astfel încât $AC = 2$, $CD = 3$, $DB = 4$. Exprimaţi vectorii de poziţie ai punctelor C şi D în funcţie de vectorii de poziţie ai punctelor A şi B.

2. Fie A, B, C trei puncte necoliniare şi O un pol al planului. Arătaţi că există $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel încât $\overrightarrow{r_P} = a\overrightarrow{r_A} + b\overrightarrow{r_B} + c\overrightarrow{r_C}$, $a + b + c = 1$, $\forall P$ din plan.

3. Se consideră M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor unui hexagon. Arătaţi că triunghiurile MPR şi NQS au acelaşi centru de greutate.

4. Fie triunghiul ABC, $[BB']$, $[CC']$ mediane, iar M, N puncte pe $[BC]$, astfel încât $BM = MN = NC$. Notăm $AM \cap CC' = \{P\}$, $AN \cap BB' = \{Q\}$. Să se arate că $PQ \| BC$.

5. Fie triunghiul ABC cu laturile $AB = 39$, $AC = 36$, $BC = 45$ în care se duc înălţimea $[AD]$, mediana $[BE]$ şi bisectoarea $[CF]$, $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Arătaţi că dreptele AD, BE, CF sunt concurente.

Testul 2.

1. Se consideră triunghiul ABC, de laturi $BC = 5$, $AC = 6$, $AB = 8$. Precizaţi vectorul de poziţie al centrului cercului înscris în triunghiul ABC.

2. Se consideră paralelogramul $ABCD$. O dreaptă taie dreptele AB, AC şi respectiv AD în punctele B_1, C_1 şi D_1. Arătaţi că dacă $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3\overrightarrow{AC}$, atunci $\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$.

3. Pe catetele $[AB]$ şi $[BC]$ ale unui triunghi dreptunghic ABC se construiesc, în exteriorul triunghiului, pătratele $ABEF$ şi $ACGH$. Dacă AD este perpendiculară pe BC, $D \in (BC)$, atunci dreptele AD, BG şi CE sunt concurente.

4. Se consideră triunghiul ABC, $P \in [AB]$, $Q \in [AC]$, astfel încât $AP = \frac{2}{3}AB$, $PQ \| BC$, M mijlocul lui $[AC]$. Arătaţi că punctul de intersecţie al dreptelor BM şi PQ este centrul de greutate al triunghiului ABC.

5. Fie trapezul $ABCD$, $AB \| CD$, $AB = AD = 2CD$, O mijlocul segmentului $[BD]$, $AO \cap BC = \{E\}$, M, N mijloacele segmentelor $[AE]$ şi respectiv $[AB]$. Arătaţi că punctele D, M, N sunt coliniare.

6. În patrulaterul $ABCD$, A', B', C', D' sunt mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AB]$. Dacă $AA' = CC'$ şi $BB' = DD'$, atunci $ABCD$ este paralelogram. ($\sum \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{0} \Rightarrow$ patrulater cu $AA' = CC'$, $BB' = DD' \Rightarrow$ paralelogram $\Rightarrow AA' \overset{\parallel}{=} CC' \Rightarrow BC \overset{\parallel}{=} AD$.)

3. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

Goniometria este ştiinţa care se ocupă de măsurarea unghiurilor (în greceşte **gonia = unghi** şi **metrein = a măsura**). Prin măsurarea unghiurilor nu înţelegem numai măsurarea cu raportorul a unghiurilor, ci şi măsurarea lor cu ajutorul unor funcţii care sunt dependente de unghiuri. Funcţiile folosite în trigonometrie (în calcularea elementelor triunghiurilor) se numesc **funcţii trigonometrice**. Aceste funcţii îşi găsesc aplicabilitate în diverse domenii din matematică (geometrie, analiză, algebră), în astronomie, cât şi în fizică (mecanică, optică, etc.) precum şi în probleme practice de măsurare a unor terenuri în pantă de către topometri.

Măsurarea unghiurilor

Toate unităţile de măsură pentru unghiuri se bazează pe diviziuni ale cercului.

Gradul. Un **grad sexagesimal** (notat $1°$) reprezintă a 360-a parte dintr-un cerc, respectiv a 90-a parte a unghiului drept.
A 60-a parte a unui grad sexagesimal se numeşte **minut** şi se notează $1'$.
A 60-a parte a unui minut este **secunda sexagesimală** şi se notează $1''$.

Deci $\boxed{1° = 60' = 3600''}$

Dacă cercul se împarte în 400 părţi egale, respectiv unghiul drept în 100 părţi egale se obţine un **grad centesimal**, notat 1^g. Un grad centesimal are 100 de **minute centesimale** (un minut centesimal se notează prin 1^c), iar un minut centesimal are 100 de **secunde centesimale** (o secundă centesimală se notează prin 1^{cc}).

Deci $\boxed{1^g = 100^c = 10000^{cc}}$

În tehnica militară unghiurile se măsoară în **miimi**. Se împarte cercul în 6000 de părţi egale. Noi vom lucra cu grade sexagesimale, iar măsura unui unghi $\widehat{AOB}$ dată în aceste grade o notăm prin $m(\widehat{AOB})$.

Radianul. Este cunoscut că măsura unui unghi cu vârful la centrul unui cerc este egală cu măsura arcului mic delimitat de laturile unghiului.
În figura 1 avem $m(\widehat{XOY}) = m(\overset{\frown}{XY})$.
Din acest motiv definim radianul ca măsură pentru arcele de cerc. Ştim că lungimea unui cerc de rază R este egală cu $2\pi R$, unde $\pi \approx 3,14$. Numărul π este un număr iraţional.

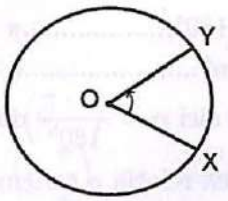
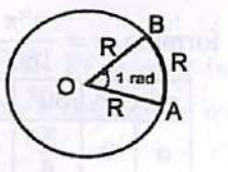


Fig. 1

Un radian (notat 1 rad) corespunde unui arc de pe cercul de rază R care are lungimea R. Măsura unui unghi $\widehat{XOY}$ în radiani o notăm prin $\mu(\widehat{XOY})$. Arcul $\overset{\frown}{AB}$ are măsura 1 rad, adică $\mu(\overset{\frown}{AB}) = 1$ rad.
De asemenea $\mu(\widehat{AOB}) = 1$ rad.



Observaţii. 0) Dacă un arc de pe cercul de rază R are lungimea s, atunci măsura unghiului de la centru delimitat de arc este $\theta = \frac{s}{R}$ radiani.

Dacă un punct se mişcă pe un drum circular de rază R cu o viteză constantă de θ radiani pe unitatea de timp t, atunci viteza liniară v este egală cu

$$v = \frac{s}{t} = \frac{R\theta}{t}, \ (1).$$

Numim viteză unghiulară (ω) a unui punct de pe drumul circular valoarea $\omega = \frac{\theta}{t}$, (2).

Din (1) şi (2) avem legătura între viteza liniară şi viteza unghiulară a unui punct

$$v = R\omega.$$

Aplicaţie. Două roţi dinţate de raze $R_1 = 2,4$ cm, $R_2 = 4,8$ cm sunt puse astfel încât cea mai mică o antrenează pe cea mai mare. Dacă roata mică se roteşte cu 225°, cu cât se roteşte roata mare?

R. Mai întâi 225° corespund la $\frac{5\pi}{4}$ radiani. Spaţiul parcurs de un punct de pe roata mică este $s = R_1\theta_1 = 2,5\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{25\pi}{8}$ cm. Acelaşi spaţiu este parcurs de un punct de pe roata mare, când unghiul de rotaţie este θ_2. Deci $\frac{25\pi}{8} = 4,8\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{125\pi}{192}$ sau în grade $\theta_2 \approx 117°$.

1) De obicei nu mai scriem pentru măsura unui unghi (arc) în radiani cuvântul rad. Când nu apare altă specificaţie (altă măsură, grad sexagesimal etc.), atunci se subînţelege că măsura unghiului (arcului) este dată în radiani.

Măsura în radiani a unui arc de cerc nu depinde de raza cercului din care face parte.

2) Dacă un arc de cerc are măsura α (în radiani), arc care face parte dintr-un cerc de rază R, atunci lungimea lui este egală cu $l = \alpha R$.

3) (Relaţia de transformare grade sexagesimale – radiani)

Unghiul drept subîntinde un sfert de cerc de lungime $\frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot R$, ceea ce arată că unghiul drept are $\frac{\pi}{2}$ radiani.

Unghiului de 180° îi corespund $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$ radiani.

Acum utilizând regula de trei simplă putem găsi relaţia care leagă măsura unghiului în grade sexagesimale de măsura lui în radiani:

$180°$.....π radiani

$n°$.....α radiani.

De aici $\alpha = \frac{n° \cdot \pi}{180°}$ dă măsura unghiului în radiani.

Dacă relaţia o scriem sub forma $n° = \frac{\alpha \cdot 180°}{\pi}$ obţinem măsura în grade sexagesimale.

Dacă $\alpha = 1$, atunci măsura lui în grade sexagesimale este

$$1 \text{ rad} \approx 57°$$

Cu formula $\alpha = \frac{n°\pi}{180°}$ se completează cu uşurinţă tabelul următor:

$n°$	0^0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$135°$	$180°$	$270°$	$360°$
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

3.1. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE PLANĂ

Trigonometria este o parte a goniometriei care se ocupă de măsurarea unghiurilor unui triunghi.

Rapoarte trigonometrice într-un triunghi dreptunghic

Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $\mu(\widehat{A}) = \frac{\pi}{2}$, $AB = c$ (latura care se opune unghiului C), $AC = b$ (latura care se opune unghiului B), $BC = a$ (latura care se opune unghiului drept A) (fig. 2). Laturile b, c se numesc catete, iar a este ipotenuza. Pentru unghiul ascuţit B definim rapoartele:

$$\sin B = \frac{\text{cateta opusă } \sphericalangle B}{\text{ipotenuza}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos B = \frac{\text{cateta alăturată } \sphericalangle B}{\text{ipotenuza}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg}B = \frac{\text{cateta opusă } \sphericalangle B}{\text{cateta alăturată } \sphericalangle B} = \frac{b}{c}$$

$$\text{ctg}B = \frac{\text{cateta alăturată } \sphericalangle B}{\text{cateta opusă } \sphericalangle B} = \frac{c}{b}$$

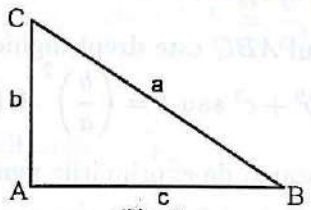


Fig. 2

De asemenea se mai definesc rapoartele

$\sec B = \frac{1}{\cos B}$ (secanta unghiului B) şi

$\text{cosec}B = \frac{1}{\sin B}$ (cosecanta unghiului B).

Asemănător se pot defini rapoartele trigonometrice pentru unghiul $C = \frac{\pi}{2} - B$.

Unghiurile B şi C, cu $B + C = \frac{\pi}{2}$ sau $B + C = 90°$ se numesc **complementare.**

Avem:

$\sin C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \frac{c}{a} = \cos B$. Să reţinem că $\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos B$.

$\cos C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \frac{b}{a} = \sin B$, adică $\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin B$,

$\text{tg}C = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \frac{c}{b} = \text{ctg}B$, adică $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \text{ctg}B$,

$\text{ctg}C = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \frac{b}{c} = \text{tg}B$, adică $\text{ctg}(\frac{\pi}{2} - B) = \text{tg}B$.

Să observăm aici că $\text{tg}B = \frac{\sin B}{\cos B}$, $\text{ctg}B = \frac{\cos B}{\sin B}$.

Să observăm că unghiurile B, C ale triunghiului dreptunghic au măsurile în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Cu aceste rapoarte definite mai sus am pus în evidenţă nişte funcţii definite pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, cu valori reale (pozitive). Mai precis $\sin : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0,1)$ (numită **sinus**), $\cos : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0,1)$ (numită **cosinus**), $\text{tg} : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, \infty)$ (numită **tangentă**), $\text{ctg} : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, \infty)$ (numită **cotangentă**), $\sec, \text{cosec} : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, \infty)$ (numite **secantă** şi respectiv **cosecantă**).

Vom extinde aceste funcţii de la $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, adică de la cadranul întâi la cadranele II, III, IV şi apoi la domeniul maxim de definiţie. Acest procedeu de extindere a domeniului de valabilitate a definiţiilor se aplică des în matematică şi se numeşte **principiul permanenţei.**

Funcţii şi cofuncţii. Reamintim că două unghiuri pozitive α, β se numesc **complementare** dacă $\alpha+\beta=90°$ şi suplementare dacă $\alpha+\beta=180°$. Cuvântul cosinus provine de la latinescul **complementi sinus** care înseamnă sinusul unghiului complementar; la fel şi cotangenta şi cosecanta sunt tangenta şi secanta unghiului complementar.

Deci $\cos B=\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\sin C$, $\sin B=\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos C$

$\operatorname{tg}B=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\operatorname{ctg}C$, $\operatorname{tg}C=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\operatorname{ctg}B$.

Forma trigonometrică a teoremei lui Pitagora

Triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă şi numai dacă

$$a^2=b^2+c^2 \text{ sau } 1=\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

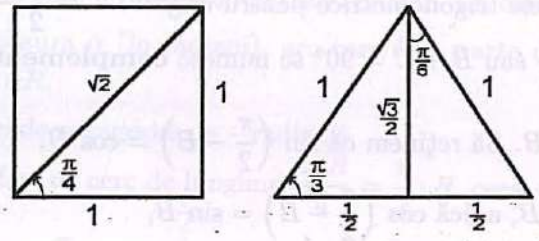
Ţinând seama de exprimările pentru $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ găsim egalităţile

$\sin^2 B+\cos^2 B=1$ şi respectiv $\sin^2 C+\cos^2 C=1$.

Fiecare din cele două formule este forma trigonometrică a teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC. Cum $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ înseamnă că formula $\sin^2 B+\cos^2 B=1$ este valabilă oricare ar fi unghiul B din primul cadran.

Tabel cu valorile rapoartelor trigonometrice pentru unghiurile de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$:

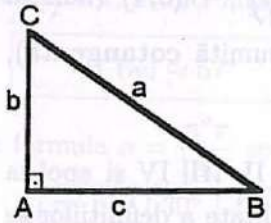
$\mu(B)$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin B$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos B$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}B$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}B$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



Din pătratul cu latura 1 se determină rapoartele trigonometrice pentru $\frac{\pi}{4}$, iar din triunghiul echilateral de latură 1 se determină rapoartele trigonometrice pentru unghiurile $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$

Rezolvarea triunghiului dreptunghic

A **rezolva** un triunghi dreptunghic înseamnă a-i determina lungimile laturilor şi măsurile unghiurilor când se cunosc o parte din ele. Pentru un astfel de triunghi cunoaştem unghiul drept. Cazurile de congruenţă ale triunghiurilor dreptunghice furnizează elementele cunoscute. Pentru determinarea elementelor necunoscute utilizăm rapoartele trigonometrice într-un triunghi dreptunghic precum şi teorema lui Pitagora. Distingem următoarele cazuri în rezolvarea triunghiului dreptunghic ($\mu(\widehat{A})=\frac{\pi}{2}$).

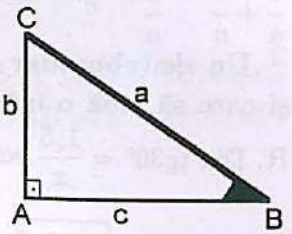


Cazul 1. (I.C.) Se dau lungimile ipotenuzei şi a unei catete (a,c). Să determinăm unghiurile B, C şi lungimea catetei b. Din teorema lui Pitagora $b^2=a^2-c^2$, adică $b=\sqrt{a^2-c^2}$. Cu ajutorul rapoartelor trigonometrice găsim $\sin B=\frac{b}{a}$, iar de aici cu ajutorul tabelelor trigonometrice găsim unghiul B. Apoi $\mu(C)=\frac{\pi}{2}-\mu(B)$.

Exemplu. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $a=10$, $c=5$. Atunci $b=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$, $\sin C=\frac{c}{a}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, adică $\mu(C)=\frac{\pi}{6}$. În fine, $\mu(B)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

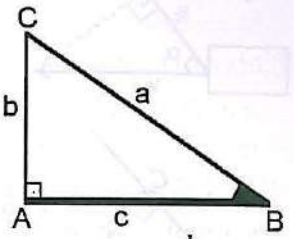
Observaţie. De obicei considerăm că unghiurile sunt măsurate în radiani şi atunci pentru a nu încărca scrierea, în loc de $\mu(\widehat{A})$ punem simplu $\widehat{A}$ sau A.

Cazul 2. (I.U.) Se dă lungimea ipotenuzei (a) şi măsura unghiului B. Avem imediat $C = \frac{\pi}{2} - B$, iar din rapoartele trigonometrice $\sin B = \frac{b}{a}$, adică $b = a \sin B$. Elementul c se determină fie din teorema lui Pitagora, fie din $\cos B = \frac{c}{a}$ când $c = a \cos B$.



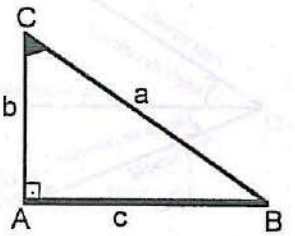
Exemplu. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $B = \frac{\pi}{3}$, $a = 10$. Atunci $C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Din $\sin C = \frac{c}{a}$ rezultă $c = a \sin C = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$, iar din $\cos B = \frac{c}{a}$, deducem $c = a \cos B = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.

Cazul 3. (C.U.) Se dau lungimea unei catete (c) şi unghiul ascuţit adiacent ei (B). Atunci $C = \frac{\pi}{2} - B$. Considerăm rapoartele trigonometrice $\cos B = \frac{c}{a}$ când $a = \frac{c}{\cos B}$ şi $\sin B = \frac{b}{a}$, când $b = a \cdot \sin B$.



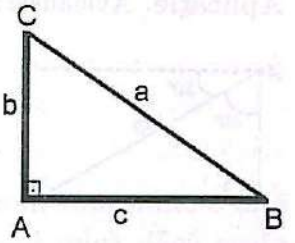
Exemplu. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $c = 5$, $B = \frac{\pi}{3}$. Atunci $C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Din $\sin C = \frac{c}{a}$ deducem $a = \frac{c}{\sin C} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$, iar din $\sin B = \frac{b}{a}$ rezultă $b = a \sin B = 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.

Cazul 4. (C.U.) Se dau lungimea unei catete (c) şi unghiul ascuţit opus ei (C). Atunci $B = \frac{\pi}{2} - C$, iar din $\sin C = \frac{c}{a}$ rezultă $a = \frac{c}{\sin C}$ şi $\cos C = \frac{b}{a}$ implică $b = a \cos C$.



Exemplu. Fie triunghiul dreptunghic ABC în care $C = \frac{\pi}{6}$, $c = 5$. Atunci $B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ şi $\sin C = \frac{c}{a}$, adică $a = \frac{c}{\sin C} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$. Din $\cos C = \frac{b}{a}$ rezultă $b = a \cos C = 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.

Cazul 5. (C.C.) Se dau lungimile catetelor b, c. Din teorema lui Pitagora rezultă $a = \sqrt{b^2 + c^2}$. Utilizând $\sin B = \frac{b}{a}$ rezultă unghiul B, iar din $C = \frac{\pi}{2} - B$ avem unghiul C.



Exemplu. Fie triunghiul dreptunghic ABC în care $b = 5\sqrt{3}$, $c = 5$. Din teorema lui Pitagora deducem $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 10$, iar din $\sin C = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ se obţine $C = \frac{\pi}{6}$. Acum $B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Probleme rezolvate

1. **Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic ABC $\left(A = \frac{\pi}{2}\right)$ avem egalitatea**

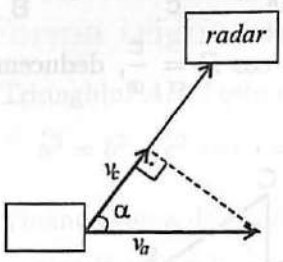
$$\frac{\sin B + \cos C}{\sin C + \cos B} = \operatorname{ctg} C.$$

R. Se prelucrează membrul stâng, ţinând seama de $\sin B = \frac{b}{a} = \cos C$, $\cos B = \frac{c}{a} = \sin C$. Avem:

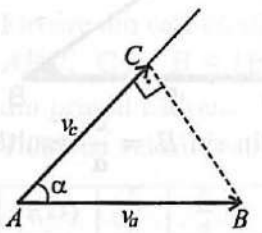
$$\frac{\frac{b}{a}+\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}+\frac{c}{a}}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b}{c}=\operatorname{ctg}C.$$

2. **Un skateboarder doreşte să-şi construiască o rampă de lansare care este înclinată cu 30° şi care să aibă o înălţime de 1,5 m. Care este lungimea pe orizontală a rampei?**

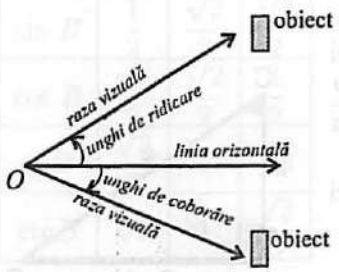
R. Din $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1,5}{x}$ rezultă $x=\frac{1,5}{\operatorname{tg}30^\circ}=\frac{1,5}{1/\sqrt{3}}\approx 2,59$ m.



3. **(Măsurarea vitezei de către aparatul radar)** Între maşina poliţiei (pe care este instalat aparatul radar) care staţionează şi o maşină care se deplasează se crează „efectul cosinusului", adică valarea citită de radar (v_c) este produsul dintre viteza actuală (v_a) şi cosinusul unghiului determinat de viteza de deplasare şi direcţia dată de cele două maşini. Care este viteza citită de radar, dacă viteza de deplasare a maşinii este $v_a=70$ km/h ?

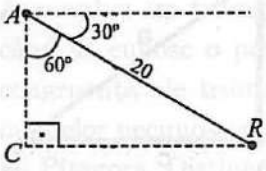


R. Să observăm că v_c este proiecţia lui v_a pe direcţia determinată de cele două maşini . În triunghiul dreptunghic ABC ($\widehat{C}=90^\circ$) avem $\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{v_c}{v_a}\Rightarrow v_c=v_a\cos\alpha=70\cdot 0,96=67,36$km/h. Să reţinem că viteza citită de aparatul radar este mai mică decât viteza reală a automobilului ($v_c=v_a\cos\alpha\le v_a$, deoarece $0\le\cos\alpha\le 1$, $\alpha\in[0,90^\circ]$). Care este viteza reală a unei maşini dacă $\alpha=30^\circ$, iar viteza citită de aparatul radar este de 80 km/h. (Indicaţie. $v_a=\frac{v_c}{\cos 30^\circ}\approx$ $\approx 92,4$ km/h.)



4. **(Unghi de ridicare, unghi de coborâre)** Dacă obiectul observat este deasupra observatorului (O) atunci raza vizuală face cu linia orizontală un unghi ascuţit, numit **unghi de ridicare**. Dacă obiectul este sub observator, atunci unghiul ascuţit format de raza vizuală cu linia orizontală se numeşte **unghi de coborâre**.

Aplicaţie. Avioanele sunt dotate cu aparatură care le permite să măsoare dstanţa până la o staţie radar. Dacă distanţa de la avion la staţia radar este de 20 km şi unghiul de coborâre este de 30°, determinaţi distanţa de la punctul situat sub avion până la staţia radar.



R. Din triunghiul dreptunghic ACR avem:

$\sin 60^\circ=\frac{x}{20}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 20\approx 17,3$ km.

Aplicaţii practice 1. Unghiul de coborâre a extremităţii A a unui lac măsurat dintr-un balon situat la 1000 m de asupra lacului este 15°, iar unghiul de coborâre a celeilalte extremităţi C este de 30°. Determinaţi lăţimea AC a lacului (≈ 2730 m).

2. (Aria triunghiului isoscel) Un triunghi isoscel având două laturi egale cu a şi unghiurile de la bază egale cu θ are aria $S=a^2\sin\theta\cos\theta$.

3. (Înălţimea piramidei) Unghiul de ridicare dintr-un punct O_1 de pe pământ la vârful piramidei este de 45°. Unghiul de ridicare dintr-un punct O_2, situat la 20 m în spate faţă de cel precedent este 30°. Să se determine înălţimea piramidei ($\approx 27,24$ m).

4. Două turnuri sunt situate la distanţa de 40 m unul de celălalt. Unghiul de coborâre din vârful primului turn la baza celui de al doilea este de 60°, iar unghiul de coborâre la vârful celui de-al doilea turn este 30°. Care este înălţimea celui de-al doilea turn?

5. **(Pantele dreptelor)** În reperul xOy se consideră dreapta $y = mx + b$. Fie $B(0, b)$, intersecţia dreptei cu Oy, $A(1, b)$, $C(1, b+m)$ punct de pe dreaptă situat deasupra lui A. Triunghiul CAB este dreptunghic, unghiul ABC se numeşte unghiul pantei, iar $\operatorname{tg}\widehat{ABC} = m$ se numeşte panta dreptei.
Determinaţi unghiurile dreptelor şi pantele lor în cazurile:

(d_1): $x + y = 0$; (d_2): $x - y = 0$; (d_3): $3y - \sqrt{3}x - 3 = 0$; (d_4): $y - \sqrt{3}x + 1 = 0$.

Probleme propuse

1. Cum se defineşte radianul cu ajutorul cercului:
1) de rază 3; 2) de rază 1 ?
Măsura unui radian este funcţie de raza cercului utilizat?

2. Scrieţi formula de trecere de la grade sexagesimale la radiani.

3. Transformaţi din măsura în grade în măsura în radiani:
1) 35°; 2) 75°; 3) 120°; 4) 135°; 5) 210°; 6) 240°; 7) 325°; 8) 330°.

4. Transformaţi din măsura în radiani în măsura în grade sexagesimale:
1) $\frac{\pi}{12}$; 2) $\frac{\pi}{15}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{7\pi}{6}$; 5) $\frac{4\pi}{3}$; 6) $\frac{7\pi}{4}$; 7) $\frac{11\pi}{6}$.
Determinaţi complementul şi suplementul fiecăruia din unghiurile de la problemele 3 (1), 2)), 4) (1), 2)).

5. Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC $\left(A = \frac{\pi}{2}\right)$ în cazurile:
1) $a = 30$, $B = \frac{\pi}{3}$; 2) $a = 13$, $c = 12$; 3) $C = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $b = 12$, $c = 5$; 5) $b = 3$, $\sin C = \frac{1}{2}$.

6. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic ABC $\left(A = \frac{\pi}{2}\right)$ avem egalităţile:
1) $b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$; 2) $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$;
3) $\frac{1}{2\sin B\sin C} = \frac{c\cos B + b\cos C}{c\sin B + b\sin C}$; 4) $\operatorname{tg}^2 C + \cos^2 C = \operatorname{tg}^2 C\sin^2 C + 1$;
5) $ab\sin^2 C = c^2\cos C$; 6) $\frac{b^2}{\operatorname{tg}B} + \frac{c^2}{\operatorname{tg}C} = 4S$;
7) $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$, $R =$ raza cercului circumscris triunghiului ABC.

7. O roată de transmisie cu raza de 10 cm este utilizată pentru a pune în funcţiune o altă roată cu raza de 6 cm. Să se determine unghiul cu care se roteşte roata mică dacă roata mare face rotaţie completă.

8. Pentru iluminarea cât mai bună a unui tablou pe peretele unei expoziţii se recomandă instalarea unei surse de lumină pe tavan la distanţa de 1,5 m faţă de centrul tabloului, astfel încât unghiul făcut de raza de lumină şi proiecţia ei pe tavan să fie de 30°. Determinaţi distanţa faţă de perete a sursei de lumină.

9. Există funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(\cos x) = \sin x$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$?

3.2. CERCUL TRIGONOMETRIC

Date fiind două puncte A_1, A_2, pe un cerc, atunci putem parcurge arcul delimitat de cele două puncte, de la punctul inițial A_1 la punctul final A_2, fie în sensul contrar deplasării acelor de ceasornic (fig. 3. a)), fie în sensul deplasării acelor de ceasornic (fig. 3. b)).

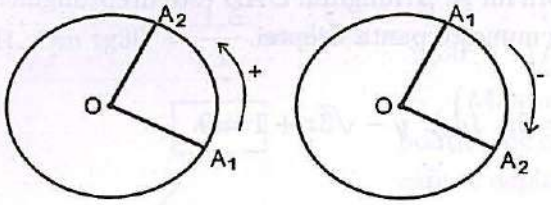


Fig. 3

Primul sens îl numim **sensul pozitiv** sau **sensul trigonometric**, iar al doilea **sensul negativ**.

Dacă arcul este măsurat în sens pozitiv scriem $+x$ sau simplu x, iar dacă arcul este măsurat în sens negativ scriem $-x$. Deci semnul din fața arcului ne arată în ce sens parcurgem arcul respectiv. Cum unghiul la centru $\widehat{A_1OA_2}$ are măsura arcului delimitat de laturile sale și situat în interiorul unghiului, păstrăm aceleași convenții și pentru unghiuri.

În reperul cartezian xOy considerăm cercul cu centrul în O și de rază 1 (numit și **cercul unitate**).

Cercul trigonometric este cercul unitate pe care s-a considerat un sens pozitiv (sensul invers deplasării acelor de ceasornic) și un sens negativ (sensul de mișcare a acelor de ceasornic). Notăm acest cerc prin $\mathcal{C}$.

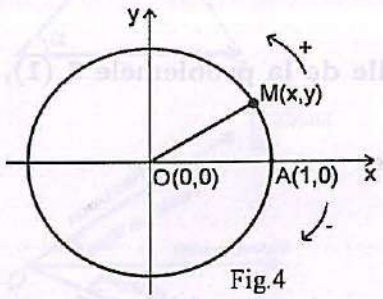


Fig.4

Dacă $M(x,y) \in \mathcal{C}$ (fig. 4), atunci $OM = 1$, adică $\sqrt{x^2+y^2} = 1$ sau $x^2+y^2 = 1$.

Deci $\mathcal{C} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$.

Ecuația $x^2+y^2 = 1$ reprezintă ecuația cercului unitate. Cercul trigonometric intersectează semiaxa pozitivă $[Ox$ în punctul $A(1,0)$. Acest punct se numește **punctul inițial** (sau **originea**) al cercului trigonometric deoarece orice unghi α se măsoară plecând de la semidreapta $[OA$ ca latură inițială a unghiului, pe care o rotim în sens pozitiv sau negativ.

Un rol fundamental în teoria funcțiilor trigonometrice îl joacă funcția de acoperire universală a cercului $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ pe care o definim în trei etape:

1) $\phi : [0, 2\pi] \to \mathcal{C}$; 2) $\phi : [-2\pi, 0] \to \mathcal{C}$; 3) $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{C}$.

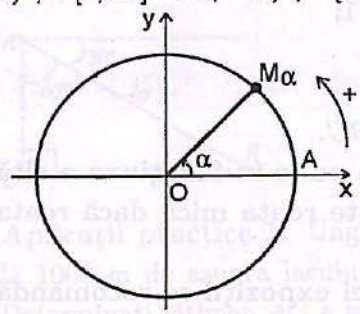


Fig. 5

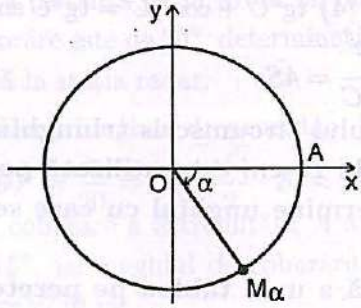


Fig. 6

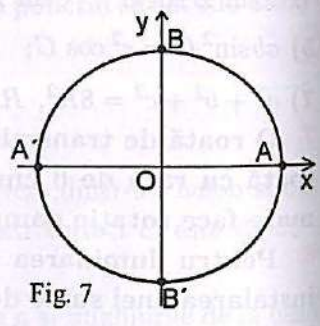


Fig. 7

1) Am văzut că lungimea cercului unitate este egală cu 2π.

Dacă α este un unghi din intervalul $[0, 2\pi]$, atunci lui îi corespunde pe cercul trigonometric un punct M_α (fig. 5) pentru care $\mu(\widehat{AOM_\alpha}) = \alpha$ (și evident egală cu măsura arcului mic $\widehat{AM_\alpha}$).

Deci $\phi(\alpha) = M_\alpha \in \mathcal{C}$ pentru care $\mu(\widehat{AOM_\alpha}) = \alpha$.

Dacă M_α se află în primul cadran, atunci $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Vom spune că un unghi situat în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

se află în primul cadran.

Analog dacă M_α aparţine cadranului doi, atunci $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ şi spunem că orice unghi din acest interval se află în cadranul doi.

Analog pentru cadranul III, când $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ şi cadranul IV, când $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

2) Dacă $\alpha \in [-2\pi, 0]$, atunci lui îi corespunde punctul M_α (fig. 6) pe cercul trigonometric astfel încât unghiul $\widehat{AOM_\alpha}$ este măsurat în sens negativ şi $\mu(\widehat{AOM_\alpha}) = |\alpha|$. Deci $\phi(\alpha) = M_\alpha \in \mathcal{C}$ pentru care $\mu(\widehat{AOM_\alpha}) = |\alpha|$. Astfel unghiurilor 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π le corespund pe cercul trigonometric punctele A, B, A', B', A (fig. 7), iar unghiurilor $-\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{3\pi}{2}$, -2π le corespund punctele B', A', B şi respectiv A.

În fig. 8 sunt marcate punctele care corespund unghiurilor 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, -1, -2, -3, -4, -5, -6.

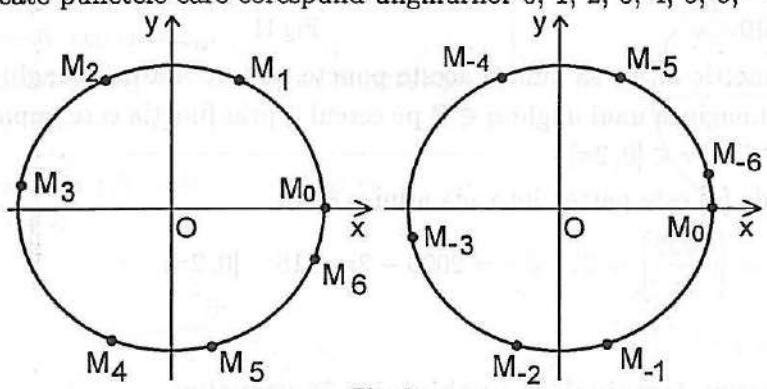


Fig. 8

Aşadar intervalul $[0, 2\pi]$ corespunde unei parcurgeri complete a cercului în sens pozitiv. De asemenea intervalul $[-2\pi, 0]$ corespunde unei parcurgeri complete a cercului (în sens negativ).

Următorul interval din $\mathbb{R}$ şi anume $[2\pi, 4\pi]$ de lungime 2π (cât lungimea cercului $\mathcal{C}$) corespunde unei noi parcurgeri complete a cercului (în sens pozitiv), iar intervalul $[-4\pi, -2\pi]$ corespunde unei noi parcurgeri complete a cercului (în sens negativ, de la -2π la -4π), ceea ce arată că anumitor numere reale le corespund acelaşi punct pe cercul $\mathcal{C}$.

Mai precis dacă $\alpha \in [0, 2\pi)$ (spunem că unghiul este din primul cerc), atunci numerelor

α, $\alpha + 2\pi$, $\alpha + 4\pi$, $\alpha + 6\pi$, ..., $\alpha - 2\pi$, $\alpha - 4\pi$, $\alpha - 6\pi$, ...

le corespund acelaşi punct M_α pe cercul $\mathcal{C}$.

Aşadar tuturor numerelor de forma $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ le corespund acelaşi punct M_α pe cercul $\mathcal{C}$.

În figura 9 pentru unghiurile α şi $\alpha + 2\pi$, $\alpha - 2\pi$ avem acelaşi punct M_α.

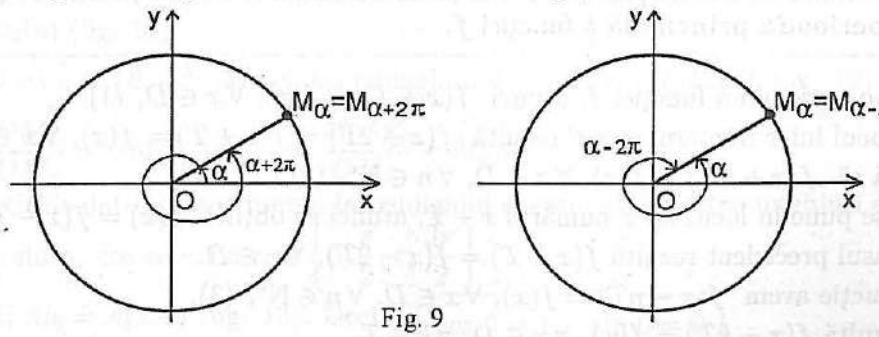


Fig. 9

Cum lungimea cercului $\mathcal{C}$ este egală cu 2π, atunci punctelor de intersecţie dintre $\mathcal{C}$ şi axele de coordonate le corespund punctele:

$A = M_0$, $B = M_{\frac{\pi}{2}}$, $A' = M_\pi$, $B' = M_{\frac{3\pi}{2}}$ (fig. 10).

Aceloraşi puncte le corespund şi unghiurile $0 + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$, $\pi + 2\pi = 3\pi$, $\frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{7\pi}{2}$ sau unghiurile -2π, $\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$, $\pi - 2\pi = -\pi$ şi respectiv $\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$.

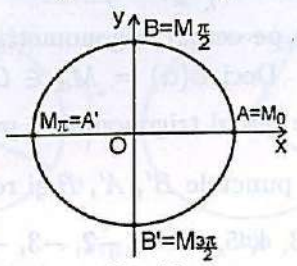


Fig. 10

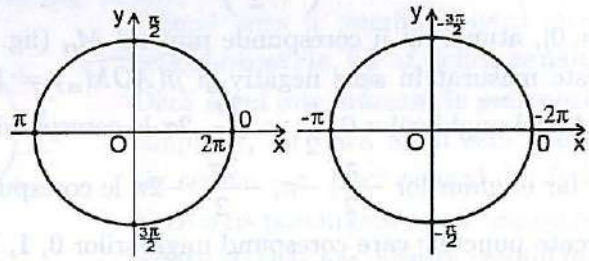


Fig.11

Uneori pe cercul trigonometric în loc să punem aceste puncte, se trec măsurile unghiurilor ca în fig. 11.

Pentru a vedea care este imaginea unui unghi $\alpha \in \mathbb{R}$ pe cercul C prin funcţia ϕ se împarte α la 2π şi avem $\alpha = 2\pi q + r$, unde $q \in \mathbb{Z}$ şi $r \in [0, 2\pi)$.

Mai precis $q = \left[\frac{\alpha}{2\pi}\right]$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$.

Dacă $\alpha = 2000$, atunci $q = \left[\frac{2000}{2\pi}\right] = 318$ şi $r = 2000 - 2\pi \cdot 318 \in [0, 2\pi)$.

Problemă propusă

În ce cadran se află latura terminală a unghiului α în cazurile:

1) $\alpha = 400°$; 2) $\alpha = 460°$; 3) $\alpha = 541°$; 4) $\alpha = 632°$; 5) $\alpha = 2184°$;
6) $\alpha = 12652°$; 7) $\alpha = -362°$; 8) $\alpha = -534°$; 9) $\alpha = -1748°$.

3.3. FUNCŢIILE TRIGONOMETRICE DIRECTE

Funcţie periodică

Definiţie. 1) Fie D o mulţime nevidă de numere reale şi $T \in \mathbb{R}^*$. D se numeşte T-invariantă $\Leftrightarrow (x \in D) \Leftrightarrow (x + T \in D) \Leftrightarrow (x - T \in D)$.

2) Fie D o mulţime T-invariantă şi $X \neq \emptyset$ şi $f : D \to X$ se numeşte T-periodică dacă $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D$.

Numărul $T \neq 0$ se numeşte **perioadă** a funcţiei f

Dacă printre numerele nenule pozitive T există un cel mai mic număr pozitiv T^*, atunci acesta se va numi **perioada principală** a funcţiei f.

Dacă $T \neq 0$ este o perioadă a funcţiei f, atunci $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D$, (1).

Punând aici în locul lui x numărul $x + T$ rezultă $f(x + 2T) = f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D$.

Inductiv se arată că $f(x + nT) = f(x)$, $\forall x \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, (2).

Tot în (1) dacă se pune în locul lui x numărul $x - T$, atunci se obţine $f(x) = f(x - T)$, $\forall x \in D$.

Repetând aici pasul precedent rezultă $f(x - T) = f(x - 2T)$, $\forall x \in D$.

Analog, prin inducţie avem $f(x - nT) = f(x)$, $\forall x \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, (3).

Din (2) şi (3) rezultă $f(x + kT) = f(x)$, $\forall x \in D$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Ultima egalitate arată că dacă T este perioadă pentru f, atunci orice număr de forma kT, $k \in \mathbb{Z}$ este de asemenea o perioadă pentru f.

De exemplu funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Z}\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$ este periodică, de perioadă principală $T^*=1$.

Funcţiile sinus şi cosinus

Am definit la paragraful „Rapoarte trigonometrice într-un triunghi dreptunghic" funcţiile trigonometrice sinus, cosinus, pentru un unghi situat în primul cadran. Prin definiţia care urmează vom extinde aceste funcţii la mulţimea numerelor reale. Acest lucru îl vom realiza cu ajutorul funcţiei ϕ (de acoperire universală a cercului trigonometric C). Am văzut că unui număr real α această funcţie face să-i corespundă punctul $M_\alpha\in C$ (fig. 12).

Definiţie. Cosinusul lui α (notat cos α) este abscisa punctului M_α, adică $\cos\alpha=x_\alpha$.
Sinusul lui α (notat sin α) este ordonata punctului M_α, adică $\sin\alpha=y_\alpha$.

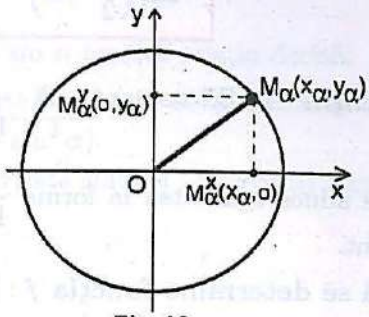


Fig. 12

Aşadar avem funcţiile sin : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\alpha\to\sin\alpha$ şi cos : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\alpha\to\cos\alpha$.

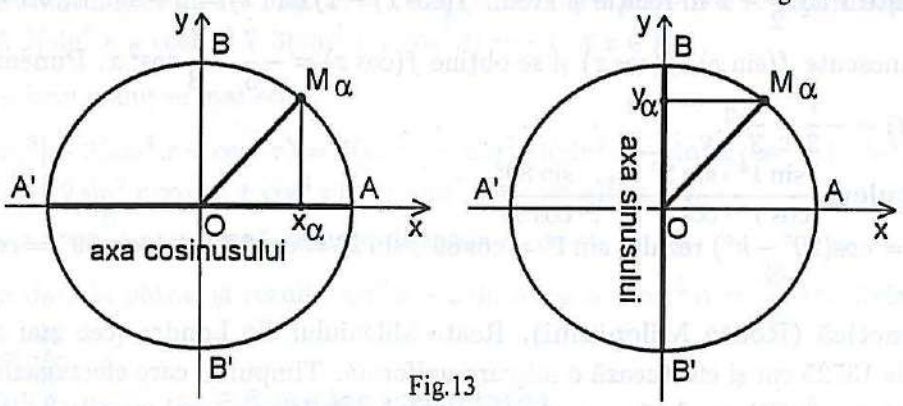


Fig.13

Pentru a găsi sin α, cos α, $\alpha\in\mathbb{R}$ se construieşte punctul M_α pe cercul C şi apoi se proiectează acest punct pe axele Ox şi respectiv Oy în punctele $M_\alpha^x(x_\alpha,0)$ şi respectiv $M_\alpha^y(0,y_\alpha)$. Atunci $\cos\alpha=x_\alpha$ şi $\sin\alpha=y_\alpha$.

Deoarece pentru a găsi pe cos α se proiectează punctul M_α pe axa Ox, această axă o numim **axa cosinusului**. Analog pentru a obţine pe sin α proiectăm punctul M_α pe Oy. Din acest motiv această axă o numim **axa sinusului** (fig. 13).

Observaţii. 1) Dacă $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, atunci din triunghiul dreptunghic $OM_\alpha M_\alpha^x$ (fig. 12) avem

$$\cos\alpha=\frac{OM_\alpha^x}{OM_\alpha}=OM_\alpha^x,\quad \sin\alpha=\frac{M_\alpha M_\alpha^x}{OM_\alpha}=M_\alpha M_\alpha^x,$$

adică regăsim definiţiile date acestor funcţii la triunghiul dreptunghic pentru unghiuri ascuţite.

2) Să determinăm sin α, cos α, când $\alpha\in\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Dacă $\alpha=0$, atunci $M_0=A(1,0)$ (fig. 13). Deci $\boxed{\cos 0=1,\quad \sin 0=0}$

Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, atunci $M_{\frac{\pi}{2}} = B(0,1)$ şi deci $\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1$

Dacă $\alpha = \pi$, atunci $M_\pi = A'(-1,0)$, când $\cos\pi = -1, \quad \sin\pi = 0$

Pentru $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ avem $M_{\frac{3\pi}{2}} = B'(0,-1)$, adică $\cos\frac{3\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

3) Se verifică uşor că au loc egaltăţile:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Aplicaţii. 1) Să se arate că $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$.

R. Se aduce egalitatea la forma $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, evident.

2) Să se determine funcţia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ **dacă** $f(\sin x) - 2f(\cos x) = 2 + \cos^2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

R. Se înlocuieşte x cu $\frac{\pi}{2} - x$ în relaţie şi avem: $f(\cos x) - 2f(\sin x) = 2 + \sin^2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se rezolvă sistemul de necunoscute $f(\sin x)$, $f(\cos x)$ şi se obţine $f(\cos x) = -\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\cos^2 x$. Punem $t = \cos x \in [-1,1]$ şi obţinem $f(t) = -\frac{7}{3} - \frac{1}{3}t^2$.

3) Să se calculeze $\dfrac{\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 89^\circ}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 89^\circ}$.

R. Din $\sin k^\circ = \cos(90^\circ - k^\circ)$ rezultă $\sin 1^\circ = \cos 89^\circ$, $\sin 2^\circ = \cos 88^\circ$, $\ldots$, $\sin 89^\circ = \cos 1^\circ$. Deci raportul este egal cu 1.

Aplicaţie practică (Roata Mileniului). Roata Mileniului din Londra (cea mai mare din lume) are un diametru de 13725 cm şi efectuează o mişcare uniformă. Timpul în care efectuează o rotaţie completă este de 30 minute. Înălţimea h, în cm, deasupra râului Tamisa a unei persoane situată într-o cabină, după t minute de la punerea în mişcare a roţii este dată de funcţia :

$$h(t) = 7777,5 - 6862,5\cos\left(\frac{\pi t}{15}\right).$$

a) La ce înălţime se află o persoană la începutul călătoriei ? b) Dar după 15 min.?

R. a) Avem $h(0) = 7777,5 - 6862,5 = 915$ cm. b) $h(15) = 7777,5 + 6862,5 = 14640$ cm.

Proprietăţi ale funcţiilor sinus şi cosinus

P_1. (Mulţimea valorilor) $-1 \le \sin\alpha \le 1, \quad -1 \le \cos\alpha \le 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Proiecţia lui M_α pe Ox este M_α^x care este situat între punctele $A'(-1,0)$ şi $A(1,0)$ ceea ce arată că $-1 \le x_\alpha \le 1$, adică $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

Analog proiecţia lui M_α pe Oy este punctul $M_\alpha^y \in [B'B]$, unde $B'(0,-1)$, $B(0,1)$. Deci $-1 \le y_\alpha \le 1$, adică $-1 \le \sin\alpha \le 1$. ■

Exemple. 1) Să se arate că $|3\cos x + 2\sin x| < 5$.

R. Utilizăm inegalitatea $|a+b| \le |a| + |b|$ şi avem $|3\cos x + 2\sin x| \le 3|\cos x| + 2|\sin x| < 3 + 2 = 5$.

Ultima inegalitate este strictă deoarece sinus şi cosinus nu pot lua simultan valoarea 1.

2) Să se determine extremele funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sin^2 x+\sin x$.

R. Dacă $t=\sin x\in[-1,1]$, atunci funcţia $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $g(t)=2t^2+t$ este strict descrescătoare pe $\left[-1,-\frac{1}{4}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[-\frac{1}{4},1\right]$. Deci $\min f(x)=\min g(t)=g\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}$ şi $\max f(x)=\max g(t)=\max\{g(-1),g(1)\}=\max\{1,3\}=3$.

P_2. (Formula fundamentală a trigonometriei) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Pentru $\alpha\in\mathbb{R}$ punctul $M_\alpha(\cos\alpha,\sin\alpha)\in\mathcal{C}$.
Ecuaţia cercului $\mathcal{C}$ este $x^2+y^2=1$. Dacă aici punem $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$ rezultă relaţia dorită. ■
Această relaţie permite să exprimăm pe $\sin\alpha$ ($\cos\alpha$) dacă se cunoaşte $\cos\alpha$ ($\sin\alpha$) şi cadranul în care este situat unghiul α. Avem: $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ ($\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$).
Semnul din faţa radicalului se alege ţinând seama de ce fel de număr este sinusul (cosinusul) unghiului α, de cadranul în care este situat unghiul α.

Aplicaţii. 1) Să se arate că $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}=1$, $2\cos^2\alpha-1\neq 0$.

R. Prelucrăm numărătorul şi avem $1-2\sin^2\alpha=1-2(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$. Egalitatea este imediată.

2) Să se arate că $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

R. Într-adevăr membrul stâng se mai scrie:

$2[(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3]-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=2(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)-3\sin^4 x-$
$-3\cos^4 x=-(\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)=-(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=-1$.

3) Dacă $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{6}{5}$, **atunci să se calculeze** $\sin\alpha\cos\alpha$.

R. Se ridică relaţia dată la pătrat şi rezultă $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\dfrac{36}{25}$ sau $2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{11}{25}$ şi deci $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{11}{50}$.

4) Să se arate că $\forall a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ **are loc inegalitatea**
$(\sin a_1+\sin a_2+\ldots+\sin a_n)^2+(\cos a_1+\cos a_2+\ldots+\cos a_n)^2\leq n^2$.

R. Pentru $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ are loc inegalitatea (C.B.S.): $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2\leq n(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)$.
Aplicăm această inegalitate pentru fiecare termen din inegalitatea de demonstrat şi avem:
$(\sin a_1+\ldots+\sin a_n)^2\leq n(\sin^2 a_1+\ldots+\sin^2 a_n)$, $(\cos a_1+\ldots+\cos a_n)^2\leq n(\cos^2 a_1+\ldots+\cos^2 a_n)$.
Adunând aceste inegalităţi, membru cu membru, rezultă:
$(\sin a_1+\ldots+\sin a_n)^2+(\cos a_1+\ldots+\cos a_n)^2\leq n[(\sin^2 a_1+\cos^2 a_1)+\ldots+(\sin^2 a_n+\cos^2 a_n)]=$
$=n(1+1+\ldots+1)=n^2$.

P_3 (Periodicitatea funcţiilor sinus şi cosinus)
$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$, $\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Funcţiile sinus şi cosinus au perioada principală $T^*=2\pi$.

Demonstraţie. Am văzut că unghiurile α, $\alpha+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ au aceeaşi imagine pe cercul trigonometric $\mathcal{C}$. Deci $\cos\alpha=\cos(\alpha+2k\pi)$, $\sin\alpha=\sin(\alpha+2k\pi)$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.
Probăm acum că $T^*=2\pi$ este perioada principală a funcţiei sinus. Presupunem, prin absurd, că ar exista o perioadă $T_0^*\in(0,2\pi)$. Deci $\sin(\alpha+T_0^*)=\sin\alpha$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. Pentru $\alpha=0$, de aici ar rezulta

$\sin T_0^* = \sin 0 = 0$, ceea ce dă $T_0^* = \pi$. Dar acest număr nu este perioadă pentru sinus deoarece $1 = \sin \dfrac{\pi}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin \dfrac{3\pi}{2} = -1$, absurd.
Deci $T^* = 2\pi$ este perioadă principală pentru funcţia sinus.
Analog se arată că $T^* = 2\pi$ este perioadă principală şi pentru funcţia cosinus. ■

Faptul că funcţiile sinus şi cosinus sunt periodice de perioadă principală $T^* = 2\pi$, facilitează studiul acestor funcţii la un interval de lungimea unei perioade principale, să spunem, $[0, T^*)$. Concluziile privind o anumită proprietate a acestor funcţii pentru $\mathbb{R}$ se obţin adăugând punctelor care verifică proprietatea multiplu de perioada principală (adică dacă o anumită proprietate are loc într-un punct $x_0 \in [0, T^*)$, atunci ea are loc în toate punctele $x_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; dacă proprietatea este adevărată pe $[a, b] \subset [0, T^*)$, atunci ea are loc în toate intervalele $[a + 2k\pi, b + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$).
De asemenea această proprietate permite să aducem calculul sinusului sau cosinusului unui unghi la primul cerc trigonometric. Într-adevăr dacă avem de calculat $\sin 750°$ atunci procedăm astfel $750° = 2 \cdot 360° + 30°$ şi deci $\sin 750° = \sin(30° + 2 \cdot 360°) = \sin 30° = \dfrac{1}{2}$.
Analog $\cos(-860°) = \cos[(-3) \cdot 360° + 220°] = \cos 220°$, unde $220° \in [0, 360°)$.

P_4. (Paritatea funcţiilor sinus şi cosinus)
- **Funcţia sinus este impară, adică** $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- **Funcţia cosinus este pară, adică** $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Ţinând seama de P_3 este suficient să arătăm că $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\forall \alpha \in [0, 2\pi)$.
Fie M_α^y, $M_{-\alpha}^y$ proiecţiile lui M_α şi respectiv $M_{-\alpha}$ pe Oy (fig. 14). Aceste proiecţii sunt simetrice în raport cu O (triunghiurile $OM_\alpha M_\alpha^y$, $OM_{-\alpha}M_{-\alpha}^y$ sunt congruente). Deci $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$, adică $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.
Triunghiul $OM_\alpha M_{-\alpha}$ este isoscel cu Ox axă de simetrie. Deci $M_{-\alpha}$ este simetricul lui M_α în raport cu Ox. Prin urmare proiecţiile punctelor M_α, $M_{-\alpha}$ pe Ox coincid. Deci $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. ■

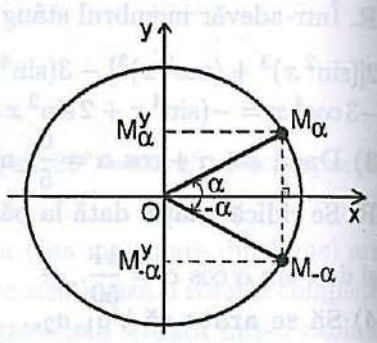
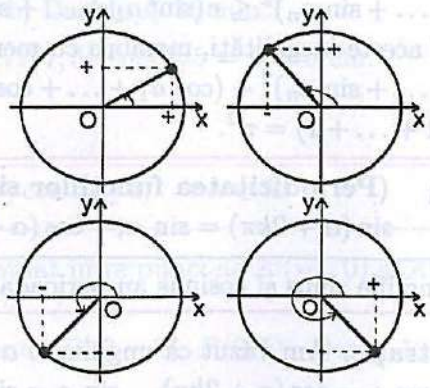


Fig. 14

P_5 (Semnul funcţiilor sinus şi cosinus) Semnul funcţiilor sinus şi cosinus în primul cerc trigonometric este dat în tabelul de mai jos:

Funcţia → / Cadranul ↓	sin	cos
I	+	+
II	+	−
III	−	−
IV	−	+



Pentru semnul funcţiilor sinus şi cosinus pe $\mathbb{R}$ avem:
1) $\sin x > 0$, $\forall x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

$\sin x < 0,\ \forall x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$;

$\sin x = 0,\ \forall x \in \{2k\pi, \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

2) $\cos x > 0,\ x \in \left(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$,

$\cos x < 0,\ x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$;

$\cos x = 0,\ x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exemplu. Precizaţi $x \in [0, \pi)$ pentru care: 1) $\sin 2x > 0$; 2) $\cos 2x < 0$.

R. 1) Avem $\sin 2x > 0$ dacă $0 < 2x < \pi$, adică $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

2) Avem $\cos 2x < 0$ dacă $\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2}$, adică $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

P_6. (Monotonia funcţiilor sinus şi cosinus)

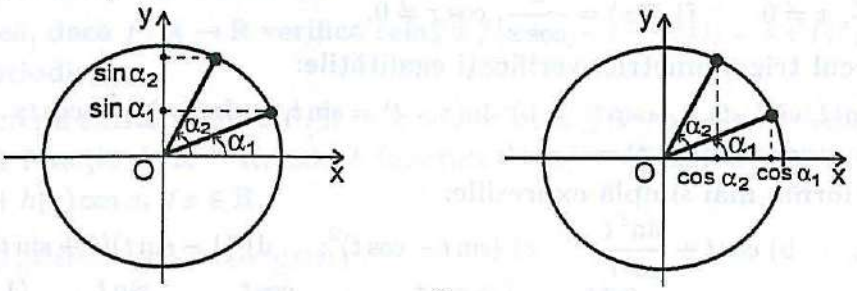
Funcţia **sinus este strict crescătoare** pe intervalele $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ şi **este strict descrescătoare** pe intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Vom marca acest fapt prin tabelul

cadran	*I*	*II*	*III*	*IV*
sin	↗	↘	↘	↗

Funcţia **cosinus este strict descrescătoare** pe intervalul $[0, \pi]$ şi **este strict crescătoare** pe intervalul $[\pi, 2\pi]$. Vom marca monotonia acestei funcţii prin tabelul

cadran	*I*	*II*	*III*	*IV*
cos	↘	↘	↗	↗

Această proprietate o punem în evidenţă pe cercul trigonometric (în fig. 15 am ilustrat monotonia funcţiilor în primul cadran).



$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$ $\qquad$ $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha_1 > \cos \alpha_2$

Fig. 15

Exemple. 1) Determinaţi semnul diferenţelor $\sin 20° - \sin 21°$, $\cos 243° - \cos 250°$.

R. Cum $0 < 20° < 21° < 90°$, iar în primul cadran funcţia sinus este strict crescătoare deducem că $\sin 20° < \sin 21°$. Deci $\sin 20° - \sin 21° < 0$. Pentru cea de-a doua diferenţă avem $180° < 243° < 250° < 270°$, iar în cadranul trei funcţia cosinus este strict crescătoare. Deci $\cos 243° < \cos 250°$ şi deci diferenţa este negativă.

2) Utilizând cercul trigonometric găsiţi $x \in [0, 2\pi)$ pentru care $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

R. Pentru $x = \frac{\pi}{3}$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ avem $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Deci $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

3) Să se arate că $\sin 40^\circ \cos 20^\circ > \frac{\sqrt{3}}{4}$.

R. Din $\sin 40^\circ > \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ şi $\cos 20^\circ > \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ rezultă afirmaţia.

P_7. **(Calculul aproximativ pentru $\sin x$, $\cos x$).** Pentru calculul aproximativ al valorilor $\sin x$, $\cos x$, x în radiani, calculatoarele utilizează seriile de puteri pentru aceste funcţii (seria de puteri este asemenea unui polinom cu grad nemărginit):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

unde cele trei puncte înseamnă că exprimarea se continuă nesfârşit adunând un termen şi scăzând un altul. Semnul exclamării ! se citeşte factorial, iar $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ este produsul primelor n numere naturale nenule.
De exemplu, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Probleme propuse

0. 1) Să se calculeze:
$\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}$, $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$, $\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$, $\sin 45^\circ + \cos 30^\circ$, $\sin \frac{\pi}{2} + \cos 0$, $\sin 0 \cdot \cos \frac{\pi}{2}$.

2) Să se calculeze $\phi(t)$ pentru fiecare t:
a) $t = \frac{\pi}{4}$; b) $t = \frac{\pi}{3}$; c) $t = \frac{5\pi}{4}$; d) $t = \frac{5\pi}{3}$; e) $t = -\frac{\pi}{6}$; f) $t = -\frac{7\pi}{4}$; g) $t = -\frac{2\pi}{3}$.

3) Marcaţi pe cercul trigonometric toate unghiurile t pentru care, pe rând:
a) $\frac{1}{2} \le \sin t \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos t \ge -\frac{1}{2}$; c) $0 < \sin t < \frac{1}{2}$; d) $\cos t < \frac{\sqrt{2}}{2}$;
e) $\sin t > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $\sin t > 2$; g) $\cos t < -1,5$; h) $0 < \cos t \le \frac{1}{2}$.

4) Stabiliţi care din funcţiile de mai jos este pară sau impară:
a) $f(2) = -\sin x$; b) $f(x) = -2\cos x$; c) $f(x) = x \sin x$; d) $f(x) = \sin x \cos x$;
e) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$; f) $f(x) = \frac{x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$.

5) Utilizând cercul trigonometric, verificaţi egalităţile:
a) $\cos(-t) = \cos t$, $\sin(-t) = -\sin t$; b) $\sin(\pi - t) = \sin t$, $\cos(\pi - t) = -\cos t$;
c) $\sin(\pi + t) = -\sin t$, $\cos(\pi + t) = -\cos t$.

6) Aduceţi la o formă mai simplă expresiile:
a) $\sin t - \frac{1}{\sin t}$; b) $\cos t + \frac{\sin^2 t}{\cos t}$; c) $(\sin t - \cos t)^2$; d) $(1 - \sin t)(1 + \sin t)$;
e) $(\cos t - 1)(\cos t + 1)$; f) $\frac{\sin t}{1 + \cos t} + \frac{1 + \cos t}{\sin t}$; g) $\frac{\cos t}{1 + \sin t} + \frac{\sin t}{1 + \cos t} + \frac{(1 - \sin t)(1 - \cos t)}{\sin t \cos t}$.

7) Stabiliţi semnul diferenţelor:
a) $\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{4}$; b) $\cos \frac{13\pi}{6} - \cos \frac{7\pi}{3}$; c) $\sin \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{7\pi}{3}$; d) $\cos \frac{4\pi}{3} - \cos \frac{13\pi}{6}$;
e) $\sin \frac{8\pi}{5} - \cos \frac{7\pi}{5}$; f) $\sin 27^\circ - \sin 400^\circ$; g) $\sin 325^\circ - \sin 43^\circ$; h) $\cos 77^\circ - \cos 460^\circ$.

8) Stabiliţi valoarea de adevăr a fiecărei propoziţii:
$p_1 : \sin 33^\circ < \sin 148^\circ$; $p_2 : \cos 26^\circ > \cos 334^\circ$; $p_3 : \sin 48^\circ = \sin 408^\circ$; $p_4 : \sin \frac{\sqrt{2}}{2} > \cos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9) Să se arate că au loc inegalităţile ($\alpha \in \mathbb{R}$):
a) $\cos \alpha < 5 + \sin^2 \alpha$; b) $2\sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1 \ge 0$; c) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha \ge \frac{1}{2}$; d) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha \ge \frac{1}{4}$.

1. Dacă $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, atunci să se calculeze $\cos\alpha$.

2. Pentru $\cos\alpha=-\frac{1}{5}$, $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, calculaţi $\sin\alpha$.

3. Să se calculeze $\sin(-1830^\circ)$, $\cos 2925^\circ$, $\cos\left(-\frac{81\pi}{4}\right)$, $\sin\frac{193\pi}{6}$.

4. Determinaţi cea mai mică şi cea mai mare valoare a funcţiilor:

1) $f(x)=2+3\sin x$; 2) $f(x)=1-2\cos x$; 3) $f(x)=5+\sin^2 x$; 4) $f(x)=4\sin^2 x+5\cos^2 x$.

5. Să se demonstreze egalităţile:

1) $\sin^2 x-\cos^2 x=2\sin^2-1=1-2\cos^2 x$; 2) $\sin^4 x-\cos^4 x=2\sin^2 x-1$;

3) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$; 4) $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$.

5) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$; 6) $\frac{\sin^4 t+\cos^4 t-1}{\sin^6 t+\cos^6 t-1}=\frac{2}{3}$;

7) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; 8) $\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}=3$.

6. Să se demonstreze inegalitatea $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha\geq\frac{1}{8}$.

7. Să se arate că dacă $\sin^n x+\cos^n x=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, atunci $n=2$.

8. a) Să se arate că $|\sin n\alpha|<n\sin\alpha$, $\forall n\geq 2$, $\forall\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi apoi să se deducă inegalitatea $\sin 10^\circ>\frac{1}{6}$.

b) Fie $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\sin x+\cos x\in\mathbb{Q}$. Să se arate că:

1) $\sin^{n+2}x+\cos^{n+2}x=(\sin^n x+\cos^n x)(\sin^2 x+\cos^2 x)-\sin^2 x\cos^2 x(\sin^{n-2}x+\cos^{n-2}x)$;

2) $\sin^n x+\cos^n x\in\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

9. Dacă $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$, atunci calculaţi $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

10. Să se arate că dacă $\frac{1-\sin x}{1-2\sin x}<\frac{\sin x}{1-4\sin^2 x}$, atunci $\frac{1}{4}<\sin^2 x<\frac{1}{2}$.

11. Să se arate că există egalitatea $\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\ldots+\cos^2 90^\circ=44,5$.

12. Să se arate că, dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică relaţia $f(x+k)\cdot(1-f(x))=1+f(x)$, pentru k fixat, atunci f este periodică.

13. Să se arate că nu există funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $|f(x+y)+\sin x+\sin y|<2$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

14. Pentru orice funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, există funcţiile $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=g(x)\sin x+h(x)\cos x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Funcţiile tangentă şi cotangentă

Plecând de la rapoartele trigonometrice tg şi ctg din triunghiul dreptunghic

$$\operatorname{tg}B=\frac{\sin B}{\cos B},\quad \operatorname{ctg}B=\frac{\cos B}{\sin B},\quad \forall B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

vom defini în acelaşi mod $\operatorname{tg}\alpha$ şi $\operatorname{ctg}\alpha$ pentru $\alpha\in\mathbb{R}$ ca fiind $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Dar să observăm că raportul care defineşte $\operatorname{tg}\alpha$ există dacă

$\cos\alpha\neq 0$, adică $\alpha\notin\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

Analog raportul care defineşte $\operatorname{ctg}\alpha$ există dacă numitorul

$\sin\alpha\neq 0$, adică $\alpha\notin\{2k\pi,\pi+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}=\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Definiţie. **Tangenta** lui $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ (notată $\operatorname{tg}\alpha$) este egală cu raportul dintre $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$, adică $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Cotangenta lui $\alpha \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (notată $\operatorname{ctg}\alpha$) este egală cu raportul dintre $\cos\alpha$ şi $\sin\alpha$, adică $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Aplicaţii. 1) Dacă $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = 3$, atunci să se calculeze $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

R. Se ridică relaţia dată la pătrat şi rezultă $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 9$ sau $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 11$, deoarece $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$.

2) Să se demonstreze egalitatea $\dfrac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^6\alpha$.

R. Se aduce membrul stâng la o formă mai simplă înlocuind $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, când avem $\dfrac{\sin^4\alpha(\cos^2\alpha - 1)}{\cos^4\alpha(\sin^2\alpha - 1)} = \dfrac{\sin^6\alpha}{\cos^6\alpha} = \operatorname{tg}^6\alpha$.

3) Să se arate că dacă $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geq 2$.

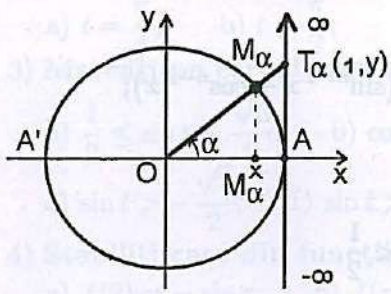


Fig.16

R. Din $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, inegalitatea devine $(\operatorname{tg}\alpha - 1)^2 \geq 0$, adevărată.

Deci avem funcţiile:

$\operatorname{tg} : \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $\alpha \to \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ şi

$\operatorname{ctg} : \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $\alpha \to \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Aşa cum pentru sin şi cos am găsit că axa $x'x$ este axa cosinusului, iar axa $y'y$ este axa sinusului, în continuare vom preciza axele pentru tangentă şi respectiv cotangentă.

Fie cercul trigonometric $\mathcal{C}$ care taie axa Ox în A şi A' (fig. 16). În punctul A ducem tangenta la cercul $\mathcal{C}$ pe care o considerăm ca axă cu originea în A şi unitatea egală cu raza cercului $\mathcal{C}$. Deasupra punctului A avem semiaxa pozitivă, iar sub A semiaxa negativă (sensul de parcurgere al axei este de jos în sus).

Această axă se numeşte **axa tangentelor**.

Pentru $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avem $M_\alpha \in \mathcal{C}$. Dreapta OM_α intersectează axa tangentelor în $T(1, y)$. Să arătăm că $y = \operatorname{tg}\alpha$. Vom face acest lucru pentru $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (primul cadran) şi pentru $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (cadranul II). La fel se procedează în celelalte cazuri.

Cazul 1. Dacă $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\triangle OM_\alpha^x M_\alpha \sim \triangle OAT_\alpha$ şi putem scrie

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{M_\alpha M_\alpha^x}{OM_\alpha^x} = \frac{AT_\alpha}{OA} = \frac{AT_\alpha}{1} = y.$$

Să observăm că dacă $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\sin\alpha, \cos\alpha > 0$ şi deci $y > 0$, ceea ce ne-a determinat să luăm semiaxa pozitivă a tangentei deasupra lui A.

Cazul 2. Dacă $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci (fig. 17) $\triangle OM_\alpha^x M_\alpha \sim \triangle OAT$.

Pentru a găsi punctul T_α de pe axa tangentelor se prelungeşte segmentul $[M_\alpha O]$ până intersectează axa tangentelor în T_α. Se observă că aceasta este tăiată pe semiaxa negativă. Într-adevăr din $\triangle OM_\alpha^x M_\alpha \sim \triangle OAT_\alpha$ avem $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{M_\alpha M_\alpha^x}{-OM_\alpha} = -\dfrac{AT_\alpha}{OA} = -\dfrac{AT_\alpha}{1} = -AT_\alpha = y$. Deci $y < 0$.

În concluzie: **pentru orice număr real** $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ **există un unic punct** T_α **pe axa tangenelor, de ordonată egală cu** $\operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\alpha$.

Considerăm cercul trigonometric $\mathcal{C}$ care intersectează axa $y'y$ în punctele B', B (fig. 18). Tangenta în punctul B la cercul $\mathcal{C}$ se organizează ca axă reală, luând originea în B, semiaxa pozitivă la dreapta lui B, iar semiaxa negativă la stânga lui B.

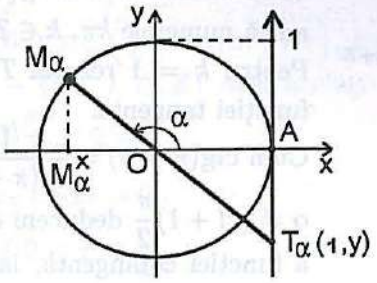


Fig. 17

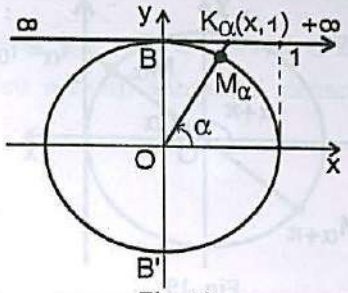


Fig. 18

Unitatea pe această axă este egală cu raza cercului $\mathcal{C}$. Această axă se numeşte **axa cotangentelor.**

Dacă $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci dreapta OM_α taie axa cotangentelor în punctul $K_\alpha(x,1)$. Abscisa acestui punct este $\operatorname{ctg}\alpha$, adică $x = \operatorname{ctg}\alpha$.

Pentru funcţiile tg şi ctg se verifică egalităţile:

$$1)\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\};$$

$$2)\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\};$$

$$3)\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \left\{k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Aplicaţii. 1) Să se arate că $\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{tg}88^\circ \cdot \operatorname{tg}89^\circ = 1$.

R. Avem egalităţile $\operatorname{tg}88^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 88^\circ) = \operatorname{ctg}2^\circ$, $\operatorname{tg}89^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 89^\circ) = \operatorname{ctg}1^\circ$ şi membrul drept al relaţiei de demonstrat este egal cu $\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{ctg}1^\circ \cdot \operatorname{ctg}2^\circ = (\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{ctg}1^\circ) \cdot (\operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{ctg}2^\circ) = 1 \cdot 1 = 1$.

2) Dacă $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 5$, atunci să se determine $\sin\alpha + \cos\alpha$, $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

R. Relaţia din ipoteză devine $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 5$ sau $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{5}$. Dar $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 =$

$= 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$, iar de aici şi $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ obţinem $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{35}}{5}$. Pentru a calcula ultima sumă se ridică la pătrat relaţia dată şi avem $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2 = 25$, adică $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 23$.

3) Să se calculeze $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$.

R. Se ridică la pătrat şi se utilizează egalitatea $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$. Se obţine valoarea 2.

Proprietăţi ale funcţiilor tangentă şi cotangentă

P'1. **(Periodicitatea funcţiilor tangentă şi cotangentă)**

$\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} - \left\{(2l+1)\frac{\pi}{2} \mid l \in \mathbb{Z}\right\}$,

$\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg}\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}$.

Funcţiile tangentă şi cotangentă au perioada principală $T^* = \pi$.

Demonstraţie. Să observăm că unghiurilor α şi $\alpha + \pi$, $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ le corespund pe cercul $\mathcal{C}$ puncte diametral opuse M_α, $M_{\alpha+\pi}$ (fig. 19), ceea ce arată că dreptele OM_α, $OM_{\alpha+\pi}$ taie axa tangentelor în acelaşi punct $T_\alpha = T_{\alpha+\pi}$, adică $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi)$.

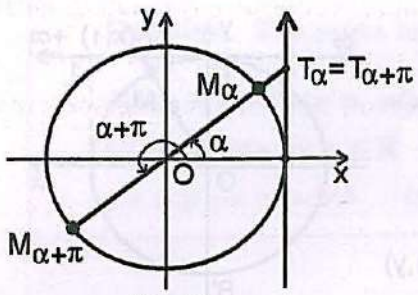


Fig. 19

Se arată inductiv că $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha$, $\forall \alpha \neq (2l+1)\frac{\pi}{2}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, adică numerele $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sunt perioade pentru funcţia tangentă. Pentru $k = 1$ rezultă $T^* = \pi$ reprezintă perioada principală a funcţiei tangentă.

Cum $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$, $\forall \alpha \neq l\pi$, $\alpha \neq (2l+1)\dfrac{\pi}{2}$ deducem că $T^* = \pi$ reprezintă perioadă principală a funcţiei cotangentă, iar mulţimea $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este mulţimea perioadelor funcţiei cotangentă. ■

Observaţie importantă. Studiul funcţiilor tangentă şi cotangentă se poate reduce la un interval de lungimea unei perioade principale $T^* = \pi$. De regulă pentru tangentă acest interval este $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, iar pentru cotangentă $(0, \pi)$. Pentru a obţine informaţii despre o anumită proprietate a lor pe domeniile maxime de definiţie, dacă este adevărată în anumite puncte din intervalul de studiu, se adaugă acestor puncte multiplu de perioada principală (dacă x_0 este un astfel de punct, atunci punctele căutate din domeniu sunt $x_0 + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$; etc.). Cu această proprietate se aduce calculul tangentei şi cotangentei unui unghi la un unghi situat în intervalul $(0, \pi)$.

De exemplu: $\operatorname{tg}\dfrac{61\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(15\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$ sau $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{38\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-13\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

P_2'. (Paritatea funcţiilor tangentă şi cotangentă)
Funcţiile tangentă şi cotangentă sunt impare, adică

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \forall \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \quad \forall \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstraţie. Avem: $\operatorname{tg}(-\alpha) = \dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$, unde am folosit proprietatea P_4 a funcţiilor sinus şi cosinus. Analog $\operatorname{ctg}(-\alpha) = \dfrac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$. ■

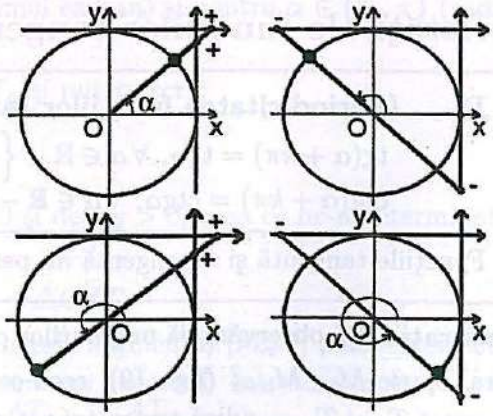
În concluzie avem:

Funcţii impare:
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

Funcţie pară:
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

P_3' (Semnul funcţiilor tangentă şi cotangentă) Semnul funcţiilor tangentă şi cotangentă în cele patru cadrane este redat în tabelul de mai jos:

Funcţia → / Cadranul ↓	tg	ctg
I	+	+
II	−	−
III	+	+
IV	−	−



Semnul funcţiei tangentă pe $\mathbb{R}-\left\{(2l+1)\frac{\pi}{2}\mid l\in\mathbb{Z}\right\}$ este:

$\operatorname{tg}x>0,\ \forall x\in\left(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z};\ \operatorname{tg}x<0,\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z};\ \operatorname{tg}x=0,\ x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Analog semnul funcţiei cotangentă pe $\mathbb{R}-\{l\pi\mid l\in\mathbb{Z}\}$ este acelaşi cu semnul tangentei deoarece $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$, în plus $\operatorname{ctg}x=0,\ \forall x=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

Exemplu. Precizaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\operatorname{ctg}2x>0$.

R. Avem $\operatorname{ctg}2x>0$ dacă $0<2x<\frac{\pi}{2}$, adică $0<x<\frac{\pi}{4}$.

P_4'. (Monotonia funcţiilor tangentă şi cotangentă)

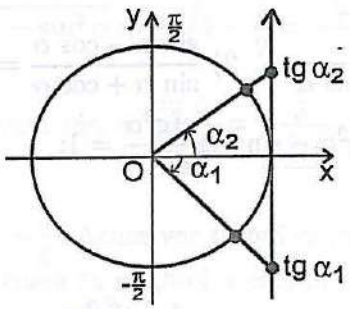
Funcţia tangentă este **strict crescătoare** pe $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ şi marcăm aceasta în tabelul

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg}x$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Funcţia cotangentă este **strict descrescătoare** pe $(0,\pi)$ şi vom indica aceasta prin tabelul

x	0		π
$\operatorname{ctg}x$		$\searrow$	

Această proprietate o punem în evidenţă pe cercul trigonometric (fig. 20).



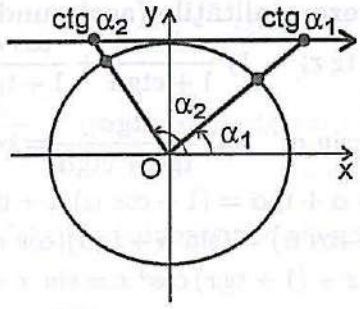


Fig. 20

$-\frac{\pi}{2}<\alpha_1<\alpha_2<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha_1<\operatorname{tg}\alpha_2$ $\qquad$ $0<\alpha_1<\alpha_2<\pi\Rightarrow\operatorname{ctg}\alpha_1>\operatorname{ctg}\alpha_2$

Exemple. 1) Să se determine semnul diferenţelor: $\operatorname{tg}200^\circ-\operatorname{tg}190^\circ,\ \operatorname{ctg}73^\circ-\operatorname{ctg}74^\circ$.

R. Cum $180^\circ<190^\circ<200^\circ<270^\circ$, iar tangenta este strict crescătoare în cadranul trei deducem $\operatorname{tg}190^\circ<\operatorname{tg}200^\circ$ şi deci diferenţa este pozitivă. Din $0<73^\circ<74^\circ<90^\circ$ şi faptul că funcţia cotangentă este strict descrescătoare în primul cadran rezultă $\operatorname{ctg}73^\circ>\operatorname{ctg}74^\circ$. Deci diferenţa cerută este pozitivă.

2) Utilizând cercul trigonometric să se rezolve pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ inecuaţia $-\sqrt{3}<\operatorname{tg}x<1$.

R. Din $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)<\operatorname{tg}x<\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ şi faptul că tangenta este strict crescătoare rezultă $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{4}$.

Probleme propuse

0. **1) Să se calculeze :** $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3};\ \operatorname{tg}45^\circ\operatorname{ctg}60^\circ;\ \operatorname{tg}0^\circ+\operatorname{ctg}45^\circ;\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

2) Marcaţi pe cercul trigonometric toate unghiurile t pentru care, pe rând:

a) $0\le\operatorname{tg}t\le1$; b) $\operatorname{ctg}t\le1$; c) $\operatorname{tg}t>\sqrt{3}$; d) $-1<\operatorname{ctg}t\le0$; e) $-\sqrt{3}\le\operatorname{tg}t<-1$; f) $\operatorname{ctg}t\ge\sqrt{3}$.

3) Stabiliţi care din funcţiile de mai jos este pară sau impară:

a) $f(t)=t\operatorname{tg}t$; b) $f(t)=t+2\operatorname{ctg}t$; c) $f(t)=3\operatorname{tg}t\operatorname{ctg}2t$; d) $f(t)=\frac{\operatorname{tg}t}{t}$; e) $f(t)=\frac{t}{\operatorname{ctg}t}$.

4) Utilizând cercul trigonometric, verificaţi egalităţile (acolo unde au sens):

a) $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg}t$; $\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg}t$; b) $\operatorname{tg}(\pi - t) = -\operatorname{tg}t$; $\operatorname{ctg}(\pi - t) = -\operatorname{ctg}t$;

c) $\operatorname{tg}(\pi + t) = \operatorname{tg}t$; $\operatorname{ctg}(\pi + t) = \operatorname{ctg}t$.

5) Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:

a) $\cos t \cdot \operatorname{tg}t + \sin t \operatorname{ctg}t$; b) $(1 + \operatorname{tg}^2 t)\cos^2 t$; c) $\dfrac{1 - \sin^2 t}{1 - \cos^2 t} \cdot \operatorname{tg}^2 t$; d) $(\operatorname{tg}t + \operatorname{ctg}t)^2$; e) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 t}$.

6) Stabiliţi semnul diferenţelor:

a) $\operatorname{tg}120° - \operatorname{tg}60°$; b) $\operatorname{ctg}60° - \operatorname{ctg}45°$; c) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4} - \operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}$; d) $\operatorname{ctg}\dfrac{4\pi}{3} - \operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}$;

e) $\operatorname{tg}340° - \operatorname{ctg}280°$; f) $\operatorname{ctg}125° - \operatorname{tg}300°$.

7) Să se arate că au loc inegalităţile:

a) $\operatorname{tg}^2 t + 2 < 3\operatorname{tg}t$, $t \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right]$; b) $\operatorname{tg}^2 t < \operatorname{tg}t$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$; c) $2\operatorname{ctg}^2 t + 1 > 3\operatorname{ctg}t$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$;

d) $\operatorname{ctg}^2 t < \operatorname{ctg}t$, $t \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

8) Utilizând cercul trigonometric să se rezolve:

a) **pe intervalul $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, inecuaţiile:**

1°) $\operatorname{tg}x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 2°) $\operatorname{tg}x < 1$; 3°) $-1 \leq \operatorname{tg}x \geq \sqrt{3}$; 4°) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{tg}x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

b) **pe intervalul $(0, \pi)$, inecuaţiile:**

1°) $\operatorname{ctg}x \geq \sqrt{3}$; 2°) $\operatorname{ctg}x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 3°) $-\sqrt{3} \leq \operatorname{ctg}x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 4°) $-1 < \operatorname{ctg}x < \sqrt{3}$.

1. Să se demonstreze egalităţile (acolo unde au sens):

0) $\dfrac{\sin x + \operatorname{tg}x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg}x$; 1) $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1}$;

3) $\dfrac{\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + \sec\alpha} = \sin\alpha$; 4) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \cos^2\alpha$; 5) $(\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha)\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1$;

6) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 + \operatorname{tg}\alpha)$;

7) $(1 + \sin\alpha)(1 + \cos\alpha) = (\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$;

8) $(1 + \operatorname{ctg}x)\sin^3 x + (1 + \operatorname{tg}x)\cos^3 x = \sin x + \cos x$;

9) $\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha + \cos^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$; 10) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \dfrac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

2. 1) Calculaţi $\dfrac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, dacă $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{5}$. 2) Dacă $\operatorname{tg}x = \cos x$, atunci $\sin x = ?$

Relaţii între funcţiile trigonometrice ale unui unghi

Conform relaţiilor stabilite până acum, orice funcţie trigonometrică a unui unghi se poate exprima prin oricare altă funcţie trigonometrică a aceluiaşi unghi. Am văzut cum se exprimă $\sin\alpha$ în funcţie de $\cos\alpha$ prin intermediul formulei fundamentale a trigonometriei

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

La fel $\operatorname{tg}\alpha$ se poate exprima numai în funcţie de, să spunem, $\cos\alpha$ prin intermediul formulei

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Următorul tabel conţine toate relaţiile (pe care le propunem ca exerciţiu):

de aflat	fiind date			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha=$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha=$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha=$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha=$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Pentru unghiurile din primul cadran radicalii vor avea ca semn +, în celelalte cadrane semnul din faţa radicalului se va stabili conform tabelului de semn pentru funcţii sau pe baza cercului trigonometric.

Probleme rezolvate

1. Să se determine valorile tuturor funcţiilor trigonometrice ale unghiului α în cazurile $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$, $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$.

R. Cazul $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Din formula fundamentală $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Cum unghiul α este în cadranul doi, iar aici cosinusul este negativ, atunci alegem în faţa radicalului semnul minus. Deci $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Pentru $\operatorname{tg}\alpha$ avem $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ şi apoi imediat $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\dfrac{4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$.

Cazul $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$. Acum vor trebui exprimate celelalte funcţii trigonometrice ale unghiului în funcţie de $\operatorname{tg}\alpha$, ţinând seama ca unghiul α este în cadranul patru.

Avem egalitatea $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin^2\alpha$, iar de aici $\sin\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

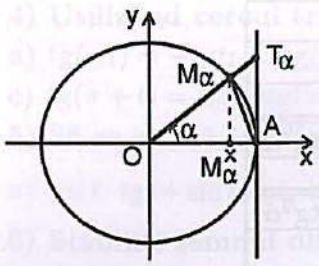
Deci $\sin\alpha=\dfrac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\dfrac{-\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=-\frac{3}{5}$. Din egalitatea $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\cos^2\alpha$ rezultă $\cos\alpha=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

Cosinusul unui unghi din cadranul patru este pozitiv. Deci $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\frac{4}{5}$.

Altfel: având $\sin\alpha$ se poate calcula $\cos\alpha$ din formula fundamentală a trigonometriei, via cadranul în care este situat unghiul. Aici (cadranul patru) avem:
$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{5}$. Pentru $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{4}{3}$.

2. Să se arate că dacă $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\boxed{\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha}$

R. Fie M_α punctul de pe cercul trigonometric corespunzător unghiului α. Primul lanţ de inegalităţi rezultă din inegalităţile între arii $S_{OAM_\alpha}<S_{\text{sector }AOM_\alpha}<S_{OAT_\alpha}$, unde T_α este punctul



corespunzător unghiului α pe axa tangentelor.

Avem $S_{OAM_\alpha} = \dfrac{OA \cdot M_\alpha M_\alpha^x}{2} = \dfrac{1}{2}\sin\alpha$, $S_{\text{sector } AOM_\alpha} = \dfrac{\alpha}{2}$ (dacă la 2π radiani... aria π, atunci la α radiani avem aria x; deci $x = \dfrac{\alpha}{2}$),

$S_{OAT_\alpha} = \dfrac{OA \cdot AT_\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\text{tg}\alpha$.

3. Dacă $\text{tg}\alpha + \text{ctg}\alpha = 5$, atunci să se calculeze: a) $\text{tg}^2\alpha + \text{ctg}^2\alpha$; b) $\text{tg}^3\alpha + \text{ctg}^3\alpha$.

R. a) Ridicând relaţia dată la pătrat se obţine: $\text{tg}^2\alpha + \text{ctg}^2\alpha = 23$.

b) Prin ridicare la cub a egalităţii date (după formula $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$) avem: $\text{tg}^3\alpha + \text{ctg}^3\alpha + 3(\text{tg}\alpha + \text{ctg}\alpha) = 125$ (am utilizat egalitatea $\text{tg}\alpha\text{ctg}\alpha = 1$).

De aici $\text{tg}^3\alpha + \text{ctg}^3\alpha = 110$.

4. a) Să se calculeze valoarea expresiei $\dfrac{\text{ctg}\alpha + \text{tg}\alpha}{\text{ctg}\alpha - \text{tg}\alpha}$ dacă $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ şi $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

b) Să se determine valoarea expresiei $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ dacă $\text{tg}\alpha = -2$.

R. a) Se determină $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \dfrac{4}{5}$. De aici $\text{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$, $\text{ctg}\alpha = \dfrac{4}{3}$. Pentru expresie găsim valoarea $\dfrac{25}{7}$.

b) Se aduce expresia la forma (se simplifică fracţia prin $\cos\alpha$) $\dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{\text{tg}\alpha + 1}{1 - \text{tg}\alpha} = \dfrac{-2+1}{1+2} = -\dfrac{1}{3}$.

5. Să se exprime în funcţie de $\text{tg}\alpha$ expresia $\dfrac{1}{1 - \sin\alpha\cos\alpha}$.

R. Se scrie expresia sub forma

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1 + \text{tg}^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha + 1 - \text{tg}\alpha}.$$

6. Calculaţi $\text{tg}\alpha$ dacă $\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$, $\alpha \in [5, 6]$.

R. Se împarte relaţia dată prin $\cos^2\alpha$ (să observăm că toţi termenii relaţiei sunt omogeni de gradul doi în $\sin\alpha$, $\cos\alpha$) şi rezultă $\text{tg}^2\alpha - \text{tg}\alpha - 2 = 0$ cu soluţiile $\text{tg}\alpha = 2$, $\text{tg}\alpha = -1$.

Cum $\alpha \in [5, 6] \subset \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, iar aici (cadranul patru) tangenta este negativă, reţinem $\text{tg}\alpha = -1$.

7. Dacă $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dfrac{\pi}{2}$, atunci $\text{tg}\alpha_1 < \dfrac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2} < \text{tg}\alpha_2$.

R. Avem $0 < \sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$ şi $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2 > 0$. Deci $2\sin\alpha_1 < \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 < 2\sin\alpha_2$ şi $2\cos\alpha_1 > \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 > 2\cos\alpha_2$, iar de aici $\dfrac{2\sin\alpha_1}{2\cos\alpha_1} < \dfrac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2} < \dfrac{2\sin\alpha_2}{2\cos\alpha_2}$.

Probleme propuse

1. Comparaţi cu zero numerele:

1) sin 1, sin 2, sin 3, sin 4, sin 5, sin 6; 2) cos 1, cos 2, cos 3, cos 4, cos 5, cos 6;

3) tg1, tg2, tg3, tg4, tg5, tg6; 4) ctg1, ctg2, ctg3, ctg4, ctg5, ctg6.

2. Determinaţi α din primul cerc trigonometric ($[0, 2\pi)$) şi apoi din $\mathbb{R}$ pentru care (pe rând):

1) $\sin^2\alpha - 3\sin\alpha = 0$; 2) $\sin^2\alpha - 3\sin\alpha + 2 = 0$; 3) $\sin\alpha\cos\alpha = 0$;

4) $\cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 1 = 0$; 5) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha = 0$.

3. **Calculaţi:**

1) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ **dacă** $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ **şi** $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ **dacă** $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ **şi** $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

3) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ **dacă** $\operatorname{ctg}\alpha = -2$ **şi** $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 4) $\frac{5\sin\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ **dacă** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{15}$;

5) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$ **dacă** $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2$.

6) $\frac{8\cos^3\alpha - 2\sin^3\alpha + \cos\alpha}{2\cos\alpha - \sin^3\alpha}$, **dacă** $\operatorname{tg}\alpha = 2$ **(Se vor omogeniza, mai întâi, numărătorul şi numitorul).**

4. **Determinaţi valorile tuturor funcţiilor trigonometrice ale unghiului α în cazurile:**

1) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha = -5$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$;

4) $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$, $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; 5) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; 6) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Reducerea la primul cadran

Atunci când avem de calculat $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\alpha \geq 2\pi$ (sau $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha > \pi$ – acolo unde există) se reduce calculul acestora din unghiuri situate în primul cerc trigonometric $[0, 2\pi)$ (sau din unghiuri situate în $[0, \pi)$) prin utilizarea perioadei 2π (π) şi a formulelor

$\sin\alpha = \sin(2k\pi + r) = \sin r$,

$\cos\alpha = \cos(2k\pi + r) = \cos r$, $r \in [0, 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

$(\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(k\pi + r_0) = \operatorname{tg} r_0$, $r_0 \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$,

$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(k\pi + r_0) = \operatorname{ctg} r_0$, $r_0 \in (0, \pi))$.

Dacă $\alpha < 0$, atunci se utilizează paritatea funcţiilor trigonometrice şi apoi periodicitatea.

Mai mult vom reduce calculul acestor unghiuri la primul cadran.

Trecerea din cadranul doi în cadranul întâi

Dacă $r \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci acest unghi se poate scrie sub forma $r = \pi - x$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, când

$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad \text{şi} \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \text{(fig. 21)}$$

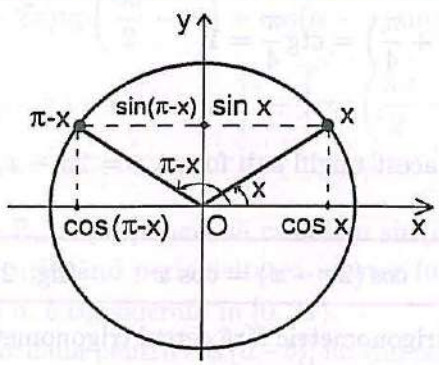


Fig. 21

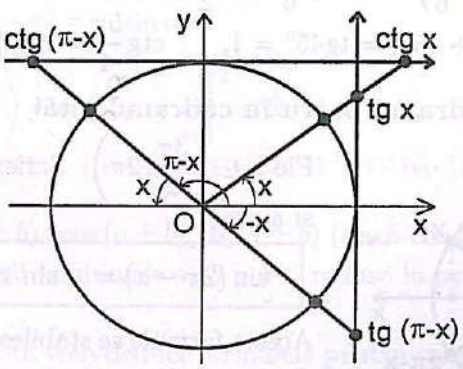


Fig. 22

Pentru comoditate, pe cerc, în loc de M_x vom scrie x adică măsura arcului care corespunde unghiului

$\widehat{AOM_x}$.

De asemenea, dacă $r_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci $r_0 = \pi - x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi deci

$$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x \qquad \text{(fig. 22)}$$

Exemplu. Să se calculeze $\sin 120°$, $\cos \frac{5\pi}{6}$, $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{ctg}120°$.

Avem $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad \cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$, $\quad \operatorname{ctg}120° = \operatorname{ctg}(180° - 60°) = -\operatorname{ctg}60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Trecerea din cadranul trei în cadranul întâi

Dacă $r \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, atunci scriem acest unghi sub forma $r = \pi + x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, când

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \text{(fig. 23)}$$

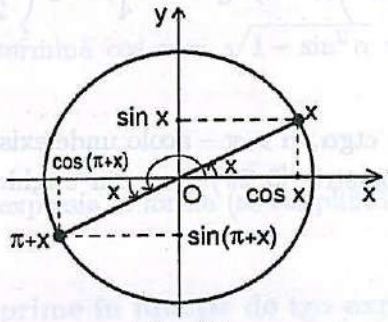


Fig. 23

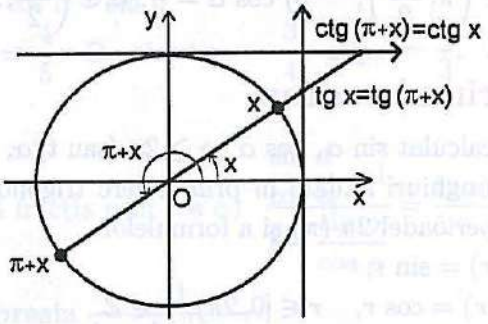


Fig. 24

Pentru funcţiile tangentă şi cotangentă utilizăm faptul că sunt periodice de perioadă principală $T^* = \pi$ şi deci:

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(\pi + x) = \operatorname{ctg} x \qquad \text{(fig. 24)}$$

Exemplu. Să se calculeze $\sin \frac{7\pi}{6}$, $\cos 240°$, $\operatorname{tg}225°$, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$.

Avem succesiv:

$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\quad \cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$,

$\operatorname{tg}225° = \operatorname{tg}(180° + 45°) = \operatorname{tg}45° = 1$, $\quad \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$.

Trecerea din cadranul patru în cadranul întâi

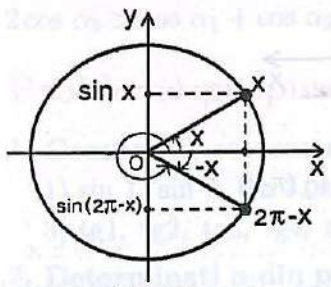


Fig. 25

Fie $r \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Scriem acest unghi sub forma $r = 2\pi - x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi avem:

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x, \quad \cos(2\pi - x) = \cos x \qquad \text{(fig. 25)}$$

Aceste formule se stabilesc trigonometric fără cercul trigonometric utilizând doar periodicitatea şi paritatea funcţiilor.

Într-adevăr:

$\sin(2\pi - x) = \sin[2\pi + (-x)] = \sin(-x) = -\sin x$,

$\cos(2\pi - x) = \cos[2\pi + (-x)] = \cos(-x) = \cos x.$

Analog avem pentru

$$\operatorname{tg}(2\pi - x) = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}x, \quad \operatorname{ctg}(2\pi - x) = -\operatorname{ctg}x$$

Exemplu. Să se calculeze $\sin 300°$, $\cos 330°$, $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$, $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$.

Avem: $\sin 300° = \sin(360° - 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\cos 330° = \cos(360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$, $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6} = \operatorname{ctg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$.

Probleme propuse

1. 1) **Să se calculeze:**

$\sin\frac{3\pi}{4}, \cos\frac{3\pi}{4}, \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}, \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$; $\sin\frac{5\pi}{6}, \cos\frac{5\pi}{6}, \operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}, \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$; $\sin\frac{7\pi}{6}, \cos\frac{7\pi}{6}, \operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}, \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}$;

$\sin\frac{4\pi}{3}, \cos\frac{4\pi}{3}, \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}, \operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$; $\sin\frac{7\pi}{4}, \cos\frac{7\pi}{4}, \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}, \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$; $\sin\frac{5\pi}{3}, \cos\frac{5\pi}{3}, \operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}, \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$;

$\sin\frac{11\pi}{6}, \cos\frac{11\pi}{6}, \operatorname{tg}\frac{11\pi}{6}, \operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$; $\sin\frac{13\pi}{6}, \cos\frac{13\pi}{6}, \operatorname{tg}\frac{13\pi}{6}, \operatorname{ctg}\frac{13\pi}{6}$; $\sin\frac{7\pi}{3}, \cos\frac{7\pi}{3}, \operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}, \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{3}$.

2) **Să se determine semnul următoarelor numere:**

$\sin 2 \sin 4 \sin 6$, $\cos 5 \cos 7 \cos 8$, $\operatorname{tg}(-1)\operatorname{tg}3\operatorname{tg}6\operatorname{tg}(-5)$, $\operatorname{ctg}1\operatorname{ctg}(-2)\operatorname{ctg}(-7)$, $\frac{\sin 7 \cos(-8)}{\operatorname{tg}6\operatorname{ctg}(-5)}$.

2. 1) **Să se demonstreze egalităţile:**

a) $\operatorname{tg}1°\operatorname{tg}2° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}89° = 1$; b) $\operatorname{ctg}15°\operatorname{ctg}16° \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg}74°\operatorname{ctg}75° = 1$;

c) $\sin 5° + \sin 10° + \sin 15° + \sin 345° + \sin 350° + \sin 355° = 0$;

d) $\cos 20° + \cos 40° + \cos 60° + \cos 120° + \cos 140° + \cos 160° + \cos 180° = -1$;

e) $\operatorname{tg}20° + \operatorname{tg}40° + \operatorname{tg}60° + \operatorname{tg}120° + \operatorname{tg}140° + \operatorname{tg}160° + \operatorname{tg}180° = 0$.

2) **Să se demonstreze egalităţile (acolo unde au sens):**

a) $\frac{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 + \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)} = \frac{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) + 1}{\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 1}$; b) $\frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = 1$;

c) $\sin\alpha + \sin(90° + \alpha) + \sin(180° + \alpha) + \sin(270° + \alpha) + \sin(360° + \alpha) = \sin\alpha$;

d) $\cos(\alpha + 40°) + \cos(\alpha + 130°) + \cos(\alpha + 270°) + \cos(\alpha + 310°) = 0$;

e) $\sin(\alpha - 2\pi)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$;

f) $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x)\right]^2 = 2$.

Formule trigonometrice pentru suma şi diferenţa a două unghiuri

Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, ne propunem să calculăm $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\operatorname{tg}(a \pm b)$ (dacă $\cos(a \pm b) \neq 0$).

Am văzut că utilizând periodicitatea acestor funcţii unghiurile a, b pot fi reduse la primul cerc trigonometric, adică a, b considerate în $[0, 2\pi)$.

Vom stabili formula pentru $\cos(a - b)$, iar din aceasta vom deduce formulele pentru $\cos(a + b)$, $\sin(a \pm b)$.

Aceste formule trigonometrice (sau identităţi trigonometrice) sunt de fapt egalităţi verificate pe tot domeniul lor de definiţie.

Are loc următoarea

Teoremă. Avem identităţile:

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,\ \forall a, b \in \mathbb{R}.$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a\operatorname{tg}b},\ \forall a, b, a+b \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}b}{1 + \operatorname{tg}a\operatorname{tg}b},\ \forall a, b, a-b \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Demonstraţie. Se poate presupune $a \geq b$ (dacă $a < b$, atunci $\cos(a-b) = \cos[-(b-a)] = \cos(b-a)$ – funcţia cosinus fiind pară).

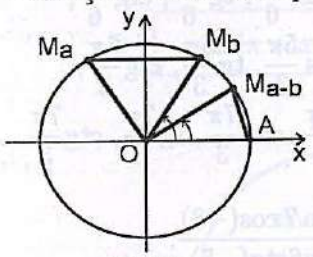


Fig. 26

Fie M_a, M_b, M_{a-b} punctele pe cercul trigonometric $\mathcal{C}$ (fig. 26) corespunzătoare unghiurilor a, b şi respectiv $a-b$. Deci $M_a(\cos a, \sin a)$, $M_b(\cos b, \sin b)$ $M_{a-b}(\cos(a-b), \sin(a-b))$.
Unghiurile $\widehat{M_bOM_a}$, $\widehat{AOM_{a-b}}$ au aceeaşi măsură. Prin urmare corzile $[AM_{a-b}]$ şi $[M_bM_a]$ au aceeaşi lungime (corespund la arce congruente), adică $AM_{a-b} = M_bM_a$ (unde $A(1,0)$). De aici:
$(\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = [\cos(a-b) - 1]^2 + [\sin(a-b) - 0]^2$.
După efectuarea calculelor se obţine formula $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
Acum $\cos(a+b) = \cos[a-(-b)] = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, unde am folosit că funcţia cosinus este pară, iar sinus este impară.
De asemenea, $\sin(a+b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b +$
$+ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$
În fine, $\sin(a-b) = \sin[a+(-b)] = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$
Mai verificăm formula pentru $\operatorname{tg}(a+b)$. Avem: $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} =$

$$= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\dfrac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\sin a}{\cos a} \cdot \dfrac{\sin b}{\cos b}} = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}. \quad \blacksquare$$

Observaţii. 1) Deduceţi formulele cunoscute pentru $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $\sin(\pi \pm \alpha)$, $\cos(\pi \pm \alpha)$, $\operatorname{tg}(\pi \pm \alpha)$ etc. utilizând teorema precedentă.
2) În identităţile care conţin funcţiile tangentă şi cotangentă nu am mai indicat domeniul lor de definiţie, acesta urmând a fi precizat de cititor.

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze $\sin 75°$, $\cos\frac{7\pi}{12}$.

R. Avem: $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ şi
$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3}).$

2. **Să se calculeze:**

a) $\sin 17^\circ \cos 13^\circ + \cos 17^\circ \sin 13^\circ$; b) $\cos 73^\circ \cos 17^\circ - \sin 73^\circ \sin 17^\circ$; c) $\dfrac{\mathrm{tg}31^\circ + \mathrm{tg}14^\circ}{1 - \mathrm{tg}31^\circ \mathrm{tg}14^\circ}$.

R. Utilizăm formulele din teoremă şi avem:

a) $\sin 17^\circ \cos 13^\circ + \cos 17^\circ \sin 13^\circ = \sin(17^\circ + 13^\circ) = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$;

b) $\cos 73^\circ \cos 17^\circ - \sin 73^\circ \sin 17^\circ = \cos(73^\circ + 17^\circ) = \cos 90^\circ = 0$;

c) $\dfrac{\mathrm{tg}31^\circ + \mathrm{tg}14^\circ}{1 - \mathrm{tg}31^\circ \mathrm{tg}14^\circ} = \mathrm{tg}(31^\circ + 14^\circ) = \mathrm{tg}45^\circ = 1$.

3. **Dacă** $\sin a = \dfrac{1}{3}$, $\cos b = \dfrac{1}{5}$, $a \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, $b \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, **atunci să se calculeze** $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\mathrm{tg}(a \pm b)$.

R. În formulele care dau sinusul şi cosinusul sumei şi diferenţei apar $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$, $\cos b$.

Cum sunt cunoscute numerele $\sin a$, $\cos b$, vor trebui calculate $\cos a$, $\sin b$.

Utilizăm formula fundamentală a trigonometriei $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Deci $\cos a = \pm\sqrt{1 - \sin^2 a}$. Cum unghiul a este în cadranul doi, atunci $\cos a < 0$. Deci în formula care dă $\cos a$ se ia semnul minus. Avem $\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \dfrac{1}{9}} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Pentru $\sin b$ avem $\sin b = -\sqrt{1 - \cos^2 b} = -\sqrt{1 - \dfrac{1}{25}} = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ (am luat semnul minus în faţa radicalului deoarece unghiul b fiind în cadranul patru, sinusul este negativ).

Acum avem uşor

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b = \dfrac{1}{15}(1 \pm 8\sqrt{3})$ (semnele se corespund) plus cu plus, minus cu minus).

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b = -\dfrac{2\sqrt{2}}{15}(1 \mp \sqrt{3})$.

$\mathrm{tg}(a \pm b) = \dfrac{\sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \cdot \dfrac{1 \pm 8\sqrt{3}}{1 \mp \sqrt{3}}$.

4. **Să se arate că** $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$, **unde** $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{b}{a}$, $a \neq 0$. **În particular** $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

R. Membrul stâng îl scriem: $a\left(\sin x + \dfrac{b}{a}\cos x\right)$. Cum $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{R}$, atunci se poate constata la funcţia tangentă că există un unghi $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{b}{a}$.

Cu această observaţie membrul stâng se va prelucra astfel

$a(\sin x + \mathrm{tg}\alpha \cos x) = a\left(\sin x + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x\right) = \dfrac{a(\sin x \cos\alpha + \sin\alpha \cos x)}{\cos\alpha} = \dfrac{a \sin(x + \alpha)}{\cos\alpha} =$

$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$, deoarece $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (unghiul $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, când $\cos\alpha > 0$).

În particular, dacă $a = b = 1$, atunci $\mathrm{tg}\alpha = 1$, iar $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Deci $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Cum $-1 \leq \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1$ rezultă de mai sus că $-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5. **Să se arate că:** a) $\dfrac{\cos(a + b)}{\cos a \cos b} = 1 - \mathrm{tg}a\mathrm{tg}b$; b) $\dfrac{\sin k}{\cos k} - \dfrac{\sin(k - 1)}{\cos(k - 1)} = \dfrac{\sin 1}{\cos k \cos(k - 1)}$

şi apoi să se calculeze suma $S_n = \dfrac{\sin 1}{\cos 0 \cos 1} + \dfrac{\sin 1}{\cos 1 \cos 2} + \ldots + \dfrac{\sin 1}{\cos(n - 1)\cos n}$.

R. a) Membrul stâng se scrie $\dfrac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\cos a\cos b}=1-\dfrac{\sin a}{\cos a}\cdot\dfrac{\sin b}{\cos b}=1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b$.

b) Găsim uşor $S=-\operatorname{tg}n$.

6. **Să se calculeze** $\cos(a-b)$ **dacă** $\sin a+\sin b=1,\quad \cos a+\cos b=\sqrt{2}$.

R. Se ridică relaţiile date la pătrat şi se adună rezultând $\cos(a-b)=\dfrac{1}{2}$.

7. **Să se exprime în funcţie de** $\operatorname{tg}x$, **rapoartele:** $\dfrac{2\cos x}{5\sin x+3\cos x}$, $\dfrac{4\sin^2 x}{3\sin x\cos x+1}$.

R. Prelucrăm rapoartele astfel: $\dfrac{2\cos x}{\cos x(5\dfrac{\sin x}{\cos x}+3)}=\dfrac{2}{5\operatorname{tg}x+3}$;

$$\frac{4\sin^2 x}{3\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x(3\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1)}=\frac{4\operatorname{tg}^2 x}{3\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x+1}.$$

8. **Să se compare** $\sin(\cos 1)$ **şi** $\cos(\sin 1)$.

R. Avem $\cos(\sin 1)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\sin 1\right)$. Trebuiesc comparate numerele $\cos 1$ şi $\dfrac{\pi}{2}-\sin 1$ din $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Cum $\sin 1+\cos 1=\sqrt{2}\sin\left(1+\dfrac{\pi}{4}\right)$ rezultă $\sin 1+\cos 1\le\sqrt{2}<\dfrac{\pi}{2}$. Dar sinus este funcţie strict crescătoare pe $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ şi deci $\sin(\cos 1)<\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\sin 1\right)=\cos(\sin 1)$.

9. **Să se arate că dacă** $x,y,u,v\in\mathbb{R}$, $x^2+y^2=2$, $u^2+v^2=5$, **atunci** $xu+yv\in[-\sqrt{10},\sqrt{10}]$.

R. Se ia $x=\sqrt{2}\cos a$, $y=\sqrt{2}\sin a$, $u=\sqrt{5}\cos b$, $v=\sqrt{5}\sin b$. Avem:
$xu+yv=\sqrt{10}\cos(a-b)\in[-\sqrt{10},\sqrt{10}]$.

10. $\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\le 1$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

R. Luând modulul membrului stâng şi utilizând $|a+b|\le|a|+|b|$, membrul stâng se majorează cu $|\sin x\sin y\sin z|+|\cos x\cos y\cos z|\le|\sin x\sin y|+|\cos x\cos y|=\pm\cos(x\pm y)\le 1$.

11. **Pe catetele** $[AB]$ **şi** $[AC]$ **ale triunghiului dreptunghic** ABC **se iau punctele** M **şi respectiv** N. **Să se arate că:** $BC\cdot MN\ge AB\cdot AM+AC\cdot AN$.

R. Se împarte relaţia prin $BC\cdot MN$, se notează $m(\widehat{AMN})=\alpha$ şi inegalitatea este $\cos(B-\alpha)\le 1$, evident.

12. **Să se arate că dacă** $x,y\in\mathbb{R}$, **atunci** $\dfrac{2(x-y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\in[-1,1]$.

R. Se pune $x=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\operatorname{tg}\beta$, $\alpha,\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ şi expresia se reduce la $\sin 2(\alpha-\beta)\in[-1,1]$.

13. **Dacă** $\cos x\cos y=1$ **atunci să se calculeze** $\cos(x\pm y)$.

R. Din ipoteză rezultă $\cos x=\cos y=1$ sau $\cos x=\cos y=-1$. În ambele situaţii $\sin x=\sin y=0$. Se obţine $\cos(x\pm y)=1$.

14. **Dacă** $x,y,z\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, **atunci** $\sin(x+y)\sin(y+z)\sin(x+z)>\sin 2x\sin 2y\sin 2z$.

R. Se aplică inegalitatea mediilor pentru fiecare factor din membrul stâng $\sin(x+y)=\sin x\cos y+$ $+\sin y\cos x\ge 2\sqrt{\sin x\sin y\cos x\cos y}$ şi se face produsul lor.

15.* **Fie** $a_i,x_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, $\cos x=\sum_{i=1}^{n}a_i\cos x_i$, $\sin x=\sum_{i=1}^{n}a_i\sin x_i$, $x\in\mathbb{R}$. **Să se arate că** $\sum_{i=1}^{n}|a_i|\ge 1$.

R. Se ridică relaţiile pentru $\sin x$, $\cos x$ la pătrat şi se adună obţinând

$1=\sum a_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j\cos(x_i-x_j)$. De aici (luând modulul)

$1\le\sum|a_i|^2+2\sum|a_i||a_j||\cos(x_i-x_j)|\le\sum|a_i|^2+2\sum|a_i||a_j|=\left(\sum|a_i|\right)^2$.

16. **Doi observatori se află în acelaşi plan vertical cu un zmeu. Distanţa dintre observatori este de 20 m. Ei văd zmeul sub unghiuri de ridicare de 60° şi respectiv 75°. Să se determine înălţimea la care se află zmeul.**

R. Fie x distanţa pe orizontală de la al doilea observator la zmeu, iar h distanţa de la zmeu la pământ. Avem relaţiile $\operatorname{tg}60°=\dfrac{h}{20+x}$, $\operatorname{tg}75°=\dfrac{h}{x}$. De aici se deduce h.

17. **(Unghiul a două drepte). În planul xOy se consideră două drepte care nu sunt verticale), care se intersectează. Dacă m_1 şi m_2 sunt pantele celor două drepte, iar θ unghiul ascuţit făcut de cele două drepte, atunci $\operatorname{tg}\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$.**

Aplicaţie. Pentru dreptele $(d_1): y=2x+1$, $(d_2): y=-3x+2$, determinaţi $\operatorname{tg}\theta$.

R. Fie $\theta_1,\theta_2\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ unghiurile pe care le fac dreptele (d_1), (d_2) cu axa Ox. Atunci $\theta=\theta_1-\theta_2$, $\theta_1>\theta_2$ (dacă $\theta_2>\theta_1$, atunci $\theta=\theta_2-\theta_1$).

De aici $\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\theta_1-\theta_2)=\dfrac{\operatorname{tg}\theta_1-\operatorname{tg}\theta_2}{1+\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_2}=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$.

În cazul particular $m_1=2$, $m_2=3$ şi $\operatorname{tg}\theta=\left|\dfrac{2+3}{1-4}\right|=1$, adică $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

18. **Să se arate că pentru orice şapte numere diferite se află două x, y, astfel încât $0<\dfrac{x-y}{1+xy}<\dfrac{\sqrt3}{3}$.**

R. Se iau $x_i\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $a_i=\operatorname{tg}\alpha_i$, $i=\overline{1,7}$. Deci există două α_i, α_j (principiul cutiei) cu

$0<\alpha_i-\alpha_j<\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow 0<\operatorname{tg}(\alpha_i-\alpha_j)<\dfrac{\sqrt3}{3}\Rightarrow 0<\dfrac{a_i-a_j}{1+a_ia_j}<\dfrac{\sqrt3}{3}$.

Probleme propuse

1. **Să se calculeze:**

$\cos 75°$, $\operatorname{tg}75°$, $\sin\dfrac{7\pi}{12}$, $\sin 15°$, $\cos 15°$, $\operatorname{tg}15°$ $\sin 105°$, $\cos 105°$, $\operatorname{tg}105°$, $\sin 135°$, $\cos 135°$, $\operatorname{tg}135°$, $\sin 210°$ $\cos 210°$, $\operatorname{tg}210°$, $\sin\dfrac{5\pi}{12}$, $\cos\dfrac{5\pi}{12}$.

2. **Să se calculeze:**

a) 1) $\sin 49°\cos 11°+\cos 49°\sin 11°$; 2) $\sin 57°\cos 12°-\cos 57°\sin 12°$;

3) $\sin 104°\cos 14°-\cos 104°\sin 14°$; 4) $\cos 85°\cos 35°-\sin 85°\sin 35°$;

5) $\cos 109°\cos 49°+\sin 109°\sin 49°$; 6) $\cos 163°\cos 13°+\sin 163°\sin 13°$;

7) $\dfrac{\operatorname{tg}74°-\operatorname{tg}14°}{1+\operatorname{tg}74°\operatorname{tg}14°}$; 8) $\dfrac{\operatorname{tg}23°+\operatorname{tg}22°}{1-\operatorname{tg}23°\operatorname{tg}22°}$; 9) $\cos 68°\cos 78°+\cos 22°\cos 12°-\cos 10°$;

10) $\sin 30°-\sin 47°\sin 13°+\sin 43°\sin 77°$; 11) $1+\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin(45°+\alpha)}{\cos\alpha\cdot\cos 45°}$; $\prod_{k=1}^{44}(1+\operatorname{tg}k°)=2^{22}$.

b) 1) $\sin 5x\cos 2x-\sin 2x\cos 5x$; 2) $\sin x\cos 4x+\sin 4x\cos x$; 3) $\cos 2x\cos 3x+\sin 2x\sin 3x$;

4) $\cos 5x\cos 2x-\sin 5x\sin 2x$; 5) $\sin\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{2x}{3}+\cos\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{2x}{3}$; 6) $\cos\dfrac{3x}{4}\cos\dfrac{x}{4}+\sin\dfrac{3x}{4}\sin\dfrac{x}{4}$;

7) $\dfrac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}4x}{1-\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}4x}$; 8) $\dfrac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}5x}{1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}5x}$;

3. Să se calculeze $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\operatorname{tg}(a \pm b)$ dacă:

1) $\sin a = \frac{1}{3}$, $\sin b = \frac{1}{5}$, $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\sin a = \frac{2}{3}$, $\cos b = -\frac{1}{3}$, $a, b \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$;

3) $\cos a = -\frac{1}{5}$, $\sin b = -\frac{3}{5}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $b \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$;

4) $\cos a = -\frac{1}{7}$, $\cos b = -\frac{3}{7}$, $a, b \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; 5) $\cos a = \frac{1}{6}$, $\sin b = -\frac{5}{6}$, $a, b \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

4. Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$; 2) $\dfrac{\cos(x+y)+\sin x \sin y}{\cos(x-y)-\sin x \sin y}$;

3) $\cos(a+b)\cos(a-b)+\sin(a+b)\sin(a-b)$; 4) $\cos(x+y) \pm \cos(x-y)$;

5) $\sin(x+y) \pm \sin(x-y)$; 6) $\sin x + \sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$.

5. Să se demonstreze egalităţile:

1) $\dfrac{\sin 20^\circ \cos 25^\circ + \cos 20^\circ \sin 25^\circ}{\cos 35^\circ \cos 10^\circ - \sin 35^\circ \sin 10^\circ} = 1$; 2) $\dfrac{\sin 34^\circ \sin 146^\circ + \sin 236^\circ \sin 304^\circ}{\cos 32^\circ \cos 28^\circ - \cos 302^\circ \sin 152^\circ} = 2$;

3) $\dfrac{\sin\frac{7\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{7\pi}{30}\sin\frac{4\pi}{15}}{\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{7\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}} = 2$; 4) $\dfrac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \sin 187^\circ} = 1$; 5) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$.

6. Să se arate că $a\sin x - b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x-\alpha)$, $a > 0$ $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$ şi în particular $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

7. Dacă $\operatorname{tg}x = 2$, atunci să se calculeze: $\dfrac{3\sin x}{2\sin x + 5\cos x}$, $\dfrac{\sin^2 x}{4\sin x \cos x + 3}$.

8. Să se demonstreze identităţile:

1) $\cos(x-y)\cos(x+y) = \cos^2 x - \sin^2 y$; 2) $\cos x \sin(y-z) + \cos y \sin(z-x) + \cos z \sin(x-y) = 0$;

3) $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \dfrac{1+\operatorname{ctg}x\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{ctg}x\operatorname{tg}y}$; 4) $\operatorname{tg}6t - \operatorname{tg}4t - \operatorname{tg}2t = \operatorname{tg}6t\operatorname{tg}4t\operatorname{tg}2t$;

5) $\operatorname{tg}3t = \dfrac{3\operatorname{tg}t - \operatorname{tg}^3 t}{1-3\operatorname{tg}^2 t}$; 6) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right) = 3\operatorname{tg}3\alpha$;

7) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\alpha$; 8) $\sin^2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{1}{4}$.

9) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} + \dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha} = 0$

9. Dacă $\cos a = \frac{1}{7}$, $\cos b = \frac{13}{14}$, $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $a - b = 60^\circ$.

10. Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$ dacă $\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{3}$, $\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{5}$.

11. Calculaţi $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ dacă $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 2$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 4$ şi $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$.

12. Calculaţi $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$ în funcţie de $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$.

13. a) Scriind în două moduri suma:

$S_n = \sin x \cos(n-1)x + \sin 2x \cos(n-2)x + \ldots + \sin(n-1)x \cos x$, arătaţi că $S_n = \dfrac{n-1}{2}\sin nx$.

b) Utilizând egalitatea $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ arătaţi că:

$$\frac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha}+\frac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha}+\ldots+\frac{1}{\cos(n-1)\alpha\cos n\alpha}=\frac{\operatorname{tg}n\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}.$$

14. Să se demonstreze inegalitatea: $\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha\leq\frac{1}{16}$.

15. Triunghiul ABC în care $\operatorname{tg}B=\frac{\cos B-\sin C}{\cos C-\sin B}$ este dreptunghic, iar dacă $\sin A=2\sin B\cos C$, atunci ABC este isoscel.

16. Dacă $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ cu $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, $ac+bd=0$, atunci arătaţi că $ab+cd=0$.
(**Indicaţie.** Se înlocuieşte $a=\sin\alpha$, $b=\cos\alpha$, $c=\sin\beta$, $d=\cos\beta$.)

17. Dacă $x,y,z\in\mathbb{R}$, $xy+yz+zx=1$, atunci există α, β, γ astfel încât $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $z=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

(**Indicaţie.** Se înlocuieşte $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ şi din $z=\frac{1-xy}{x+y}$, $x+y\neq 0$, avem $z=\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}=$
$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Rightarrow\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$.)

18. Să se arate că oricare ar fi patru numere mai mari sau egale cu unu, există două a, b astfel încât $\frac{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}+1}{ab}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(**Indicaţie.** $a,b,c,d\geq 1\Rightarrow\exists\,\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $\frac{1}{a}=\sin\alpha$, $\frac{1}{b}=\sin\beta,\ldots$; membrul stâng este $\cos(\alpha-\beta)$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]=\left(0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]\cup\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.)

Funcţiile trigonometrice ale argumentului dublu şi triplu

Plecând de la formulele $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ ne propunem să găsim exprimări pentru $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\operatorname{tg}3\alpha$.
Are loc următorul

Corolar. Avem identităţile:

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ (forma omogenă)
$=2\cos^2\alpha-1$ (numai în funcţie de $\cos\alpha$)
$=1-2\sin^2\alpha$ (numai în funcţie de $\sin\alpha$)
$\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$.

$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos 2\alpha\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$.

$\sin 3\alpha=\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)$, $\cos 3\alpha=\cos\alpha(4\cos^2\alpha-3)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Formulele corespunzătoare argumentului dublu se obţin din formulele (teoremei precedente) $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ în care punem $\alpha=\beta$.
Pentru $\sin 3\alpha$ procedăm astfel:
$\sin 3\alpha=\sin(\alpha+2\alpha)=\sin\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha=\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\cos^2\alpha\sin\alpha=\sin\alpha-2\sin^3\alpha+$
$+2(1-\sin^2\alpha)\sin\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)$.
Analog se procedează pentru a obţine $\cos 3\alpha$. ■

Să observăm că formulele pentru $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$, $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ fac trecerea de la argumentul

dublu (2α) la argumentul simplu (α), de la cosinus la puterea întâi ($\cos 2\alpha$) la cosinus şi respectiv sinus la puterea a doua. Uneori când avem $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ în structura unor expresii se impune să lucrăm cu funcţii trigonometrice la puterea întâi, adică să exprimăm aceste pătrate cu ajutorul unei funcţii trigonometrice la puterea întâi. Din cele două egalităţi de mai sus deducem alte două formule utile pentru pătratul sinusului şi cosinusului

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

În acest fel $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ se exprimă cu ajutorul funcţiei $\cos 2\alpha$ (funcţia apare la puterea întâi dar cu argument dublu).

Probleme rezolvate

1. Dacă $\sin x=\frac{2}{3}$, $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, atunci să se calculeze: $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg}2x$, $\sin 4x$, $\cos 4x$.

R. Calculăm $\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}=-\sqrt{1-\frac{4}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$. Deci $\sin 2x=2\sin x\cos x=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\cos 2x=1-2\sin^2 x=\frac{1}{9}$, $\operatorname{tg}2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=-4\sqrt{5}$, $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x=-\frac{8\sqrt{5}}{81}$, $\cos 4x=2\cos^2 2x-1=-\frac{79}{81}$.

2. Să se demonstreze identităţile:

a) $3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=8\sin^4\alpha$; b) $\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}x$.

R. a) Să observăm că membrul drept este simplu conţinând funcţia sinus şi argumentul α. Trebuie să exprimăm şi membrul stâng în funcţie de $\sin\alpha$. Avem: $3-4(1-2\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2 2\alpha)=$
$=3-4+8\sin^2\alpha+1-2\cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=8\sin^2\alpha-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha=8\sin^2\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha)=8\sin^2\alpha\cdot\sin^2\alpha=$
$=8\sin^4\alpha$.

b) Se impun condiţiile de existenţă pentru egalitate $\cos 3x\neq 0$, $\cos 2x\neq 0$, $\cos x\neq 0$. Rescriem egalitatea sub forma $\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x)$ sau $\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x}{1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x}$, adevărat dacă scriem $x=3x-2x$ şi utilizăm formula care dă tangenta diferenţei.

3. Să se arate că $\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ\cdot\sin 80^\circ=\frac{1}{8}\cos 10^\circ$.

R. Prelucrăm membrul stâng astfel: $\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 10^\circ=\frac{1}{2}\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\sin 50^\circ=$
$=\frac{1}{4}\sin 40^\circ\cos 40^\circ=\frac{1}{8}\sin 80^\circ=\frac{1}{8}\cos 10^\circ$.

4. Dacă $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{5}{4}$, atunci să se calculeze $\sin 2\alpha$.

R. Se ridică la pătrat relaţia dată şi rezultă $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{25}{16}$ sau $\sin 2\alpha=\frac{9}{16}$.

5. Să se determine extremele funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos 2x+3\sin x$.

R. Se exprimă funcţia f în raport de $\sin x$ şi avem: $f(x)=-2\sin^2 x+3\sin x+1$. Punem $z=\sin x\in[-1,1]$ şi avem funcţia $f(z)=-2z^2+3z+1$, $z\in[-1,1]$ căreia trebuie să-i determinăm extremele. Funcţia are un maxim pentru $z=\frac{3}{4}\in[-1,1]$, când $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{17}{8}$.

Tabelul de valori ale acestei funcţii pe $[-1,1]$ este

z	-1		$\frac{3}{4}$		1
$f(z)$	-4	$\nearrow$	$\frac{17}{8}$	$\searrow$	2

De aici $\max f = \frac{17}{8}$, $\min f = -4$.

6. **Să se arate că dacă** $0 < t < \frac{\pi}{2}$, **atunci** $t - \frac{t^3}{4} < \sin t$.

R. Ştim că $\frac{t}{2} < \operatorname{tg}\frac{t}{2}$. Înmulţim această inegalitate cu $2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$ şi avem $t \cdot \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) < 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$ sau $t\left(1 - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) < \sin t$. Cum $\sin\frac{t}{2} < \frac{t}{2}$ rezultă $t\left(1 - \frac{t^2}{4}\right) < \sin t$.

7. **Să se calculeze** $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos 18°$.

R. Din formula $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ rezultă $\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$. Cum $\alpha = \frac{\pi}{8} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ vom lua semnul + în faţa radicalului. Deci $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Analog din $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ se obţine $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$.

În cazul nostru $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Pentru a calcula $\cos 18°$, arătăm în prealabil că $\sin 18° \cos 36° = \frac{1}{4}$.

Produsul $\sin 18° \cos 18° \cos 36° = \frac{1}{2}\sin 36° \cos 36° = \frac{1}{4}\sin 72° = \frac{1}{4}\cos 18°$. Din primul şi ultimul termen (prin împărţire cu $\cos 18°$) rezultă relaţia. Relaţia obţinută o rescriem: $\sin 18°(1 - 2\sin^2 18°) = \frac{1}{4}$.

Notăm $\sin 18° = x$ şi ecuaţia $8x^3 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(4x^2+2x-1) = 0$. Cum $0 < \sin 18° < \sin 30° = \frac{1}{2}$ găsim $\cos 18° = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

8. **Să se aducă la o formă mai simplă expresia** $E = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta\right)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

R. Aplicăm formula de trecere de la pătrat de sinus la cosinus de argumentul dublu pentru fiecare termen şi avem: $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta\right) = \frac{1-\cos(\alpha+4\beta)}{2}$, $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta\right) = \frac{1-\cos(\alpha-4\beta)}{2}$.

Deci $E = 1 - \frac{1}{2}[\cos(\alpha+4\beta) + \cos(\alpha-4\beta)] = 1 - \cos\alpha\cos 4\beta$.

9. **Să se arate că:** $\sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

R. Prelucrăm membrul stâng lucrând aici cu cât mai puţine argumente ($\sin\frac{5\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) =$ $= \sin\frac{3\pi}{8}$, $\cos\frac{7\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8}$) şi avem:

$$\sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{\pi}{8} = \left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8} + \left(\sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8}\right)^2 -$$

$$-2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{4} = 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

10. **Să se arate că** $\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} \geq 4$.

R. Inecuaţia se scrie echivalent (pentru $\sin\alpha \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$): $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \geq 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ sau $1 \geq (\sin 2\alpha)^2$, ceea ce-i evident (pentru că $-1 \leq \sin 2\alpha \leq 1$).

11. Dacă $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, atunci $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$.

R. Calculăm $\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = \dfrac{\frac{1}{7} + \operatorname{tg}2\beta}{1 - \frac{1}{7}\operatorname{ctg}2\beta}$. Dar $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ şi $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Acum $\operatorname{tg}2\beta = \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{3}{4}$. Găsim $\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = 1$. Cum $2\beta \in (0, \pi)$, deducem $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$.

Probleme propuse

0. 1) Să se calculeze $\sin 15°$, $\cos 15°$.

2) Să se calculeze $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, dacă $\cos x = \frac{3}{2}$, $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

3) Calculaţi $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, dacă $\sin x = \frac{3}{5}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

4) Calculaţi $\sin\frac{x}{2}$, dacă $\operatorname{tg}x = 2$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

5) Calculaţi $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, dacă $\operatorname{tg}x = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

6) Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:

a) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$; b) $\dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$; c) $1 - 8\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$.

7) Să se verifice identităţile:

a) $\dfrac{\sin 2x}{2\sin x} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$; b) $\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} = \dfrac{(1 + \cos x)^2}{\sin^2 x}$; c) $\sin^2\frac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{tg}x - \sin x}{2\operatorname{tg}x}$;

d) $\dfrac{2}{1 + \cos x} - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 1$; e) $1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \dfrac{2\cos x}{1 + \cos x}$.

1. Să se calculeze $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$, $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$ dacă: $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

2. Dacă $\sin x = \frac{1}{3}$, $\cos y = -\frac{2}{3}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci să se calculeze $\sin(2x + y)$, $\cos(x - 2y)$, $\operatorname{tg}(2x + y)$, $\operatorname{tg}(2x - y)$.

3. Să se demonstreze identităţile:

1) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$; 2) $\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sin 2\alpha}{4}$;

3) $\sin 4x = 4\sin x\cos x - 8\sin^3 x \cdot \cos x$;

4) $\sin 3\alpha\sin^3\alpha + \cos 3\alpha\cos^3\alpha = \cos^3 2\alpha$;

5) $\cos 4t = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1$; 6) $\dfrac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;

7) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; 8) $\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} - \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \sin\alpha$;

9) $\dfrac{1 - 2\sin^2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$; 10) $\dfrac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - 1} = \cos 2\alpha$;

11) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \dfrac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$; 12) $\dfrac{2\cos 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

13) $\dfrac{1 + \operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}$; 14) $\dfrac{3 + 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha}{3 - 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha} = \operatorname{ctg}^4 2\alpha$;

15) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha = \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 8\alpha}{\sin\alpha}$; 16) $\frac{\sin 4x}{1+\cos 4x}\cdot\frac{\cos 2x}{1+\cos 2x} = \operatorname{tg}x$;

17) $\frac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} = \operatorname{tg}^4 x$; 18) $\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

19) $(1+\operatorname{ctg}\alpha)\cos 2\alpha = (1+\sin 2\alpha)(\operatorname{ctg}\alpha - 1)$; 20) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$;

21) $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 2^2\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^n\alpha = \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{\sin^{n+1}\alpha}{\sin\alpha}$;

22) $\sin x = 2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}$.

4. Să se arate că:

1) $\sin 10^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ = \frac{1}{16}$; 2) $16\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ = 1$.

5. Să se determine extremele funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \cos 2x + 5\cos x$.

6. Să se determine $m, M\in\mathbb{R}$ pentru care (pe rând):

1) $m\le\cos\alpha+\cos 2\alpha\le M$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$; 2) $m\le\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha\le M$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

7. Să se aducă la o formă mai simplă expresia $E = \cos^2(x+2y)+\sin^2(x-2y)-1$, $x,y\in\mathbb{R}$.

8. Să se demonstreze egalităţile:

1) $1-\sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = 1$;

3) $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \frac{3}{2}$; 4) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right) = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$;

5) $\cos^2(x-y)+\cos^2(x+y)-\cos 2x\cos 2y = 1$; 6) $\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x-\cos^3 2x = 0$.

9. Să se demonstreze identităţile:

1) $(\sin x+\sin 2x)(2\cos x-1) = \sin 3x$; 2) $(\cos x+\cos 2x)(2\cos x-1) = \cos 3x+1$;

3) $(1+\cos x)(1-2\cos x)^2 = \cos 3x+1$; 4) $\cos 3x\cos x+2\sin^2 2x = \sin 3x\sin x+1$;

5) $4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \sin 3x$; 6) $4\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \cos 3x$;

7) $\frac{3-4\cos 2t+\cos 4t}{3+4\cos 2t+\cos 4t} = \operatorname{tg}^4 t$;

10. Să se arate că: 1) $\frac{1}{\sin^4\alpha}+\frac{1}{\cos^4\alpha}\ge 8$; 2) $\cos x<\cos\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{2x}{3}$, $x\in(0,\pi)$.

11. Să se demonstreze egalităţile:

1) $\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$; 2) $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$;

3) $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right) = \frac{3}{2}$.

12. Să se calculeze valoarea expresiei: $E = \sin 2x+2\cos 2x+3\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}$ dacă $\sin x = \frac{3}{5}$, $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

13. Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos 18^\circ$.

14. Să se aducă la o formă mai simplă expresia

$E = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

15. Să se arate că: $\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

Substituţia universală

Vom exprima în cele ce urmează $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ în funcţie de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t$.

Aceste formule sunt cunoscute sub denumirea de **substituţia universală**. Are loc următoarea:

Teoremă. Au loc egalităţile:

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2t}{1-t^2},\ \text{unde } t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2}\neq 0.$$

Demonstraţie. Avem:

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1\right)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad\text{şi}\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2t}{1-t^2}.\ \blacksquare$$

Observaţie. Formulele din teoremă dau exprimarea $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ în funcţie de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Are loc legătura între $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ şi funcţiile $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ prin intermediul formulei:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Probleme rezolvate

1. **Să se calculeze** $E=3\sin\alpha-4\cos\alpha+5$ **dacă** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}$.

R. Vom exprima pe E în funcţie de $t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ şi avem:

$$E=3\frac{2t}{1+t^2}-\frac{4(1-t^2)}{1+t^2}+5=\frac{9t^2+6t+1}{1+t^2}=\frac{81}{13}.$$

2. **Dacă** $3\cos\alpha+4\sin\alpha-5=0$, **atunci să se calculeze** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

R. Pentru $t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, via substituţia universală, din relaţia dată rezultă $t=\frac{1}{2}$. Acum $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

3. **Calculaţi:** $\dfrac{\sin\alpha}{2-3\cos\alpha}$ **dacă** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$.

R. Raportul dat îl exprimăm în funcţie de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t$ şi avem $\dfrac{\frac{2t}{1+t^2}}{2-3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\dfrac{2t}{5t^2-1}=\dfrac{3}{22}$

4. **Determinaţi imaginea funcţiei** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3\sin x+4\cos x$.

R. Dacă punem $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, atunci $f(t)=\dfrac{6t}{1+t^2}+\dfrac{4-4t^2}{1+t^2}=\dfrac{-4t^2+6t+4}{1+t^2}=y$, $(*)$. Trebuie să determinăm mulţimea de valori pentru y dacă $t\in\mathbb{R}$.

Rescriem $(*)$ sub forma $(y+4)t^2-6t+y-4=0$, care reprezintă o ecuaţie de gradul doi în t care are rădăcini reale dacă $\Delta_t\geq 0$, adică $y^2-25\leq 0$, ceea ce dă $y\in[-5,5]$. Deci $\operatorname{Im} f=[-5,5]$.

5. **Să se demonstreze inductiv că** $\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}\}n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$.

R. Verificarea afirmaţiei pentru $n=2$. Trebuie arătat că $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, adevărat deoarece $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$. Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru n şi să o demonstrăm pentru $n+1$, adică să arătăm că $\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\Big\}n+1$. Ori avem $\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}}$ şi se aplică exerciţiul 11 de la probleme propuse.

Probleme propuse

1. **Dacă** $\operatorname{tg}\alpha=2$, **atunci să se calculeze** $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$.
2. **Arătaţi că există o singură valoare pozitivă pentru** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ **dacă** $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$.
3. **Să se calculeze** $\operatorname{tg}2\alpha$, $\operatorname{tg}4\alpha$ **dacă** $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{2}$.
4. **Calculaţi** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ **dacă** $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.
5. **Calculaţi** $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$ **dacă** $\operatorname{tg}\alpha=3$.
6. **Calculaţi:** 1) $\frac{\sin 2\alpha}{5-3\cos 2\alpha}$ **dacă** $\operatorname{tg}\alpha=5$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}$ **dacă** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{15}$.
7. **Dacă** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-3$, $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=4$, **atunci să se calculeze** $\sin(x\pm y)$, $\cos(x\pm y)$, $\operatorname{tg}(x\pm y)$.
8. **Dacă** $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2}{5}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, **atunci să se calculeze** $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.
9. **Determinaţi imaginea funcţiei** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sin x-5\cos x$.
10. **Să se demonstreze egalităţile:**

1) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$;

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$; 4) $\sin x=\frac{2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}}$; 5) $\cos x=\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-1}{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+1}$.

11. **Arătaţi că** $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\Big\}n+1=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.
12. a) **Să se arate că** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

b) **Să se arate prin inducţie matematică inegalitatea** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)<\frac{1}{2^{n-2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$.

Transformarea sumelor în produse

În multe situaţii suntem nevoiţi să transformăm sumele $\sin\alpha\pm\sin\beta$, $\cos\alpha\pm\cos\beta$, în produse, pentru a aduce o expresie la o formă mai simplă. Are loc următoarea

Teoremă. Au loc identităţile:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \forall a,\beta\in\mathbb{R}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Se consideră egalităţile:

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$, $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Notăm $a+b=\alpha$, $a-b=\beta$ şi deci $a=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $b=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Se adună egalităţile de mai sus (exprimate în funcţie de α,β) şi avem:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Dacă se scad cele două egalităţi rezultă $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Pentru a demonstra celelalte două egalităţi se consideră identităţile

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$, $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$, $a,b\in\mathbb{R}$, care se adună şi se scad după ce în prealabil am notat $a+b=\alpha$, $a-b=\beta$. ■

Observaţii. 1) Pentru a transforma în produs suma $\sin\alpha+\cos\beta$ se aduce la forma $\sin\alpha+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)$, etc. Putem avea simultan $\sin\alpha+\cos\beta>\sqrt{2}$ şi $\cos\alpha+\sin\beta>\sqrt{2}$?

2) Pentru a transforma în produs $\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta$ scriem $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, în ipoteza $\cos\alpha,\ \cos\beta\neq 0$.

Probleme rezolvate

1. Să se transforme în produs: a) $\sin 20^\circ+\sin 40^\circ$; b) $\sin\dfrac{\pi}{12}+\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

R. Avem: a) $\sin 20^\circ+\sin 40^\circ=2\sin\dfrac{20^\circ+40^\circ}{2}\cos\dfrac{20^\circ-40^\circ}{2}=2\sin 30^\circ\cos(-10^\circ)=\cos 10^\circ$;

b) $\sin\dfrac{\pi}{12}+\sin\dfrac{5\pi}{12}=2\sin\dfrac{\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2}\cos\dfrac{\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}}{2}=2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

2. Să se transforme în produs expresiile:

a) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$; b) $1-\cos\alpha+\cos 2\alpha$; c) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha$.

R. 1) Pentru $\cos\alpha$ utilizăm formula $\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1$, iar pentru $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$ şi expresia devine: $1+\sin\alpha+\cos\alpha=2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)=2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right]=$

$=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=2\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

2) $1-\cos\alpha+\cos 2\alpha=1-\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=\cos\alpha(2\cos\alpha-1)=2\cos\alpha\left(\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\right)=$

$=2\cos\alpha\left(\cos\alpha-\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\cos\alpha\cdot 2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=-4\cos\alpha\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

3) Grupăm în sumă primul termen cu ultimul termen şi transformăm această sumă în produs

$2\sin 3\alpha\cos 2\alpha+\sin 3\alpha=2\sin 3\alpha\left(\cos 2\alpha+\dfrac{1}{2}\right)=2\sin 3\alpha\left(\cos 2\alpha+\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=$

$=4\sin 3\alpha\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

3. Să se demonstreze egalitatea: $\dfrac{\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$.

R. Se scrie membrul stâng sub forma $\dfrac{(\sin\alpha+\sin 3\alpha)+2\sin 2\alpha}{(\cos\alpha+\cos 3\alpha)+2\cos 2\alpha}$ şi apoi se transformă sumele din paranteze în produse $\dfrac{2\sin 2\alpha\cos\alpha+2\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha+2\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin 2\alpha\cdot(\cos\alpha+1)}{2\cos 2\alpha\cdot(\cos\alpha+1)}=\operatorname{tg}2\alpha$, în ipoteza $\cos 2\alpha\neq 0$, $\cos\alpha+1\neq 0$.

4. Să se arate că triunghiul ABC în care $\sin B+\cos B=\sin C+\cos C$ este dreptunghic sau isoscel.

R. Scriem relaţia dată sub forma $\sin B - \sin C = \cos C - \cos B$ şi transformăm diferenţele în produse, când obţinem $2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2} = 2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}$ sau $\sin\frac{B-C}{2}\left[\cos\frac{B+C}{2} - \sin\frac{B+C}{2}\right] = 0$.

De aici $\sin\frac{B-C}{2} = 0$ sau $\cos\frac{B+C}{2} - \sin\frac{B+C}{2} = 0$. Din prima relaţie rezultă $B - C = 0$, adică se obţine triunghi isoscel, iar din a doua relaţie $\cos\frac{B+C}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}\right)$ avem $\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}$, adică $B + C = \frac{\pi}{2}$, când se obţine triunghi dreptunghic.

5. Să se arate că avem: $\cos\frac{x+y}{2} \geq \frac{\cos x + \cos y}{2}$, $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

R. Avem succesiv $\frac{1}{2}(\cos x + \cos y) = \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \leq \cos\frac{x+y}{2}$, deoarece $\cos\frac{x-y}{2} \leq 1$.

6. Dacă $x, y > 0$ **şi** $x + y = 150°$, **atunci** $\sin x + \cos y \leq \sqrt{3}$.

R. Avem: $\sin x + \cos y = \sin x + \sin(90° - y) = \sin x + \sin(x - 60°) = \sqrt{3}\sin(x - 30°) \leq \sqrt{3}$.

7. Să se arate că avem: $\cos^2\alpha + \cos^2(60° + \alpha) + \cos^2(60° - \alpha) =$

$= \sin^2\alpha + \sin^2(120° + \alpha) + \sin^2(120° - \alpha) = \frac{3}{2}$.

R. Notăm $A = \cos^2\alpha + \cos^2(60° + \alpha) + \cos^2(60° - \alpha)$, $B = \sin^2\alpha + \sin^2(120° + \alpha) + \sin^2(120° - \alpha)$.

Avem $\sin(120° + \alpha) = \sin(60° - \alpha)$, $\sin(120° - \alpha) = \sin(60° + \alpha)$.

De asemenea au loc egalităţile: $A + B = 3$, $A - B = \cos 2\alpha + \cos(120° + 2\alpha) + \cos(120° - 2\alpha) =$

$= \cos 2\alpha + 2\cos 120°\cos 2\alpha = \cos 2\alpha - \cos 2\alpha = 0$.

De aici $A = B = \frac{3}{2}$.

8. Dacă $\cos x + \cos y = a \neq 0$, $\sin x + \sin y = b$, **atunci să se calculeze** $\sin(x + y)$.

R. Relaţiile din ipoteză se scriu: $2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a$, $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = b$. Se împart aceste relaţii, membru cu membru, şi avem $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \frac{b}{a}$.

Acum $\sin(x + y)$ se scrie în funcţie de $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$ şi avem: $\sin(x + y) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$.

Probleme propuse

1. Să se transforme in produs:

1) $\sin 24° + \sin 36°$; 2) $\cos 75° + \cos 15°$; 3) $\sin 35° - \sin 45°$;

4) $\sin 25° + \cos 65°$; 5) $\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}$; 6) $\cos\frac{5\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8}$; 7) $\cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}$.

2. Transformaţi în produs expresiile: 1) $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha$;

2) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$; 3) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$; 4) $\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha$;

5) $\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha$; 6) $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha$; 7) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)$;

8) $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha$; 9) $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha$.

3. Să se arate că au loc egalităţile:

1) $\sin 12° + \sin 48° = \cos 18°$; 2) $\cos 20° - \cos 80° = \sin 50°$; 3) $\sin 15° + \cos 15° = \sqrt{3}(\cos 15° - \sin 15°)$;

4) $\frac{\sin 75° + \sin 15°}{\sin 75° - \sin 15°} = \frac{\cos 5° + \sin 25°}{\cos 25° - \sin 5°} = \sqrt{3}$; 5) $\frac{\cos 7° + \sin 7°}{\cos 7° - \sin 7°} = \frac{3\cos 8° - \sqrt{3}\sin 8°}{\sqrt{3}\cos 8° + 3\sin 8°} = \operatorname{tg} 52°$.

4. Să se simplifice expresiile:

1) $\frac{\sin 75° - \sin 15°}{\cos 75° + \cos 15°}$; 2) $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$; 3) $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$; 4) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha}$;

5) $\dfrac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$; 6) $\dfrac{\sin^2 8\alpha - \sin^2 4\alpha}{\cos^2 7\alpha - \cos^2 5\alpha}$; 7) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha}$;

8) $\dfrac{\cos\alpha + \cos 5\alpha}{\cos 3\alpha + \cos\alpha} - \dfrac{\cos 5\alpha - \cos\alpha}{\cos 3\alpha - \cos\alpha}$.

5. **Să se demonstreze egalităţile:**

1) $\dfrac{\cos 5\alpha - \cos\alpha}{\cos 3\alpha - \cos\alpha} = 4\cos^2\alpha - 1$; 2) $\dfrac{1 + \cos 4\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$; 3) $\dfrac{\cos 3\alpha - \cos 5\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg}\alpha$;

4) $(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)^2 + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)^2 = 4\cos^2\alpha$;

5) $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha$;

6) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha$.

7) $\cos^2\alpha + \sin^2 3\alpha - \cos^2 2\alpha = 2\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha$;

8) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$; 9) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

10) $\dfrac{\sin 3\alpha + \cos\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha + \cos 3\alpha - \cos 7\alpha} = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}$; 11) $\dfrac{2\sin\alpha + \cos 3\alpha - \cos 5\alpha}{2\cos\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

12) $\dfrac{\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta)}{\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta)} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; 13) $\dfrac{\sin\alpha - \sin 3\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = -\operatorname{tg} 2\alpha$;

14) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$.

15) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1 =$
$= 4\cos\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$.

6. **Dacă:** 1) $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \sin C$ **sau** 2) $\operatorname{tg} B = \dfrac{\cos(C-B)}{\sin A + \sin(C-B)}$ **sau**
3) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$, **atunci triunghiul** ABC **este dreptunghic.**

7. **Să se arate că în orice triunghi** ABC **avem:** $\dfrac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C} = \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$.

8. **Dacă într-un triunghi** ABC, $\sin A + \sin C = 2\sin B$, **atunci** $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2} = 3$.

9. **Să se arate că:** $\cos(x+y) + \sin x + \sin y \le \dfrac{3}{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Transformarea produselor în sume

Alteori, pentru a prelucra o expresie, este nevoie să transformăm produse de forma $\sin\alpha\sin\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\sin\alpha\cos\beta$ în sume.

Aceasta se realizează cu următoarea

Teoremă. Au loc egalităţile: $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$,

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$,

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$, $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Se calculează $\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ şi respectiv $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$ pentru a obţine identităţile cerute. ■

Probleme rezolvate

1. **Transformaţi produsele în sume:**

a) $\sin 42^\circ \cos 12^\circ$; b) $\sin 22^\circ \sin 8^\circ$; c) $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9}$.

R. Utilizăm formulele din teorema de mai sus şi rezultă

a) $\sin 42^\circ \cos 12^\circ = \frac{1}{2}[\sin(42^\circ - 12^\circ) + \sin(42^\circ + 12^\circ)] = \frac{1}{2}(\sin 30^\circ + \sin 54^\circ) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \sin 54^\circ\right)$;

b) $\sin 22^\circ \sin 8^\circ = \frac{1}{2}[\cos(22^\circ - 8^\circ) - \cos(22^\circ + 8^\circ)] = \frac{1}{2}(\cos 14^\circ - \cos 30^\circ) = \frac{1}{2}\left(\cos 14^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

c) $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{9} - \frac{2\pi}{9}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos \frac{\pi}{3} + \cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos \frac{\pi}{9}\right)$.

2. **Să se demonstreze egalităţile:**

a) $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$; b) $\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 4\alpha \sin \alpha = \cos 3\alpha \cos 2\alpha$.

R. a) Fie S membrul stâng. Calculăm:

$$\frac{2\sin \frac{2\pi}{7} S}{2\sin \frac{2\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{4\pi}{7} + \left(\sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7}\right) + \left(\sin \frac{8\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7}\right)}{2\sin \frac{2\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\left(\sin \frac{6\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7}\right) - \sin \frac{2\pi}{7}}{2\sin \frac{2\pi}{7}} = \frac{-\sin \frac{2\pi}{7}}{2\sin \frac{2\pi}{7}} = -\frac{1}{2}.$$

Observaţie. Pentru a calcula $S_1 = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha$, $S_2 = \cos \alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha$, se înmulţesc aceste scrieri cu $2\sin \frac{\alpha}{2}$ şi apoi se transformă produsele $\sin \frac{\alpha}{2} \sin k\alpha$, $\sin \frac{\alpha}{2} \cos k\alpha$ în sume.

Şi în problema rezolvată se poate înmulţi egalitatea cu $2\sin \frac{2\pi}{7}$ şi apoi se transformă produsele în sume.

b) Prelucrăm membrul stâng transformând produsele în sumă şi avem:

$\frac{1}{2}[\cos 3\alpha + \cos \alpha] - \frac{1}{2}[\cos 3\alpha - \cos 5\alpha] = \frac{1}{2}[\cos \alpha + \cos 5\alpha]$.

În fine, se transformă suma de cosinusuri în produs rezultând membrul drept.

3. a) **Să se arate că:** $4\cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) \cos(60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha$;

b) **Aplicând a) să se arate că avem:** $\cos 6^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 78^\circ = \frac{1}{16}$.

R. a) Se prelucrează membrul stâng transformând produsele în sume ca mai jos:

$2\cos \alpha[\cos 120^\circ + \cos 2\alpha] = \cos \alpha \cdot (-1 + 2\cos 2\alpha) = \cos \alpha \cdot (4\cos^2 \alpha - 3) = \cos 3\alpha$.

b) În a) punem $\alpha = 6^\circ$ şi respectiv $\alpha = 18^\circ$, după care înmulţim relaţiile astfel obţinute.

4. **Să se calculeze suma** $S = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha$, $n \in \mathbb{N}^*$.

R. Dacă $\alpha = k\pi$, atunci $S = 0$. Fie $\alpha \neq k\pi$. Înmulţim S prin $2\sin \frac{\alpha}{2}$ şi avem

$2\sin \frac{\alpha}{2} \cdot S = 2\sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha + 2\sin \frac{\alpha}{2} \sin 2\alpha + \ldots + 2\sin \frac{\alpha}{2} \sin n\alpha$, iar acum se transformă produsele din membrul drept în sume şi avem: $2\sin \frac{\alpha}{2} \cdot S = \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2}\right) + \left(\cos \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{5\alpha}{2}\right) + \ldots +$

$+ \left[\cos \frac{(2n-1)\alpha}{2} - \cos \frac{(2n+1)\alpha}{2}\right]$ sau încă $2\sin \frac{\alpha}{2} \cdot S = \left[\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(2n+1)\alpha}{2}\right]$ sau în final

$2\sin \frac{\alpha}{2} \cdot S = 2\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}$. Deci $S = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

Observaţie. Demonstraţi formula obţinută, prin inducţie matematică.

5. **Dacă $\sin B\cos C=\frac{1}{2}\sin A$, atunci triunghiul ABC este isoscel.**

R. Se transformă produsul din membrul stâng în sumă şi relatia devine $\sin(B+C)+\sin(B-C)=\sin A$. Cum $B+C=\pi-A$ rezultă $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$. Relaţia devine $\sin(B-C)=0$, adică $B-C=0$ şi deci $B=C$

6. **Să se demonstreze inegalitatea $2\sin 2x\sin 2y<1+8\sin^2 x\sin^2 y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.**

R. Scriem succesiv inegalitatea: $8\sin x\sin y(\cos x\cos y-\sin x\sin y)-1<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-8\sin x\sin y\cos(x+y)>0\Leftrightarrow 1+4\cos(x+y)[\cos(x+y)-\cos(x-y)]>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+4\cos^2(x+y)-4\cos(x+y)\cos(x-y)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [2\cos(x+y)-\cos(x-y)]^2+\sin^2(x-y)>0.$

Probleme propuse

1. **Transformaţi produsele în sume:**

1) $\sin 40^\circ\cos 20^\circ$; 2) $\cos 23^\circ\cos 7^\circ$; 3) $\sin 18^\circ\sin 12^\circ$; 4) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}$;

5) $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}$; 6) $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}$; 7) $\sin 3\alpha\cos 2\alpha$; 8) $\cos 3\alpha\cos\alpha$;

9) $\sin 4\alpha\sin 2\alpha$; 10) $4\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 50^\circ$; 11) $4\cos 18^\circ\cdot\cos 16^\circ\cdot\cos 20^\circ$;

12) $4\cos\alpha\cos 3\alpha\cos 5\alpha$; 13) $4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha$.

2. **Să se calculeze:**

1) $2\cos 10^\circ\cos 40^\circ-\cos 50^\circ$; 2) $\cos 20^\circ-2\sin 20^\circ\sin 40^\circ$;

3) $\sin\alpha(1+2\cos 2\alpha)$; 4) $\cos 3\alpha-2\cos\alpha\cos 2\alpha$;

5) $\cos 2\alpha+2\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)$; 6) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\alpha$;

7) $\cos^2\alpha-\cos(\alpha+30^\circ)\cos(\alpha-30^\circ)$; 8) $E=\frac{\cos 6x}{\sin 4x\sin 8x}+\frac{\cos 10x}{\sin 8x\sin 12x}+\frac{\cos 14x}{\sin 12x\sin 16x}$.

3. **Să se demonstreze identităţile:** 1) $\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}55^\circ\operatorname{tg}65^\circ=2-\sqrt{3}$;

2) $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$;

3) $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=0$;

4) $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$; 5) $\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$;

6) $(\sin 20^\circ\sin 40^\circ)(\sin 60^\circ\sin 80^\circ)=\frac{3}{16}$; 7) $\cos\alpha+2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. 1) **Calculaţi suma $S=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha$, $n\in\mathbb{N}^*$ şi demonstraţi formula găsită prin inducţie matematică.**

2) **Să se demonstreze prin inducţie matematică identităţile:**

a) $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha+\ldots+\sin 2n\alpha=\frac{\sin n\alpha\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$;

b) $\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha+\ldots+\cos(2n+1)\alpha=\frac{\cos(n+2)\alpha\cdot\sin n\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5. **Arătaţi că triunghiul ABC în care are loc egalitatea $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$ este isoscel.**

6. **Să se determine forma triunghiului în care $8\sin A\sin B\cos C+1=0$.**

7. **Dacă $8\cos A\cos B\cos C=1$, atunci triunghiul ABC este echilateral.**

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noţiuni	Definiţii. Expresia matematică
Cercul trigonometric, notat C	Este cercul cu centrul în originea reperului cartezian de rază 1, pe care s-a fixat sensul pozitiv ca fiind în sensul antiorar.
Funcţia de acoperire universală a cercului $\phi : \mathbb{R} \to C$	$\phi(t) = M_t,\ t \in [0, 2\pi],\ \mu(\widehat{AOM_t}) = t$ $\phi(t) = M_t,\ t \in [-2\pi, 0],\ \mu(\widehat{AOM_t}) = \lvert t\rvert$ $\phi(t) = M_t,\ t \in \mathbb{R},\ t = \alpha + 2k\pi,\ \mu(\widehat{AOM_t}) = \alpha$
$\alpha \to M_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ Funcţiile sin şi cos	$\cos\alpha = x_\alpha,\ \sin\alpha = y_\alpha,$ $-1 \le \sin\alpha, cos\alpha \le 1,\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$
Formula fundamentală a trigonometriei	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$
$T = 2\pi$ este perioada principală pentru sin şi cos	$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha,$ $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha,\ \forall\alpha \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z}$
sin este impară, cos este pară	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$
Funcţiile tg şi ctg	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \cos\alpha \neq 0;\ \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \sin\alpha \neq 0$
$T = \pi$ este perioada principală pentru tg şi ctg	$\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha,\ (\cos\alpha \neq 0)$ $\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg}\alpha,\ (\sin\alpha \neq 0),\ k \in \mathbb{Z}$
tg şi ctg sunt impare	$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha,$
Funcţii trigonometrice pentru sumă şi diferenţă	$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \sin b\cos a$ $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$ $\operatorname{tg}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{tg}a \pm \operatorname{tg}b}{1 \mp \operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$
Substituţia universală	$\sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2},\ t = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$
Transformarea sumelor în produse	$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha \mp \beta}{2}$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
Transformarea produselor în sume	$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$ $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$ $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

Probleme propuse

Teste de evaluare

Testul 1

1. **Să se demonstreze identităţile:** 1) $\dfrac{\cos 5^\circ + \cos 20^\circ - \sin 15^\circ}{1 + \sin 5^\circ + \sin 20^\circ + \cos 15^\circ} = \operatorname{tg}35^\circ;$

2) $\dfrac{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha + \cos 10\alpha - \cos 14\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha + \sin 10\alpha + \sin 14\alpha} = \operatorname{tg}2\alpha.$

2. Să se arate că dacă $\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)}=\frac{a}{b}$ şi $\frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}=\frac{A}{B}$, atunci $\cos(\alpha-\beta)=\frac{aA+bB}{aB+bA}$.

3. Să se arate că dacă $x, y \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci: $\frac{\cos^2 x+\cos^2 y}{\sin^2 x+\sin^2 y} \leq \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 y\right)$.

4. Arătaţi că $\frac{\sin 1}{\cos(n-1)\cos n}=\frac{\sin n}{\cos n}-\frac{\sin(n-1)}{\cos(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$ şi apoi calculaţi suma: $\frac{\sin 1}{\cos 0 \cos 1}+\frac{\sin 1}{\cos 1 \cos 2}+\ldots+\frac{\sin 1}{\cos(n-1)\cos n}$.

5. Să se arate că oricare ar fi unghiurile x, y, avem inegalitatea: $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2(x+y) \leq \frac{9}{4}$.

Testul 2

1. Să se determine identităţile:

1) $(\sin 60^\circ+\sin 40^\circ)(\sin 140^\circ+\sin 20^\circ)+(\sin 50^\circ-\sin 70^\circ)(\sin 130^\circ-\sin 150^\circ)=$ $=2\sin 50^\circ \cos 20^\circ$.

2) $\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}6\alpha+\operatorname{ctg}6\alpha=\frac{8\cos^2\alpha}{\sin 12\alpha}$.

2. Dacă $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{p}{q}$, atunci $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{p+q}{p-q}$.

3. Să se arate că $2\sin 2x \sin 2y \leq 1+8\sin^2 x \sin^2 y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

4. Dacă $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{3x}{2}+\ldots+\cos\frac{(2n-1)x}{2}=n\sin nx$.

5. Să se arate că $8\cos x \cos y \cos(x+y)+1 \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Testul 3

1. Să se demonstreze identităţile:

1) $\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}15^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{ctg}27^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ=8$;

2) $\frac{1+\cos(2\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha+2\pi)-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(2\pi-2\alpha)+2\cos^2(2\alpha+\pi)-1}=2\cos 2\alpha$.

2. Dacă $\operatorname{tg}x=2$, atunci să se calculeze $\frac{\sin^5 x+\cos^5 x+\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$.

3. Comparaţi numerele $\frac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ}$, $\frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}$.

4. Calculaţi produsul $P=\cos x \cos 2x \cos 4x \ldots \cos 2^n x$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Să se demonstreze inegalităţile: 1) $\sin x-\sin y \leq \frac{3}{2}-\cos(x-y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

2) $\cos^2(x-y) \leq 4(1-\sin x \cos y)(1-\cos x \sin y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

4. APLICAŢII ALE PRODUSULUI SCALAR A DOI VECTORI ŞI ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

4.1. PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI

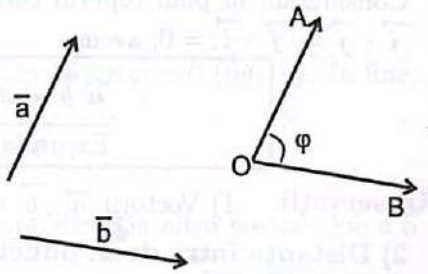
În mulţimea $\mathcal{V}$ a vectorilor liberi, am definit operaţiile de adunare a vectorilor (prin care fiecărei perechi $(\overline{a}, \overline{b})$ i-am asociat vectorul $\overline{a} + \overline{b}$) şi înmulţire cu scalari (numere reale) a vectorilor (prin care fiecărei perechi $(\alpha, \overline{a})$, i-am asociat vectorul $\alpha\overline{a}$).

În continuare, vom defini o altă operaţie pe $\mathcal{V}$, care asociază fiecărei perechi $(\overline{a}, \overline{b})$ de vectori din $\mathcal{V}$ un număr real $\overline{a} \cdot \overline{b}$, numit produsul scalar al vectorilor $\overline{a}, \overline{b}$. Acest concept intervine în fizică şi a fost introdus, pornind de la expresia lucrului mecanic ($L = F \cdot l \cdot \cos\varphi$, unde F este mărimea forţei, l mărimea deplasării, iar φ este unghiul format de direcţia forţei cu direcţia deplasării.

Unghiul a doi vectori

Fie $\overline{a}, \overline{b}$ doi vectori liberi. Se consideră doi reprezentanţi $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ai celor doi vectori cu originea în O.

Unghiul neorientat $\widehat{BOA}$ reprezintă unghiul format de vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, iar măsura lui o notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$, dacă este măsurat în radiani sau $\varphi \in [0, 180^0]$, dacă este măsurat în grade sexagesimale.



Se arată uşor că φ nu depinde de alegerea reprezentanţilor $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. (Într-adevăr, fie $\overrightarrow{O'C} \sim \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{O'D} \sim \overrightarrow{OB}$, atunci $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ şi din congruenţa triunghiurilor OAB, $O'CD$ rezultă $\widehat{BOA} \equiv \widehat{DO'C}$).

Observăm că unghiul φ este unghiul format de semidreptele $[OA$, $[OB$ pentru care $\varphi \in [0, \pi]$. Dacă $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (sau $\varphi = 90^0$), atunci vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ se numesc **ortogonali** şi scriem $\overline{a} \perp \overline{b}$.

Produsul scalar a doi vectori

Fie $\overline{a}, \overline{b}$ doi vectori liberi în planul $\mathcal{P}$.

Definiţie. Se numeşte **produsul scalar al vectorilor** $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, numărul real, notat $\overline{a} \cdot \overline{b}$ (sau simplu $\overline{a}\overline{b}$), definit astfel:

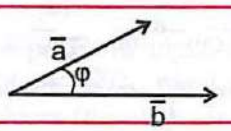
1) $\overline{a}\overline{b} = 0$ dacă $\overline{a} = \overline{0}$ sau $\overline{b} = \overline{0}$;

2) $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\varphi$, dacă $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt nenuli, iar φ este unghiul format de vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

Din definiţia produsului scalar a doi vectori nenuli $\overline{a}, \overline{b}$ se poate determina unghiul φ format de cei doi vectori.

Avem:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$$



Să observăm că dacă: 1) $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci produsul scalar al vectorilor $\overline{a}, \overline{b}$ este un număr pozitiv; 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, atunci produsul scalar este nul (şi **corespunde vectorilor ortogonali**); 3) $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, atunci produsul scalar este un număr negativ.

În plus, dacă notăm $\overline{e}_a = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$, $\overline{e}_b = \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$, vectorii unitari corespunzători direcţiilor vectorului $\overline{a}$ şi respectiv $\overline{b}$, atunci cosinusul unghiului a doi vectori este produsul scalar corespunzător vectorilor unitari: $\cos\varphi = \overline{e}_a \cdot \overline{e}_b$.

Exemplu 1. Dacă $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = \frac{1}{3}$, $\varphi = 30^0$, atunci să se calculeze $\overline{a}\overline{b}$.

R. Conform definiţiei produsului scalar a doi vectori $\overline{a}, \overline{b}$, avem:

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi = 2 \cdot \frac{1}{3}\cos 30^0 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. Dacă $|\overline{a}| = 6$, $|\overline{b}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, atunci calculaţi $\overline{a}\overline{b}$.

R. Avem $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\frac{\pi}{2} = 6 \cdot 3 \cdot 0 = 0$.

3. Dacă $|\overline{a}| = 5$, atunci să se calculeze $\overline{a}\ \overline{a}$ (notat $\overline{a}^2$).

R. Avem $\varphi = 0$ şi deci $\overline{a}\ \overline{a} = |\overline{a}||\overline{a}|\cos 0 = |\overline{a}|^2 = 25$.

Expresia analitică a produsului scalar

Considerăm în plan reperul cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$ şi vectorii $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, $b = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$. Cum $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, avem

$$\vec{a}\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

Expresia analitică a produsului scalar

Observaţii. 1) Vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ sunt perpendiculari $\Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

2) **Distanţa între două puncte.** Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Atunci $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$. Dar $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow AB^2 = (x_2 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_1) \Leftrightarrow AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Deci:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |\overrightarrow{AB}|$$

Formula de calcul a distanţei între două puncte.

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

3) **Unghiul a doi vectori.** Din $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos\alpha$, rezultă:

$$\cos\alpha = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Cosinusul unghiului a doi vectori

Exemple. 1) Să se determine produsul scalar al vectorilor $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

R. Avem $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(-1) + 3 \cdot 2 = 4$.

2) Să se determine unghiul vecorilor $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

R. Din $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ rezultă $\cos\alpha = 0$, adică $\alpha = 90°$, ceea ce înseamnă că vectorii sunt perpendiculari.

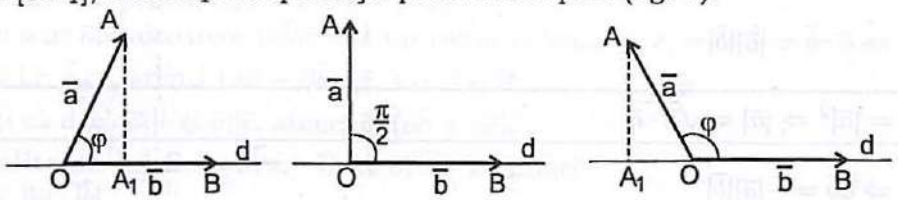
Proprietăţi ale produsului scalar

Proiecţia unui vector pe direcţia altui vector

Fie $\bar{a}$, $\bar{b}$ doi vectori nenuli, care fac unghiul φ între ei, iar $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ doi reprezentanţi ai celor doi vectori $\overrightarrow{OA} \in \bar{a}$, $\overrightarrow{OB} \in \bar{b}$.
Notăm cu d, dreapta suport a vectorului $\overrightarrow{OB}$.

Definiţie. Proiecţia ortogonală (sau simplu, **proiecţia**) vectorului $\bar{a}$ pe dreapta d este un **număr** egal cu produsul dintre lungimea vectorului $\bar{a}$ şi cosinusul unghiului dintre vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

Notăm proiecţia vectorului $\bar{a}$ pe dreapta d prin $\mathrm{pr}_d\bar{a}$ sau $\mathrm{pr}_b\bar{a}$ sau a_b.
Deci, prin definiţie, $\mathrm{pr}_d\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$.
Dacă unghiul dintre vectorii $\bar{a}, \bar{b}$ este ascuţit, atunci proiecţia vectorului $\bar{a}$ pe d este egală cu lungimea segmentului $[OA_1]$, unde A_1 este proiecţia punctului A pe d (fig. a).



Într-adevăr, $\mathrm{pr}_d\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi = OA\cos\varphi = OA_1$.
Dacă vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt ortogonali, adică $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, atunci $\mathrm{pr}_d\bar{a} = 0$, deoarece $\cos\varphi = 0$ (fig. b). În fine, dacă unghiul dintre cei doi vectori este obtuz $\left(\varphi \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)\right)$, atunci
$\mathrm{pr}_d\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi = OA\cos\varphi = -OA\cos\widehat{A_1OA} = -OA_1$.
Prezentăm acum două proprietăţi importante ale proiecţiei unui vector pe direcţia altui vector. Fie d o dreaptă din direcţia unui vector liber. Atunci are loc următoarea:

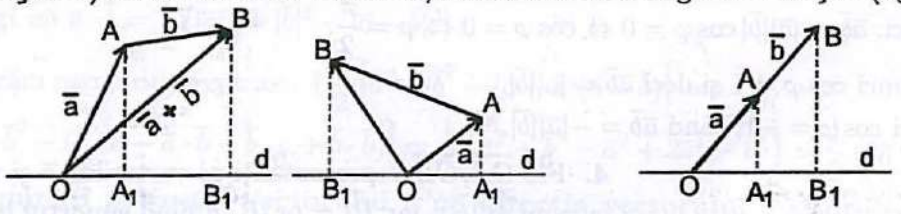
Teoremă. 1) $\mathrm{pr}_d(\bar{a}+\bar{b}) = \mathrm{pr}_d\bar{a} + \mathrm{pr}_d\bar{b}$, $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{V}$.

Proiecţia sumei este egală cu suma proiecţiilor.

2) $\mathrm{pr}_d(k\bar{a}) = k\mathrm{pr}_d\bar{a}$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall \bar{a} \in \mathcal{V}$.

Proiecţia produsului dintre un scalar şi un vector este produsul dintre scalar şi proiecţia vectorului.

Demonstraţie. 1) Considerăm că vectorii $\bar{a}, \bar{b}$ formează cu d unghiuri ascuţite (fig. a)).



Fie $\overrightarrow{OA} \in \bar{a}$, $\overrightarrow{AB} \in \bar{b}$, iar $A_1 = \mathrm{pr}_dA$, $B_1 = \mathrm{pr}_dB$. Atunci $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \in \bar{a}+\bar{b}$. Avem $\mathrm{pr}_d(\bar{a}+\bar{b}) = OB_1$, $\mathrm{pr}_d\bar{a} = OA_1$, $\mathrm{pr}_d\bar{b} = A_1B_1$ şi $OB_1 = OA_1 + A_1B_1$, când relaţia se verifică. Fie cazul în care $\bar{a}$ face cu d unghi ascuţit, iar $\bar{b}$ face cu d unghi obtuz (fig. b)). În acest caz $\mathrm{pr}_d(\bar{a}+\bar{b}) = -OB_1$, $\mathrm{pr}_d\bar{a} = OA_1$, $\mathrm{pr}_d\bar{b} = -A_1B_1$ şi deci $-OB_1 = OA_1 - A_1B_1$, se verifică.

Analog se discută şi celelalte cazuri.

2) Presupunem $k \neq 0$, $\overline{a} \neq \overline{0}$ (dacă $\overline{a} = \overline{0}$ sau $k = 0$, verificarea este imediată).
Considerăm $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}$ şi $\overrightarrow{OB} \in k\overline{a}$ şi $k > 0$, iar unghiul dintre OA şi d este ascuţit.
Fie $A_1 = \mathrm{pr}_d A$, $B_1 = \mathrm{pr}_d B$. Avem $\mathrm{pr}_d \overline{a} = OA_1$, $\mathrm{pr}_d(k\overline{a}) = OB_1$, iar din triunghiurile asemenea OAA_1, OBB_1, deducem $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OA_1}{OB_1} = \dfrac{1}{k}$. Deci, $OB_1 = kOA_1$, ceea ce se traduce prin $\mathrm{pr}_d(k\overline{a}) = k\mathrm{pr}_d\overline{a}$.
Analog se discută cazurile când unghiul dintre OA şi d este drept sau obtuz, iar $k < 0$. ■

Proprietăţi ale produsului scalar

1. $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$, $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{V}$.

Produsul scalar este comutativ.

2. $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$, $\overline{a}\overline{b} = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$.

Doi vectori nenuli sunt perpendiculari, dacă şi numai dacă produsul lor scalar este nul.

3. 1) $\left.\begin{array}{l}\overline{a}, \overline{b} \neq \overline{0} \\ \varphi = 0\end{array}\right] \Rightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|$

În particular, $\overline{a}\overline{a} = |\overline{a}|^2 \Rightarrow |\overline{a}| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}$

2) $\left.\begin{array}{l}\overline{a}, \overline{b} \neq \overline{0} \\ \varphi = \pi\end{array}\right] \Rightarrow \overline{a}\overline{b} = -|\overline{a}||\overline{b}|$

1) Produsul scalar a doi vectori de acelaşi sens este egal cu produsul modulelor lor.

În particular, **modulul unui vector este rădăcina pătrată a produsului scalar al vectorului cu el însuşi.**
2) Produsul scalar a doi vectori opuşi, este egal cu produsul modulelor luat cu semnul minus.

4. $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}|b_a = |\overline{b}|a_b$, $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{V}$

Produsul scalar a doi vectori este egal cu mărimea unuia dintre vectori, înmulţită cu proiecţia celuilalt pe el.

5. $m(\overline{a}\overline{b}) = (m\overline{a})\overline{b} = \overline{a}(m\overline{b})$, $\forall m \in \mathbb{R}$, $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{V}$
Pentru a înmulţi un produs scalar cu un factor scalar oarecare m, se poate considera că m înmulţeşte pe unul din cei doi vectori.

6. $\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c}$, $(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{a}\,\overline{c} + \overline{b}\overline{c}$ $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathcal{V}$

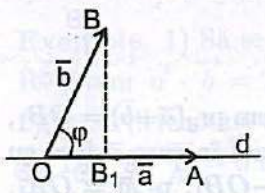
Produsul scalar este distributiv în raport cu adunarea vectorilor.

Demonstraţie. 1. Avem, din definiţie, $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi = |\overline{b}||\overline{a}|\cos\varphi = \overline{b}\overline{a}$.

2. Fie $\overline{a}, \overline{b} \neq \overline{0}$. Atunci, $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

3. 1) Dacă $\varphi = 0$, atunci $\cos\varphi = 1$ şi deci $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|$.

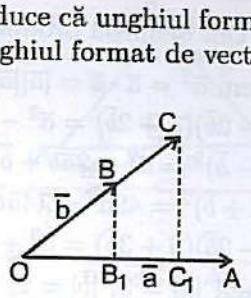
2) Dacă $\varphi = \pi$, atunci $\cos\varphi = -1$, când $\overline{a}\overline{b} = -|\overline{a}||\overline{b}|$.



4. Fie $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ reprezentanţi ai vectorilor $\overline{a}$ şi respectiv $\overline{b}$, $\varphi = \mathrm{m}(\widehat{AOB})$, iar $B_1 = \mathrm{pr}_d B$, d fiind suportul lui $\overrightarrow{OA}$.
Atunci, $OB_1 = b_a = OB\cos\varphi = |\overline{b}|\cos\varphi$.
Deci, $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi = |\overline{a}|b_a$.
Analog se arată $\overline{a}\overline{b} = |\overline{b}|a_b$.

5. Să observăm că vectorii $\bar{a}, m\bar{a}$ şi respectiv $\bar{b}, m\bar{b}$ sunt coliniari. De aici se deduce că unghiul format de vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este acelaşi cu unghiul format de vectorii $m\bar{a}$ şi b şi acelaşi cu unghiul format de vectorii $\bar{a}$ şi $m\bar{b}$. Acum rezultatul se stabileşte uşor, deoarece $|m\bar{a}| = |m||\bar{a}|$.

Fie $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ reprezentanţi ai vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi respectiv $m\bar{b}$ iar B_1, C_1 proiecţiile punctelor B, C pe dreapta suport a lui $\overrightarrow{OA}$.



Atunci $m(\bar{a}\bar{b}) = m(|\overrightarrow{OA}|OB_1)$,

$\bar{a}(m\bar{b}) = |\overrightarrow{OA}| \cdot OC_1 = |\overrightarrow{OA}|(mOB_1)$, ultima egalitate se obţine din triunghiurile asemenea OBB_1, OCC_1.

De aici, $m(\bar{a}\bar{b}) = \bar{a}(m\bar{b})$. Analog se procedează şi pentru cealaltă egalitate.

6. Presupunem că vectorii sunt nenuli (altfel, egalitatea este evidentă). Conform proprietăţii 4, avem: $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = |\bar{a}|(b+c)_a = |\bar{a}|(b_a + c_a) = |\bar{a}|b_a + |\bar{a}|c_a = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\,\bar{c}$.
Analog se stabileşte şi cealaltă egalitate.

Observaţii. **1)** Produsul scalar este distributiv în raport cu scăderea vectorilor, $\bar{a}(\bar{b}-\bar{c}) = \bar{a}\bar{b} - \bar{a}\bar{c}$, $(\bar{a}-\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} - \bar{b}\bar{c}$ pentru că $\bar{b} - \bar{c} = \bar{b} + (-\bar{c})$.

2) Nu are sens $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, deoarece $(\bar{a}\bar{b})\bar{c}$ este un vector coliniar cu $\bar{c}$, iar $\bar{a}(\bar{b}\bar{c})$ este un vector coliniar cu $\bar{a}$!

3) Dacă $\bar{a} \perp \bar{c}$, $\bar{b} \perp \bar{c}$, atunci $(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}) \perp \bar{c}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4) Arătaţi că dacă $\bar{a} \| \bar{b}$ şi $\bar{a} \| \bar{c}$, atunci $\bar{a} \| (\alpha\bar{b} + \beta\bar{c})$.

5) (Inegalitatea lui Schwarz.) Dacă $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{V}$, atunci:
$|\bar{a} \cdot \bar{b}| \le |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$

Această inegalitate are loc deoarece $|\cos\varphi| \le 1$.

Dacă $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ este o bază în $\mathcal{V}$, atunci $\bar{a} = x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2$, $\bar{b} = x_2\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2$ şi inegalitatea devine: $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \le (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$, cu egalitate dacă $\varphi \in \{0, \pi\}$, adică dacă vectorii sunt coliniari, ceea ce înseamnă proporţionalitatea coordonatelor $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$, cu menţiunea că dacă un numitor este zero, atunci şi numărătorul este la fel.

6) Inegalitatea triunghiului. Dacă $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{V}$, atunci $|\bar{a} + \bar{b}| \le |\bar{a}| + |\bar{b}|$.

Demonstraţie. Avem: $|\bar{a} + \bar{b}|^2 = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{a} + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{b} = |\bar{a}^2| + 2\bar{a}\bar{b} + |\bar{b}^2| \le$
$\le |\bar{a}|^2 + 2|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| + |\bar{b}|^2 = (|\bar{a}| + |\bar{b}|)^2$. De aici: $|\bar{a} + \bar{b}| \le |\bar{a}| + |\bar{b}|$. ■

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze: 1) $(\bar{a}+\bar{b})^2$, $(\bar{a}-\bar{b})^2$, $(\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}+\bar{b})$.

R. Avem $(\bar{a}+\bar{b})^2 = (\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}+\bar{b}) = \bar{a}(\bar{a}+\bar{b}) + \bar{b}(\bar{a}+\bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{a} + \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|^2 + 2\bar{a}\bar{b} + |\bar{b}|^2$, unde am aplicat distributivitate produsului scalar în raport cu adunarea vectorilor (în a doua şi a treia egalitate) şi comutativitatea produsului scalar $(\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a})$ şi $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$.

Asemănător $(\bar{a}-\bar{b})^2 = (\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}-\bar{b}) = \bar{a}(\bar{a}-\bar{b}) - \bar{b}(\bar{a}-\bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{a} - \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|^2 - 2\bar{a} \cdot \bar{b} + |\bar{b}|^2$.

În fine $(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b}) = \bar{a}(\bar{a}-\bar{b}) + \bar{b}(\bar{a}-\bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{a} - \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{a} - \bar{b} \cdot \bar{b} = \bar{a}^2 - \bar{b}^2 = |\bar{a}|^2 - |\bar{b}|^2$.

2. Arătaţi că $\bar{a} \cdot \bar{b} = \dfrac{1}{2}\left(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - |\bar{a} - \bar{b}|^2\right)$.

R. Prelucrăm membrul drept astfel $\dfrac{1}{2}\left[\bar{a}^2 + \bar{b}^2 - (\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})\right] =$

$= \dfrac{1}{2}\left[\bar{a}^2 + \bar{b}^2 - (\bar{a} \cdot \bar{a} - \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b})\right] = \dfrac{1}{2}\left(\bar{a}^2 + \bar{b}^2 - \bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} - \bar{b}^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(2\bar{a} \cdot \bar{b}\right) = \bar{a} \cdot \bar{b}$.

3. Determinaţi proiecţia vectorului $\bar{a}$ pe direcţia vectorului $\bar{b}$ şi proiecţia vectorului $\bar{b}$ pe direcţia vectorului $\bar{a}$, dacă $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$ şi $\varphi = 60^0$.

R. Avem $a_b = |\bar{a}|\cos\varphi = 2 \cdot \cos 60^0 = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$, $b_a = |\bar{b}|\cos\varphi = 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

4. Unghiul între vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este egal cu 60^0. Dacă $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, atunci să se calculeze:
a) $\bar{a}\bar{b}$; b) $\bar{a}^2$; c) $(\bar{a} - 2\bar{b})(\bar{a} + 2\bar{b})$; d) $(\bar{a} - \bar{b})^2$; e) $(7\bar{a} + \bar{b})^2$; f) $(\bar{a} - 2\bar{b})(\bar{a} + 3\bar{b})$.

R. a) Din definiţia produsului scalar, avem: $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$;

b) Avem $\overline{a}^2 = \overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}||\overline{a}|\cos 0^0 = |\overline{a}|^2 = 9$; analog $\overline{b}^2 = |\overline{b}|^2 = 16$;

c) $(\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{a} + 2\overline{b}) = \overline{a}^2 - (2\overline{b})^2 = \overline{a}^2 - 4\overline{b}^2 = 9 - 64 = -55$;

d) $(\overline{a} - \overline{b})^2 = \overline{a}^2 - 2\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2 = 9 - 2 \cdot 6 + 16 = 13$;

e) $(7\overline{a} + \overline{b})^2 = 49\overline{a}^2 + 14\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2 = 441 + 84 + 16 = 541$;

f) $(\overline{a} - 2\overline{b})(\overline{a} + 3\overline{b}) = \overline{a}^2 + \overline{a}\overline{b} - 6\overline{b}^2 = 9 + 6 - 96 = -81$.

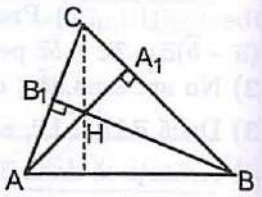
5. Dacă $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$, $|\overline{c}| = 4$ şi $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$, să se calculeze $\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$.

R. Se ridică la pătrat relaţia $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$ şi se obţine:

$\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2 + 2(\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}) = 0$, unde $\overline{a}^2 = 9$, $\overline{b}^2 = 4$, $\overline{c}^2 = 16$ şi deci $\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c} = -\frac{29}{2}$.

6. Să demonstrăm, utilizând produsul scalar, că înălţimile unui triunghi sunt concurente.

R. Fie triunghiul ABC, în care înălţimile $[AA_1]$, $[BB_1]$ sunt concurente în H. Vom arăta că dreapta CH este perpendiculară pe AB, ceea ce arată că CH este înălţime. Deci înălţimile într-un triunghi sunt concurente. Vom proba că produsul scalar $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB}$ este nul.



Avem: $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = -\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} +$
$+\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0) = -\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH})\overrightarrow{AC} =$
$= -\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}) + 0 = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{0} = 0.$

Aplicaţii ale produsului scalar

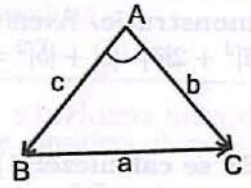
Teorema cosinusului

Se consideră triunghiul ABC de laturi $AB = c, BC = a, AC = b$. Atunci are loc următoarea

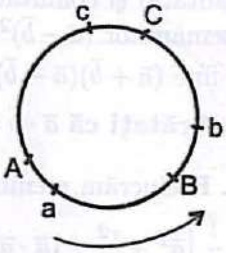
Teoremă (a cosinusului)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

În orice triunghi, pătratul lungimii unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi, minus de două ori produsul lor înmulţitcu cosinusul unghiului dintre ele.



Demonstraţie. În triunghiul ABC, avem relaţia vectorială $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.



Ridicăm această relaţie la pătrat şi obţinem:

$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$ sau

$a^2 = b^2 - 2bc\cos A + c^2$, unde am folosit

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos A = bc\cos A.$

Analog se obţin şi celelalte egalităţi.

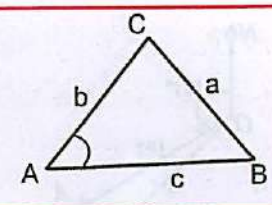
Observaţii. 1) Am demonstrat formula $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Fiecare din formulele din enunţul teoremei se obţin din precedenta, înlocuind pe a cu b, b cu c, c cu a şi respectiv A cu B, B cu C, C cu A. Spunem că am obţinut celelalte două formule prin **permutări circulare.**

2) **Funcţiile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi.** Din teorema cosinusului, deducem următorul

Corolar. În orice triunghi ABC avem:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\ \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$



De aici, se poate obţine o caracterizare a naturii unui unghi al unui triunghi

$$A = \text{ unghi ascuţit } \Leftrightarrow A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow b^2+c^2 > a^2;$$

$$A = \text{ unghi drept } \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow b^2+c^2 = a^2;$$

$$A = \text{ unghi obtuz } \Leftrightarrow A \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow b^2+c^2 < a^2.$$

De aici se deduce imediat că triunghiul ABC este asuţitunghic dacă au loc simultan inegalităţile $a^2+b^2>c^2$, $b^2+c^2>a^2$, $c^2+a^2>b^2$.

3) Teorema cosinusului leagă cele trei laturi ale triunghiului de unul din unghiuri. Se poate aplica această teoremă în două situaţii:

1) când se cunoaşte un unghi şi două laturi adiacente şi se determină cea de a treia latură;

2) când se cunosc laturile şi se determină unghiurile ($\cos A$, $\cos B$).

Exemple. 1) $C = 60°$, $a = 5$, $b = 8$. Din teorema cosinusului $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C = 49 \Rightarrow c = 7$.

2) $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$. Avem $\cos C = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 0 \Rightarrow C = 90°$, $\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{3}{5}$, $\cos A = \dfrac{4}{5}$.

Probleme rezolvate

1. **Se consideră triunghiul de laturi $BC = 2$, $AC = 3$, $AB = \sqrt{7}$. Să se determine măsura unghiului $\widehat{ACB}$.**

R. Aplicăm teorema cosinusului şi avem $\cos C = \dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab} = \dfrac{1}{2}$. De aici $\mathrm{m}(\widehat{C}) = 60^0$.

2. **Stabiliţi natura triunghiului ABC, unde $a = 5$, $b = 6$, $c = 9$.**

R. Trebuie precizat dacă triunghiul este ascuţitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic. Pentru aceasta trebuie comparate numerele a^2+b^2 cu c^2, a^2+c^2 cu b^2, c^2+b^2 cu a^2. Avem: $a^2+b^2 = 61$, $c^2 = 81$. Deci $a^2+b^2 < c^2$, ceea ce arată că triunghiul ABC este obtuzunghic, având $\mathrm{m}(\widehat{C}) > 90^0$.

3. **Arătaţi că în orice triunghi ABC are loc egalitatea $b\cos C - c\cos B = \dfrac{b^2-c^2}{a}$.**

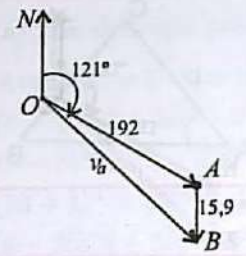
R. În structura egalităţii figurează atât laturi, cât şi unghiuri. Căutăm să „uniformizăm" scrierea, utilizând numai laturi. Pentru aceasta, utilizăm teorema cosinusului. De fapt, membrul drept conţine în structura sa doar laturi. Vom aduce şi membrul stâng la o exprimare cu ajutorul laturilor. Avem:

$$b\cos C - c\cos B = b\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - c\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{b^2-c^2}{a}.$$

4. **O cutie de forma unui paralelipiped dreptunghic are laturile bazei egale cu 3 m, $2\sqrt{21}$ m, iar înălţimea de 4 m. Determinaţi cosinusul unghiului format de două diagonale care pleacă din acelaşi vârf pentru două feţe laterale vecine.**

R. Fie vârful A şi diagonalele $[AB]$, $[AC]$ ale celor două feţe vecine care conţin punctul A. Avem din teorema cosinusului

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{100+25-93}{100} = 0,32.$$



5. **Un avion zboară cu viteza de 192 km/h, având direcţia de zbor la 121° faţă de direcţia nord. Din nord spre sud bate vântul cu viteza 15,9km/h. Să se determine viteza de deplasare a avionului.**

R. Notăm cu v_a viteza actuală a avionului (influenţată de viteza vântului) Din teorema cosinusului rezultă $v_a^2 = OA^2 + AB^2 - 2 \cdot OA \cdot AB \cos 121° \approx 40.261$. De aici $v_a \approx 201$ km/h.

6. **Se consideră patru puncte în plan astfel încât distanţa dintre oricare două este în intervalul $[\sqrt{2}, 2]$. Să se arate că punctele formează un pătrat.**

R. Din enunţ rezultă $\cos A, \ldots \geq 0$, adică $A, \ldots \leq 90°$. Cum $\sum A = 360°$, rezultă $A = B = C = D = 90°$. Dacă $AB = a$, $BC = b$ şi $a \neq b$, $a, b \in [\sqrt{2}, 2]$, atunci $AC = \sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt{2+2} = 2$, fals . Deci $a = b$ şi $ABCD$ este pătrat.

Probleme propuse

1. **Calculaţi produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, dacă:**

a) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; b) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$; c) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

d) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; e) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\varphi = 0$; f) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = 30^0$.

2. **Demonstraţi că au loc egalităţile:**

1) $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$; 2) $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\,\vec{b} + |\vec{b}|^2$;

3) $\vec{a}\,\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$; 4) $\vec{a}\,\vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

5) **Utilizând 4) arătaţi că** $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow |\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$

6) **Ce se poate spune despre vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ dacă (pe rând):**

a) $|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 = |\bar{a} + \bar{b}|^2$; b) $|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 = |\bar{a} - \bar{b}|^2$.

3. **Determinaţi proiecţia vectorului $\vec{a}$ pe direcţia vectorului $\vec{b}$ şi proiecţia vectorului $\vec{b}$ pe direcţia vectorului $\vec{a}$, dacă $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.**

4. **Unghiul între vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este egal cu 45^0. Dacă $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, atunci să se calculeze:** 1) $\vec{a}\,\vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$;

3) $|\vec{a} + 3\vec{b}|$, $|2\vec{a} - 5\vec{b}|$, $(\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 3\vec{b})$, $(2\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$.

5. **Fie $ABCD$ un paralelogram, $AB = 2BC$, E mijlocul lui $[AB]$. Arătaţi că $m(\widehat{DEC}) = 90^0$.**

6. **Arătaţi că $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$ şi apoi, utilizând această egalitate, demonstraţi că un paralelogram este romb, dacă şi numai dacă diagonalele sale sunt perpendiculare.**

7. 1) **Fie ABC un triunghi de laturi $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Arătaţi că:**

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

2) **Dacă D, E, F sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ şi respectiv $[AB]$, atunci $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ şi $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Din ultima relaţie deduceţi concurenţa mediatoarelor triunghiului ABC.**

8. **Se consideră triunghiul ABC, $AB = 3$, $BC = 4$, $m(\widehat{ABC}) = 45^0$. Să se determine AC.**

9. **Fie triunghiul ABC, în care $AC = 5$, $AB = 6$, $BC = \sqrt{74 - 35\sqrt{3}}$. Să se determine $m(\widehat{BAC})$.**

10. **Se consideră triunghiul ABC de laturi a, b, c. Precizaţi în fiecare caz în parte natura triunghiului.**

a) $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$; b) $a = 8$, $b = 6$, $c = 10$; c) $a = 10$, $b = 20$, $c = 10\sqrt{3}$;

d) $a = 2(1+\sqrt{3})$, $b = 2$, $c = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})$; e) $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$.

11. Să se calculeze produsul scalar al vectorilor:
1) $\vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$; 2) $\vec{a} = -3\vec{j}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$;
3) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$; 4) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$;

12. Să se calculeze unghiul vectorilor:
1) $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$; 2) $\vec{a} = \sqrt{3}\vec{i}$; $\vec{b} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$; 3) $\vec{a} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{j}$.

13. S a se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ sunt perpendiculari;
1) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = (1-m)\vec{i} + \vec{j}$; 2) $\vec{a} = (m+2)\vec{i} + m\vec{j}$, $\vec{b} = m\vec{i} - 2\vec{j}$.

14. Să se calculeze $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})$ şi $\vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}$ şi apoi să se compare în cazurile:
1) $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j}$; 2) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

15. Arătaţi că dacă: 1) $A(2,0)$, $B(0,2)$, $C(5,5)$, atunci ABC este triunghi isoscel;
2) $A(1,2)$, $O(0,0)$, $B(2,-1)$, atunci AOB este triunghi dreptunghic;
3) $A(1,0)$, $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, atunci ABC este triunghi echilateral.

16. Fie $A(1,2)$, $B(2,5)$, $C(3,m)$. Exprimaţi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ şi apoi determinaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$.

Teorema cosinusului

0. Fie ABC un triunghi.
1) Dacă $AB = 3$, $AC = 5$, $BC = 7$, atunci calculaţi $\cos A$.
2) Dacă $AB = 2$, $AC = 3$, $A = 60°$, atunci calculaţi perimetrul triunghiului.
3) Dacă $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 2\sqrt{2}$, atunci $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}$.
4) Dacă $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 8$, atunci $A = 60°$.
5) Dacă $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$, atunci $B = 2C$.
6) Dacă $a \in \mathbb{Z}$ şi $AB = a$, $AC = a+1$, $BC = a+2$ sunt laturile unui triunghi obtuzunghic, atunci $a = 2$.
7) Dacă $AB = 2$, $AC = 4$, $A = 60°$, atunci $m_a = \sqrt{7}$.
8) Dacă $AB = AC = 6$, $BC = 6\sqrt{3}$, atunci $B = 30°$.

1. Să se arate că dacă în triunghiul ABC:
1) $a \geq b$, atunci $a + h_a \geq b + h_b$;
2) medianele din A şi C sunt perpendiculare, atunci $a^2 + c^2 = 5b^2$ şi $\cos B \geq \frac{4}{5}$.

2. Să se arate că în oricare triunghi ABC au loc relaţiile:
1) $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$; 2) $(a+b)\cos C + (b+c)\cos A + (c+a)\cos B = a + b + c$;
3) $\frac{\cos B - \cos C}{p-a} + \frac{\cos C - \cos A}{p-b} + \frac{\cos A - \cos B}{p-c} = 0$. 4) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$, atunci $B = \frac{\pi}{3}$;
5) $b^2 - c^2 = 2a^2$, atunci $A \leq \frac{\pi}{6}$; 6) $b\cos C - c\cos B = \frac{b^2 - c^2}{a}$

3. Să se arate că dacă în triunghiul ABC avem:
1) $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 2\operatorname{ctg} C$, atunci $a^2 + b^2 = 2c^2$; 2) $a = 2b\cos C$, atunci triunghiul este isoscel;
3) $a = m^2 + m + 1, b = 2m + 1, c = m^2 - 1, m > 1$, atunci $A = \frac{2\pi}{3}$;
4) $p = b\cos A + c\cos B + a\cos C$, atunci triunghiul este isoscel.

4. Să se arate că în triunghiul ABC în care $m_a = c$, avem: $\operatorname{tg} B = 3\operatorname{tg} C$, $\sin A = 2\sin(B - C)$.

5. Aria S a paralelogramului de laturi a, b şi unghiul α ascuţit format de diagonale este $S = \frac{a^2 - b^2}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Deduceţi că $\operatorname{tg}\alpha \leq \frac{2ab}{a^2 - b^2}$.

6 Să se arate că în triunghiul ABC avem $\sum \operatorname{ctg} A = \frac{1}{4S}\sum a^2$.

(Arătaţi că $a^2 = b^2 + c^2 - 4S\operatorname{ctg} A$; $S = \frac{1}{2}bc\sin A$.)

7. Laturile triunghiului ABC verifică relaţia $a^2 + b^2 = nc^2$, $n > 1$. Să se arate că avem $\cos C \geq \frac{n-1}{n}$.

8 1) Într-un cerc se înscrie un triunghi echilateral de latură a. Dacă x, y, z sunt distanţele de la un punct de pe cerc la vârfuri, atunci $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$

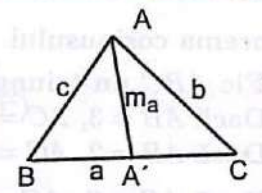
2) Deduceţi că în cercul de rază 1 în care se înscrie hexagonul regulat $ABCDEF$, dacă M aparţine cercului, atunci $\sum MA^2 = 12$.

2) Consideraţi cercul de rază 1 în care se înscrie un octogon regulat.

Teorema medianei

Fie ABC un triunghi oarecare, de laturi $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Dacă m_a, m_b, m_c sunt lungimile medianelor duse din A, B şi respectiv C, atunci are loc

Teorema (medianei):
$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4};\quad m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4};\quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

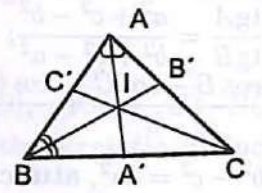


Demonstraţie. Fie A' mijlocul laturii $[BC]$. Atunci ştim că $2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Ridicăm relaţia la pătrat şi rezultă:
$4\overrightarrow{AA'}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$ sau $4m_a^2 = c^2 + b^2 + 2bc\cos A$.
Din teorema cosinusurilor: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ şi deci $4m_a^2 = c^2 + b^2 + b^2 + c^2 - a^2$ sau
$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$, adică prima relaţie de demonstrat. Analog se procedează şi pentru celelalte. ■

Lungimile bisectoarelor într-un triunghi

Fie ABC un triunghi, iar $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ bisectoarele unghiurilor triunghiului. Notăm $l_a = AA'$, $l_b = BB'$, $l_c = CC'$. Are loc următoarea:

Teoremă.
$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)},\ l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)},\ l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)}.$$



Demonstraţie. Vom arăta prima relaţie. Din teorema bisectoarei avem:
$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$, ceea ce înseamnă că punctul A' împarte segmentul $[BC]$ în raportul $\frac{c}{b}$. Scriem vectorii de poziţie, raportaţi la polul A.

Avem: $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b}\overrightarrow{AC}}{1+\frac{c}{b}}$ sau $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$.

Ridicăm această relaţie la pătrat şi obţinem:

$$\overrightarrow{AA'}^2 = \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 \overrightarrow{AB}^2 + \left(\frac{c}{b+c}\right)^2 \overrightarrow{AC}^2 + 2\frac{bc}{(b+c)^2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \quad \text{sau}$$

$$l_a^2 = \left(\frac{bc}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{cb}{b+c}\right)^2 + 2\frac{bc}{(b+c)^2}\cdot bc\cos A \quad \text{sau} \quad \left(\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right).$$

$$l_a^2 = 2\left(\frac{bc}{b+c}\right)^2 + \frac{bc(b^2+c^2-a^2)}{(b+c)^2} \text{ sau } l_a^2 = \frac{bc}{(a+c)^2}[(b+c)^2 - a^2].$$

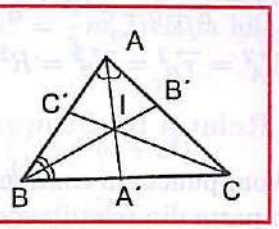
Notăm $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, semiperimetrul triunghiului şi atunci $a+b+c = 2p$, $b+c-a = 2p-2a$. Deci:

$l_a^2 = \dfrac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$, iar de aici $l_a = \dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$. ■

Observaţie. Dacă I este centrul cercului înscris în triunghi (punctul de intersecţie al bisectoarelor), atunci se pot exprima uşor lungimile segmentelor $[AI]$, $[BI]$, $[CI]$. Are loc următoarea

Teoremă.

$$AI = \frac{b+c}{a+b+c}l_a,\ BI = \frac{a+c}{a+b+c}l_b,\ CI = \frac{b+a}{a+b+c}l_c.$$



Demonstraţie. În triunghiul ABA' se aplică teorema bisectoarei (pentru $[BI]$) şi avem $\dfrac{AI}{IA'} = \dfrac{AB}{BA'}$. De aici $\dfrac{AI}{AA'} = \dfrac{AB}{AB+BA'}$ sau $\dfrac{AI}{l_a} = \dfrac{c}{c+BA'}$, (1). Vom exprima pe BA' din teorema bisectoarei (pentru $[AA']$) şi avem: $\dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{AB}{AC}$ sau $\dfrac{BA'}{BC} = \dfrac{AB}{AB+AC}$. De aici $BA' = \dfrac{a\cdot c}{b+c}$.

Ţinând seama de aceasta, din (1) rezultă $AI = \dfrac{c(b+c)l_a}{c(a+b+c)} = \dfrac{b+c}{a+b+c}l_a$.

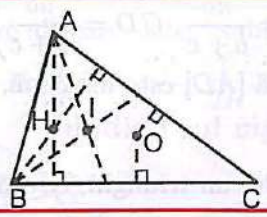
Analog se probează şi celelalte relaţii. ■

Calculul lungimilor OH, OI

Fie triunghiul ABC, în care O este centrul cercului circumscris triunghiului (R' raza acestui cerc), H ortocentrul triunghiului, iar I centrul cercului înscris. Are loc următoarea:

Teoremă. Au loc relaţiile metrice

$$OH^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C),$$
$$OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2),$$
$$OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}.$$

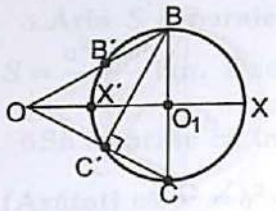


Demonstraţie. Utilizăm relaţia lui Sylvester, demonstrată în capitolul precedent $\overrightarrow{r_H} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}$ pe care o ridicăm la pătrat şi avem:

$\overrightarrow{r_H}^2 = \overrightarrow{r_A}^2 + \overrightarrow{r_B}^2 + \overrightarrow{r_C}^2 + 2(\overrightarrow{r_A}\overrightarrow{r_B} + + \overrightarrow{r_A}\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_B}\overrightarrow{r_C})$ sau cum

$\overrightarrow{r_A}\overrightarrow{r_B} = R^2\cos 2C$ $(\mathrm{m}(\widehat{AOB}) = \mathrm{m}(\widehat{AB}) = 2\mathrm{m}(\widehat{C}))$, $\overrightarrow{r_A}\overrightarrow{r_C} = R^2\cos 2B$,

$\overrightarrow{r_B}\overrightarrow{r_C} = R^2\cos 2A$. Deci $OH^2 = 3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)$.



Se demonstrează relaţia
$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$ şi deci
$OH^2 = R^2(1 - 8\cos A \cos B \cos C)$. Înlocuind aici $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ din formula cosinusului, se ajunge la $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$. Să observăm că produsul $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ este puterea punctului O faţă de cercul de diametru $[BC]$. Într-adevăr,

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = OB\cdot OC\cos\widehat{BOC} = OC(OB\cos\widehat{BOC}) = OC\cdot OC' = OX'\cdot OX = = (d-R_1)(d+R_1) = d^2 - R_1^2$,
unde $d = OO_1$, iar $R_1 = \dfrac{BC}{2}$.

Revenim la problema noastră pentru a obţine mai simplu a doua formulă pentru OH. Dacă A' este mijlocul lui $[BC]$, atunci $\vec{r}_B\vec{r}_C = OA'^2 - \dfrac{a^2}{4} = R^2 - \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} = R^2 - \dfrac{a^2}{2}$.

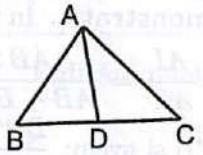
Analog, $\vec{r}_A\vec{r}_B = R^2 - \dfrac{c^2}{2}$, $\vec{r}_A\vec{r}_C = R^2 - \dfrac{b^2}{2}$ şi deci $\vec{r}_H^2 = 3R^2 + 2\left(R^2 - \dfrac{a^2}{2} + R^2 - \dfrac{b^2}{2} + R^2 - \dfrac{c^2}{2}\right)$,
iar după un calcul simplu rezultă $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

Pentru a determina OI, utilizăm formula:
$\vec{r}_I = \dfrac{a}{a+b+c}\vec{r}_A + \dfrac{b}{a+b+c}\vec{r}_B + \dfrac{c}{a+b+c}\vec{r}_C$ pe care o ridicăm la pătrat şi ţinem seama că
$\vec{r}_A^{\,2} = \vec{r}_B^{\,2} = \vec{r}_C^{\,2} = R^2$, $\vec{r}_A\vec{r}_B = R^2 - \dfrac{c^2}{2}, \ldots$. ■

Relaţia lui Stewart

Vom puncta în continuare o relaţie metrică importantă într-un triunghi, cu ajutorul căreia se pot deduce o parte din relaţiile metrice deja stabilite.

Teoremă (Relaţia lui Stewart). Fie ABC un triunghi, iar $D \in (BC)$. Atunci are loc relaţia
$AB^2 \cdot DC - AD^2 \cdot BC + AC^2 \cdot BD = BD \cdot DC \cdot BC$.



Demonstraţie. În triunghiurile ABD şi ABC aplicăm teorema cosinusului şi avem:
$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD\cos\widehat{ABD}$, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\widehat{ABC}$. Înmulţim prima relaţie cu BC şi a doua cu $(-BD)$ şi se adună relaţiile astfel obţinute. Avem:
$AD^2 \cdot BC - AC^2 \cdot BA = AB^2(BC - BD) + BC \cdot BD(BD - BC)$ sau
$AD^2 \cdot BC - AC^2 \cdot BD = AB^2 \cdot DC - BC \cdot BD \cdot DC$, adică relaţia propusă spre demonstrat. ■

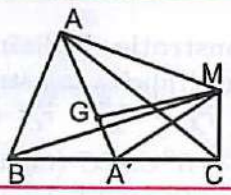
Observaţii. 1) Dacă $[AD]$ este bisectoare, atunci din relaţia lui Stewart se obţine lungimea bisectoarei $\left(BD = \dfrac{ac}{b+c}, CD = \dfrac{ab}{b+c}\right)$.

2) Dacă $[AD]$ este mediană, atunci se obţine expresia care dă lungimea medianei.

Relaţia lui Leibniz

Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate, iar M un punct arbitrar. Atunci are loc următoarea

Teoremă (Relaţia lui Leibniz)
$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.



Demonstraţie. Fie A' mijlocul lui $[BC]$. Scriem relaţia lui Stewart în triunghiul MAA' şi $G \in [AA']$. Avem:
$MA^2 \cdot GA' - MG^2 \cdot AA' + MA'^2 \cdot AG = AG \cdot GA' \cdot AA'$, (1). Dar
$A'G = \frac{1}{3}AA'$, $AG = \frac{2}{3}AA'$ şi (1) devine $MG^2 = \frac{1}{3}MA^2 + \frac{2}{3}MA'^2 - \frac{2}{9}AA'^2$, (2).
Cum $[MA']$ este mediană în triunghiul MBC, (2) se scrie
$MG^2 = \frac{1}{3}MA^2 + \frac{2}{3}\frac{2(MB^2+MC^2)-BC^2}{4} - \frac{2}{9}AA'^2$ sau
$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{BC^2}{2} - \frac{2}{3}AA'^2$, (3).
În triunghiul GBC, $[GA']$ este mediană şi $GA'^2 = \frac{2(BG^2+GC^2)-BC^2}{4}$, adică
$\frac{BC^2}{2} = BG^2 + GC^2 - 2GA'^2$. În plus, $AA' = \frac{3}{2}GA$, $GA' = \frac{1}{2}GA$.
Cu această ultimă informaţie, (3) devine relaţia dorită. ■

Observaţii. **1)** În membrul drept al relaţiei lui Leibniz $GA^2+GB^2+GC^2$ este constantă, iar MG^2 este termen variabil. El este minim, dacă $M = G$. Prin urmare, suma din membrul stâng $MA^2+MB^2+MC^2$ este minimă, dacă $M = G$ şi minimul este $GA^2 + GB^2 + GC^2$.

2) Ţinând seama de expresia medianei şi de faptul că $GA = \frac{2}{3}m_a$, $GB = \frac{2}{3}m_b$, $GC = \frac{2}{3}m_c$, relaţia lui Leibnitz are forma: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

3) Dacă în relaţia obţinută mai sus punem $M = O$, aceasta devine: $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$.

4.2. APLICAŢII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

Teorema sinusurilor

Teorema (sinusurilor). În orice triunghi ABC avem:
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$
În orice triunghi raportul dintre o latură şi sinusul unghiului opus este constant şi egal cu diametrul cercului circumscris triunghiului.

Din teorema sinusurilor avem: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

Demonstraţie. Vom demonstra teorema în cele trei cazuri date de natura triunghiului ABC – ascuţitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic.

Cazul 1. Triunghiul ABC este ascuţitunghic (fig. 1, a)). Se consideră diametrul $[BD]$. Triunghiul BCD este dreptunghic în C, iar $\mu(\widehat{BAC}) = \mu(\widehat{BDC})$ (unghiuri cu vârful pe cerc ale căror laturi subîntind acelaşi arc). Avem: $\sin\widehat{BAC} = \sin\widehat{BDC} = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$. Analog avem: $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$.

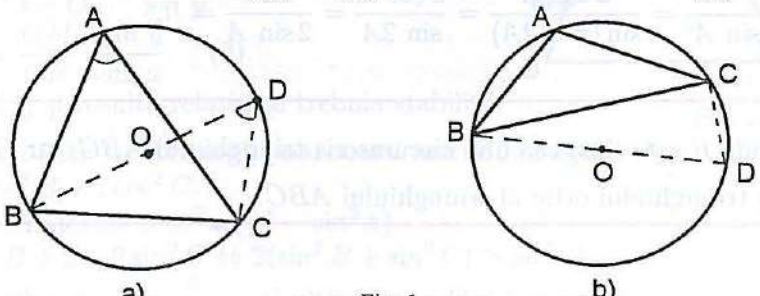


Fig. 1

Cazul 2. Triunghiul ABC este dreptunghic în $A\left(=\frac{\pi}{2}\right)$. Atunci trebuie arătat că:

$\frac{a}{1}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ sau $\sin B=\frac{b}{a}$, $\sin C=\frac{c}{a}$

care sunt rapoartele trigonometrice corespunzătoare sinusurilor unghiurilor ascuţite B şi respectiv C. (În acest triunghi a este ipotenuza şi este egală cu diametrul cercului circumscris triunghiului ABC).

Cazul 3. Triunghiul ABC este obtuzunghic ($A>\frac{\pi}{2}$, fig. 1, b)). Şi în acest caz considerăm diametrul $[BD]$ al cercului. Patrulaterul $ABDC$ este inscriptibil şi deci $A+D=\pi$. În triunghiul dreptunghic BCD avem: $\sin D=\frac{BC}{BD}=\frac{a}{2R}$ sau $\sin(\pi-A)=\frac{a}{2R}$ sau încă $\sin A=\frac{a}{2R}$.

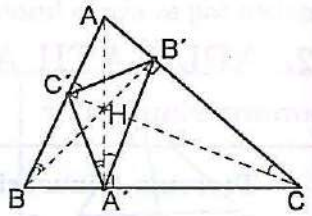
Pentru unghiurile ascuţite B şi C se repetă demonstraţia de la **Cazul 1.** ■

Observaţie. Teorema sinusurilor se poate aplica în două situaţii: 1) când se cunosc două laturi şi unghiul opus uneia dintre laturi; 2) când se cunosc două unghiuri şi o latură opusă unuia dintre unghiuri.

Exemple. 1) $b=3\sqrt{2}$, $c=3$, $C=30°$. Atunci: $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow \sin B=\frac{b\sin c}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow B=45°\Rightarrow$
$\Rightarrow A=180°-(30°+45°)=105°$.

2) $A=45°$, $B=60°$, $a=\sqrt{2}$. Din $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\sqrt{3}$. Dar $C=180°-(60°+45°)=75°$ şi $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}\Rightarrow c=\frac{a\sin C}{\sin A}\approx 3,75$.

Laturile triunghiului ortic. Triunghiul ortic al unui triunghi este triunghiul determinat de picioarele înălţimilor, $A'B'C'$ în figura alăturată. Notăm $B'C'=a'$, $C'A'=b'$, $A'B'=c'$. Determinăm în continuare unghiurile şi laturile acestui triunghi. Avem:



$A'=\widehat{B'A'C'}=\widehat{HA'C'}+\widehat{HA'B'}=\widehat{HBC'}+\widehat{HCB'}$ ($HA'BC'$, $HA'CB'$ sunt patrulatere inscriptibile) $=\frac{\pi}{2}-A+\frac{\pi}{2}-A=\pi-2A$ (triunghiurile $BB'A$, $CC'A$ sunt dreptunghice). Analog $B'=\pi-2B$, $C'=\pi-2C$.

Patrulaterul $BCB'C'$ fiind inscriptibil deducem că $\widehat{AC'B'}=C$. Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul $AB'C'$ şi avem: $\frac{AB'}{\sin C}=\frac{B'C'}{\sin A}$, (1).

Din triunghiul dreptunghic $BB'A$ se obţine $AB'=AB\cos A=c\cos A$. Cu aceasta din (1) obţinem:

$$B'C'=\frac{AB'\sin A}{\sin C}=\frac{c\cos A\sin A}{\sin C}=\frac{c}{\sin C}\cdot\cos A\cdot\sin A=(2R\sin A)\cos A=a\cos A.$$

Deci

$$a'=a\cos A \text{ şi analog } b'=b\cos B,\ c'=c\cos C$$

Teorema sinusurilor aplicată triunghiului ortic $A'B'C'$ dă (R' este raza cercului circumscris acestui triunghi): $2R'=\frac{a'}{\sin A'}=\frac{a\cos A}{\sin(\pi-2A)}=\frac{a\cos A}{\sin 2A}=\frac{a}{2\sin A}=R$.

Deci

$R'=\frac{R}{2}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC, iar R' este raza cercului circumscris triunghiului ortic al triunghiului ABC.

Probleme rezolvate

1. Să se arate că dacă:

a) $\dfrac{\sin^2 A}{\cos A} = \dfrac{a^2}{bc}$, **atunci triunghiul** ABC **este dreptunghic;**

b) $a = 2b\cos C$, **atunci triunghiul** ABC **este isoscel;**

c) $2a = b + c$, $2A = B + C$, **atunci triunghiul** ABC **este echilateral.**

R. a) Exprimăm relaţia dată „uniform" cu ajutorul funcţiilor trigonometrice. Mai precis laturile din membrul drept le scriem cu ajutorul teoremei sinusurilor ($a = 2R\sin A, \ldots$) şi relaţia devine

$$\frac{\sin^2 A}{\cos A} = \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \cos A = \sin B \sin C \ (\sin A \neq 0)$$

Cum $A = \pi - (B + C)$ şi $\cos A = \cos[\pi - (B + C)] = -\cos(B + C)$, relaţia se mai scrie
$-\cos(B + C) = \sin B \sin C \Leftrightarrow -\cos A \cos B + \sin A \sin B = \sin A \sin B \Leftrightarrow \cos A \cos B = 0$.
De aici $\cos A = 0$ sau $\cos B = 0$, adică $A = \dfrac{\pi}{2}$ sau $B = \dfrac{\pi}{2}$, ceea ce arată că triunghiul este dreptunghic în A sau B.

b) În această relaţie în fiecare membru laturi ale triunghiului apar la aceeaşi putere (aici la puterea întâi). Se recomandă utilizarea teoremei sinusurilor în exprimarea laturilor (R, în final se simplifică în relaţie, rămânând o relaţie care conţine numai unghiuri). Avem $2R\sin A = 4R\sin B\cos C$ sau $\sin A = 2\sin B\cos C$. Cum $A = \pi - (B + C)$ avem:
$\sin[\pi - (B + C)] = 2\sin B\cos C \Leftrightarrow \sin(B + C) = 2\sin B\cos C \Leftrightarrow \sin B\cos C + \sin C\cos B =$
$= 2\sin B\cos C \Leftrightarrow \sin B\cos C - \sin C\cos B = 0 \Leftrightarrow \sin(B - C) = 0$.
Cum $B - C \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ deducem $B - C = 0$, adică $B = C$. Aşadar triunghiul ABC este isoscel.

c) Din $B + C = 2A$ şi $A + B + C = \pi$ rezultă $A = \dfrac{\pi}{3}$, $B + C = \dfrac{2\pi}{3}$. Rescriem relaţia $2a = b + c$ utilizând teorema sinusurilor ($a = 2R\sin A, \ldots$) şi obţinem

$$2\sin A = \sin B + \sin C \Leftrightarrow \sin A = \sin\frac{B + C}{2}\cos\frac{B - C}{2} \Leftrightarrow 1 = \cos\frac{B - C}{2}.$$

De aici $B - C = 0$, adică $B = C = \dfrac{\pi}{3}$. În final triunghiul ABC este echilateral.

2. O dreaptă intersectează laturile $[AB]$, $[AC]$ **precum şi o ceviană** $[AD]$ **ale unui triunghi** ABC **în punctele** M, N, O. **Să se arate că:** $\dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{OM}{ON}\cdot\dfrac{AB}{AC}$.

R. Considerăm $\mu(\widehat{BAD}) = x$, $\mu(\widehat{CAD}) = y$ (fig. 2). Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiurile ABD şi ADC şi avem: $\dfrac{BD}{\sin x} = \dfrac{AB}{\sin D_1}$, $\dfrac{DC}{\sin y} = \dfrac{AC}{\sin D_2}$, iar de aici rezultă $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{\sin x}{\sin y}\cdot\dfrac{AB}{AC}$, (1) ($\sin D_1 = \sin(\pi - D_2) = \sin D_2$).
Analog în triunghiurile AMO şi ANO aceeaşi teoremă ne permite să scriem $\dfrac{AM}{\sin O_1} = \dfrac{OM}{\sin x}$, $\dfrac{AN}{\sin O_2} = \dfrac{ON}{\sin y}$, iar de aici ($\sin O_1 = \sin O_2$). $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{OM}{ON}\cdot\dfrac{\sin y}{\sin x}$, (2).
Înmulţim relaţiile (1) cu (2) şi rezultă relaţia ce trebuia stabilită.

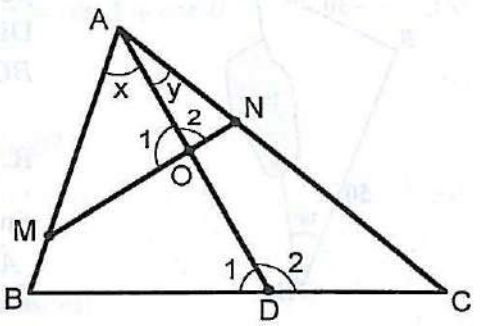


Fig. 2

3. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare are loc inegalitatea

$$3 + \cos^2 A > 2\cos^2 B + 2\cos^2 C.$$

R. Rescriem inegalitatea sub forma ($\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$)

$$4 - \sin^2 A > 2 - 2\sin^2 B + 2 - 2\sin^2 C \Leftrightarrow 2(\sin^2 B + \sin^2 C) > \sin^2 A.$$

Acum din teorema sinusurilor $\sin A = \dfrac{a}{2R}, \ldots$ şi ultima inegalitate se rescrie

$2b^2+2c^2>a^2 \Leftrightarrow (b+c)^2+(b-c)^2>a^2$, adevărată deoarece $b+c>a$ (într-un triunghi suma a două laturi este mai mare decât cea de-a treia) şi $(b-c)^2 \geq 0$.

4. **(Lungimea bisectoarei) a) În orice triunghi ABC avem: $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, unde l_a este lungimea bisectoarei unghiului A.**

b) Să se arate că un triunghi care are două bisectoare de lungimi egale este isoscel.

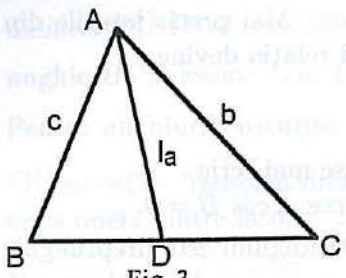


Fig. 3

R. a) Fie $[AD]$ bisectoarea unghiului A (fig. 3). Din teorema bisectoarei avem $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ sau $\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$, iar de aici $\frac{BD}{BD+DC}=\frac{c}{b+c}$ sau încă $\frac{BD}{a}=\frac{c}{b+c}$. Deci $BD=\frac{ac}{b+c}$, iar $DC=\frac{ab}{b+c}$. Teorema sinusurilor aplicată în triunghiul ABD ne dă $\frac{l_a}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}}$ şi deci $l_a=\frac{BD\sin B}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\frac{ac}{b+c}\sin B}{\sin\frac{A}{2}}$;

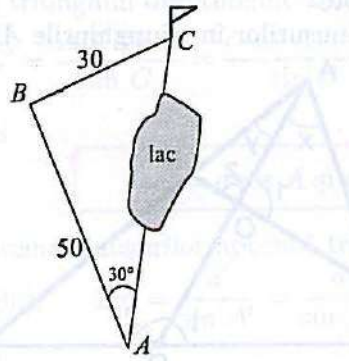
$l_a=\frac{BD\sin B}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\frac{ac}{b+c}\sin B}{\sin\frac{A}{2}}$; Dar $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ şi deci $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$. În fine,

$l_a=\frac{bc}{b+c}\frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$. Analog (prin permutări circulare) $l_b=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}$, $l_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$.

b) Din $l_a=l_b$ rezultă $\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{a(b+c)}{b(a+c)}$. Dacă, prin absurd, $A>B$, adică $a>b$, atunci

$\frac{a(b+c)}{b(a+c)}>1$, ceea ce dă $\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}>1$ sau $\cos\frac{A}{2}>\cos\frac{B}{2}$, adică $A<B$, fals. Analog, $A<B$ conduce la contradicţie. Deci $A=B$.

5. **(Strategia la jocul de golf) În desenul alăturat jucătorul de golf are bila în punctul A şi trebuie să nimerească în C. Dacă ar face-o direct aceasta poate ajunge în lac. Preferă o variantă cu două lovituri. Din A în B cu $AB=50$ m şi $\widehat{CAB}=30°$, iar din B în C, cu $BC=30$ m. Care este distanţa de la mingea de golf la ţintă?**



R. Din teorema sinusurilor avem $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$. De aici $\sin C=\frac{5}{3}\sin 30°=\frac{5}{6}$. Tot din teorema sinusurilor rezultă $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$, adică $AC=60\cdot\sin B\approx 59{,}90$ m ($B=\pi-(A+C)$).

Probleme propuse

0. **Fie ABC un triunghi. 1) Dacă $BC=3$, $\cos A=\frac{1}{2}$, atunci determinaţi R.**

2) Dacă $B=60°$, $C=45°$, atunci $\frac{AB}{AC}=\sqrt{2}$.

3) Dacă $A=\frac{\pi}{4}$, $B=\frac{\pi}{6}$, $AB=6$, atunci determinaţi R.

4) Dacă $AC = 2\sqrt{3}$, $R = 2$, atunci determinaţi B.
5) Dacă $AB = 6$, $B = 45°$, $C = 30°$, atunci determinaţi perimetrul.
6) Dacă $R = \frac{3}{2}$, $BC = 3$, atunci $A = 90°$.
7) Dacă $BC = \sqrt{2}$, $A = 30°$, $B = 45°$, atunci $AC = 6$.

1. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC au loc egalităţile:

1) $b\cos B + c\cos C = a\cos(B - C)$; 2) $1 + \cos A\cos(B - C) = \frac{b^2 + c^2}{4R^2}$;

3) $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$; 4) $\frac{\sin(A - B)\sin C}{1 + \cos(A - B)\cos C} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$;

5) $\sqrt{a\sin A} + \sqrt{b\sin B} + \sqrt{c\sin C} = \sqrt{2p(\sin A + \sin B + \sin C)}$;

6) $1 - \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{a}{p}$; 7) $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{abc}{2R^2}$;

8) $a\sin(B - C) + b\sin(C - A) + c\sin(A - B) = 0$;

9) $(b + c)\operatorname{tg}\frac{B - C}{2} + (c + a)\operatorname{tg}\frac{C - A}{2} + (a + b)\operatorname{tg}\frac{A - B}{2} = 0$.

2. Să se arate că dacă în triunghiul ABC avem:

1) $b + c = 2a$, atunci $2\sin A = \sin B + \sin C$; 2) $2\cos A + \cos B + \cos C = 2$, atunci $b + c = 2a$;
3) $A = 2B$, atunci $a^2 - b^2 = bc$; 4) $A = 2B + C$, atunci $a^2 - b^2 = ac$.

3. Să se arate că dacă în triunghiul ABC are loc una din relaţiile

1) $a = 2b\sin\frac{A}{2}$; 2) $a = 2bc\cos C$; 3) $b + c = 4R\cos\frac{A}{2}$; 4) $a\operatorname{tg}A + b\operatorname{tg}B = (a + b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$;

5) $\frac{\operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B}{\operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C} = \frac{a}{c}$; 6) $\operatorname{tg}B = \frac{1 - \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}}$, atunci triunghiul este isoscel.

4. Să se arate că dacă în triunghiul ABC are loc una din relaţiile:

1) $\frac{ah_a}{2} = \frac{2}{3}pR\sin B\sin C = \frac{2}{3}pR\sin A\sin B$, unde h_a este lungimea înălţimii din A;
2) $h_a\sqrt{3} + \frac{a}{2} = b + c$,

atunci triunghiul este echilateral.

5. Să se arate că triunghiul ABC în care are loc una din relaţiile

1) $a^2\sin 2B = \frac{abc}{R}$; 2) $\cos B + \cos C = \frac{b + c}{a}$, 3) $\sin A + \sin B = \cos A + \cos B$,

este dreptunghic.

6. Dacă în triunghiul ABC are loc una din relaţiile:

1) $b\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right) = c\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)$, 2) $\sin(A - B) = \sin^2 - \sin B^2$,

atunci triunghiul este isoscel sau dreptunghic.

7. Să se arate că în triunghiul ABC au loc inegalităţile:

1) $b + c < h_a + 2R$, unde h_a este lungimea înălţimii din A;
2) $R(b + c) \geq a\sqrt{bc}$, cu egalitate în triunghiul dreptunghic isoscel;
3) $\frac{a}{b + c} \geq \sin\frac{A}{2}$.

8. (Distanţa dintre o navă de război şi un submarin) Dintr-un avion care zboară deasupra oceanului, unghiul de coborâre la un submarin situat la suprafaţa apei este de 45°, iar unghiul de coborâre la o navă de război este de 30°. Dacă distanţa de la avion la navă este de 10 km, atunci determinaţi distanţa de la submarin la navă.

9. (Distanţa de la avion la vârful muntelui) Un aviator vede vârful unui munte cu unghiul de coborâre de 15°, avionul fiind situat faţă de vârful muntelui la distanţa de 5 km. După câteva momente aviatorul vede vârful muntelui cu unghiul de coborâre de 45°. Care este distanţa de la avion la vârful muntelui.

10. (Distanţa de la navă la far) O navă se deplasează paralel cu ţărmul. La un moment din navă farul se vede sub un unghi de 30° cu direcţia de deplasare. După ce nava parcurge 5 km, unghiul a crescut la 75°. În acest moment, care este distaţa de la navă la far?

Funcţiile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi

Reamintim teorema cosinusului în triunghiul ABC: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Atunci:

Corolar (cosinusul unui unghi). În orice triunghi ABC avem:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\ \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Caracterizarea naturii unui unghi al unui triunghi

A= unghi ascuţit $\Leftrightarrow A < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow b^2+c^2 > a^2$

A= unghi drept $\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow b^2+c^2 = a^2$

A= unghi obtuz $\Leftrightarrow A > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow b^2+c^2 < a^2$.

Corolar (funcţiile trigonometrice ale unghiului pe jumătate).
În orice triunghi ABC avem egalităţile:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\ \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Demonstraţie. Avem: $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2} = \frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc} =$

$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc} = \frac{2p(2p-2a)}{4bc} = \frac{p(p-a)}{bc}$. Deci $\left(0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$.

Analog din $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$ se deduce expresia lui $\sin\frac{A}{2}$. ■

Probleme rezolvate

1. (Formula medianei) Să se arate că în triunghiul ABC lungimea medianei din A, notată m_a, are expresia $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$.

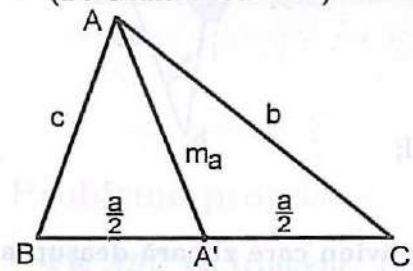


Fig. 4

R. Fie $[AA']$ mediana din vârful A al triunghiului ABC (fig. 4). Aplicăm teorema cosinusului în triunghiurile ABA', ABC şi avem:

$$\cos B = \frac{c^2+\frac{a^2}{4}-m_a^2}{ca},\ \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Egalând cele două exprimări ale lui $\cos B$, după unele calcule se deduce formula dorită.

Prin permutări circulare găsim $m_b^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}$, $m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$.

2. **Să se arate că dacă:**

a) $\sin A = 2\sin B\cos C$, **atunci triunghiul este isoscel.**

b) $p = b\cos A + c\cos B + a\cos C$, **atunci triunghiul este echilateral sau isoscel.**

R. a) Vom scrie echivalent relaţia în funcţie de laturi (utilizând teorema sinusului şi teorema cosinusului) şi avem: $a = 2b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Leftrightarrow b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = c$, adică triunghiul ABC este isoscel.

Altfel din $A = \pi - (B+C)$ relaţia se reduce la $\sin(B-C) = 0$, adică $B = C$.

b) Aplicăm teorema cosinusului şi după unele calcule egalitatea se aduce la forma

$ab(b^2-a^2) + bc(c^2-b^2) + ac(a^2-c^2) = 0$ sau $\quad (b-a)(c-b)(c-a)(a+b+c) = 0$.

De aici $a = b$ sau $b = c$ sau $c = a$.

Dacă una din relaţii are loc se obţine triunghi isoscel, iar dacă două relaţii au loc, atunci $a = b = c$ şi deci triunghiul este echilateral.

3. **Să se arate că în orice triunghi ABC are loc egalitatea** $b\cos C - c\cos B = \dfrac{b^2-c^2}{a}$.

R. În structura egalităţii figurează atât laturi cât şi unghiuri. Căutăm să „uniformizăm" scrierea utilizând numai laturile cu ajutorul teoremei cosinusului. De fapt membrul drept conţine în structura lui doar laturi. Vom aduce şi membrul stâng la o exprimare cu ajutorul laturilor. Avem:

$$b\cos C - c\cos B = b\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - c\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{b^2-c^2}{a}.$$

Altfel, se exprimă laturile (din teorema sinusurilor) în funcţie de unghiuri.

4. **Să se arate că dacă într-un triunghi $a^4 \geq b^4 + c^4 - b^2c^2$, atunci $A \geq \dfrac{\pi}{3}$.**

R. Să observăm că inegalitatea $A \geq \dfrac{\pi}{3}$ este echivalentă cu inegalitatea $\cos A \leq \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. Utilizând teorema cosinusului această ultimă inegalitate se rescrie echivalent $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 \geq b^2+c^2-bc$.

Condiţia din ipoteză se rescrie $a^2 \geq \sqrt{b^4+c^4-b^2c^2}$.

Arătăm că $\sqrt{b^4+c^4-b^2c^2} \geq b^2+c^2-bc$. Se ridică ambii membri (pozitivi) la pătrat şi după unele calcule se ajunge la $(b-c)^2 \geq 0$, ceea ce-i adevărat.

5. **Se consideră triunghiul ABC şi punctele M, N situate pe laturile (AC) şi respectiv (AB). Să se arate că $BC^2 + MN^2 = BM^2 + CN^2$ dacă şi numai dacă $A = \dfrac{\pi}{2}$.**

R. Notăm $AM = x$, $AN = y$ şi exprimăm segmentele care apar în relaţie cu ajutorul teoremei cosinusului (fig. 5). Avem:

$BC^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$, $\quad MN^2 = x^2+y^2-2xy\cos A$,

$BM^2 = x^2+c^2-2xc\cos A$, $\quad CN^2 = y^2+b^2-2yb\cos A$.

Se aduce relaţia din enunţ la forma $(b-x)(c-y)\cos A = 0$ sau $MC\cdot NB\cdot\cos A = 0$. De aici $\cos A = 0$, adică $A = \dfrac{\pi}{2}$.

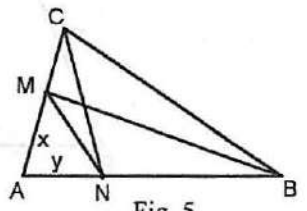


Fig. 5

6. **Să se arate că dacă în triunghiul ABC avem $2a = b+c$, atunci** $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{3}$.

R. Ţinând seama de formulele cunoscute ale unghiului pe jumătate avem:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \frac{p-a}{p}, \text{ unde } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Acum $\dfrac{p-a}{p} = \dfrac{\frac{3a}{2}-a}{\frac{3a}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

7. **Să se arate că dacă în triunghiul ABC avem relaţia** $a\cos^2\dfrac{C}{2} + c\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{3}{2}b$, **atunci** $2b = a+c$.

R. Ţinem seama de relaţiile $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}$, $\cos^2\frac{C}{2}=\frac{p(p-c)}{ab}$ şi relaţia din ipoteză devine: $\frac{p(p-c)}{b}+\frac{p(p-a)}{b}=\frac{3}{2}b$ sau după unele calcule $2b=a+c$.

8. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$.

R. Utilizăm relaţia $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ şi analoagele şi inegalitatea devine
$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\le abc$, (1).
Notăm $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$, $x,y,z>0$. De aici $a=y+z$, $b=x+z$, $c=x+y$ şi inegalitate (1) se rescrie: $8xyz\le(x+y)(x+z)(y+z)$, ceea ce-i adevărat deoarece $x+y\ge2\sqrt{xy}$, $x+z\ge2\sqrt{xz}$, $y+z\ge2\sqrt{yz}$, care înmulţite, membru cu membru, dau inegalitatea de mai sus. Avem egalitate în ultimele inegalităţi dacă $x=y=z$, adică dacă $a=b=c$ şi corespunde triunghiului echilateral.

Rezolvarea triunghiurilor oarecare

Ca şi în cazul triunghiurilor dreptunghice, prin rezolvarea triunghiurilor oarecare înţelegem determinarea lungimilor laturilor şi măsurilor unghiurilor când se cunosc o parte dintre ele. Cazurile de congruenţă ale triunghiurilor precizează în ce condiţii două triunghiuri sunt congruente. Pentru două triunghiuri congruente laturile care se corespund au aceeaşi lungime, iar unghiurile corespunzătoare au aceeaşi măsură. Aceasta înseamnă că se consideră elemente cunoscute în rezolvarea unui triunghi cele furnizate de cazurile de congruenţă ale triunghiurilor.
Le analizăm în continuare.
Cazul 1 (L.U.L.) Se consideră cunoscute două laturi şi unghiul dintre ele. Presupunem că se dau laturile b, c şi unghiul A (fig. 6). Utilizând teorema cosinusului se determină latura a. Avem:
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$. Acum este suficient să determinăm unghiul B, deoarece $C=\pi-(A+B)$. Pentru aceasta se poate utiliza fie teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ când $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$, fie teorema cosinusului din care $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ şi deci B rezultă uşor.

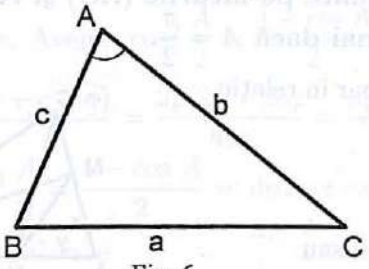


Fig. 6

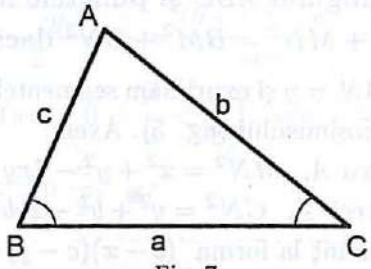


Fig. 7

Exemplu. Să se rezolve triunghiul ABC în care $b=3$, $c=5$, $A=\frac{\pi}{3}$.

R. Conform celor expuse mai sus avem: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=19$. Deci $a=\sqrt{19}$. De asemenea $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{7\sqrt{19}}{38}$ şi de aici rezultă B, când $C=\pi-\left(\frac{\pi}{3}+B\right)=\frac{2\pi}{3}-B$.

Cazul 2. (U.L.U.) Acest caz corespunde triunghiului în care este cunoscută o latură, să spunem a, şi unghiurile alăturate ei, B, C (fig. 7). Avem imediat $A=\pi-(B+C)$, iar din teorema sinusurilor $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ se obţin celelalte laturi $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$, $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$. Dacă am aflat latura c din teorema sinusurilor, atunci pentru b se poate aplica şi teorema cosinusului.

Exemplu. Să se rezolve triunghiul ABC în care $B=\frac{\pi}{6}$, $C=\frac{\pi}{4}$, $a=10$.

R. Se determină unghiul $A = \pi - (B + C) = \pi - \frac{5\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$. Din formulele de mai sus $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{5\sqrt{2}}{\sin \frac{7\pi}{12}} = \frac{5\sqrt{2}}{\cos \frac{\pi}{12}}$. Cum $\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ avem: $c = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Analog $b = \frac{10}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Cazul 3 (L.L.L.) Cunoaştem în acest caz toate laturile a, b, c. Din formulele $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ se determină unghiurile A şi B, iar din $A + B + C = \pi$ rezultă C.

Exemplu. Să se rezolve triunghiul ABC în care $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

R. Avem după unele calcule $\cos A = \frac{1}{2}$, adică $A = \frac{\pi}{3}$.

Din teorema sinusurilor $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, adică $B = \frac{\pi}{4}$.

Acum $C = \pi - (A + B) = \frac{5\pi}{12}$.

Formule pentru aria unui triunghi

Notăm cu S aria triunghiului ABC, iar cu h_a, h_b, h_c lungimile înălţimilor triunghiului duse din A, B şi respectiv C. Atunci se ştie că aria S are exprimările

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Cum din triunghiul ABA', $\sin B = \frac{h_a}{c}$ (fig. 8.a)) sau $\sin(\pi - B) = \frac{h_a}{c}$ (fig. 8.b)) deducem $h_a = c \sin B$ şi deci $S = \frac{ac \sin B}{2}$ şi analoagele obţinute prin permutări circulare $S = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2}$.

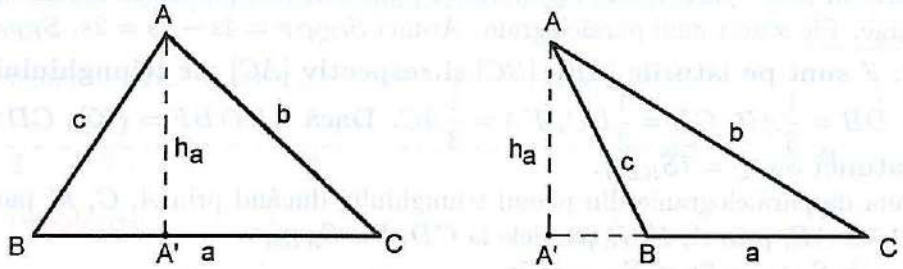


Fig. 8

Aşadar

$$S = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{ca \sin B}{2} = \frac{ab \sin C}{2}$$

Aria unui triunghi este egală cu jumătatea produsului a două laturi înmulţit cu sinusul unghiului dintre ele.

Scriem aria triunghiului ABC sub forma

$$S = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{ab}{2} \cdot 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = ab \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

şi am obţinut

b) Avem: $actgA = 2R\sin A \cdot \dfrac{\cos A}{\sin A} = 2R\cos A$ şi deci membrul stâng se scrie $2R(\cos A + \cos B + \cos C)$, care devine, via a), $2R\left(1 + \dfrac{r}{R}\right) = 2(R + r)$.

3. Bisectoarele triunghiului ABC intersectează cercul circumscris în punctele A', B', C'. Să se arate că:

a) $AA' \cdot B'C' + BB' \cdot A'C' + CC' \cdot A'B' = 4pR$;

b) $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S} = \dfrac{R}{2r}$, **unde $S_{A'B'C'}$ este aria triunghiului $A'B'C'$.**

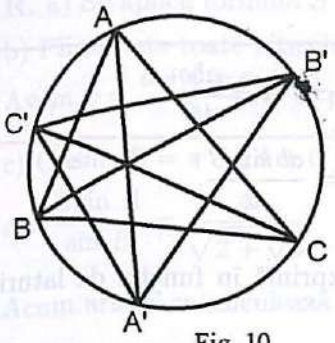


Fig. 10

R. a) Exprimăm segmentele care apar în membrul stâng al relaţiei în funcţie de R şi unghiurile triunghiului ABC. În triunghiul ACA' (fig. 10) avem $\mu(\widehat{ACA'}) = \dfrac{1}{2}\mu(\widehat{ABA'}) = \dfrac{1}{2}(2C + A)$.

Teorema sinusurilor aplicată în acest triunghi ne dă

$AA' = 2R\sin\dfrac{2C + A}{2}$.

În triunghiul $A'B'C'$ avem $A' = \dfrac{1}{2}\mu(\widehat{B'AC'}) = \dfrac{1}{2}(B + C)$, iar teorema sinusurilor $B'C' = 2R\sin\dfrac{B + C}{2} = 2R\cos\dfrac{A}{2}$.

Membrul stâng devine:

$$\sum AA' \cdot B'C' = 4R^2 \sum \sin\frac{A + 2C}{2}\cos\frac{A}{2} = 2R^2\sum(\sin B + \sin C) = R\sum(b + c) = 4pR.$$

b) Avem: $S_{A'B'C'} = \dfrac{A'B' \cdot A'C'\sin A'}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot 2R\cos\dfrac{C}{2} \cdot 2R\cos\dfrac{B}{2} \cdot \cos\dfrac{A}{2} = 2R^2\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

Pe de altă parte $S = \dfrac{abc}{4R} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$, $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

Acum găsim uşor că $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S} = \dfrac{R}{2r}$.

Razele cercurilor exînscrise r_a, r_b, r_c.

Fie ABC un triunghi oarecare. Am considerat cercul înscris în acest triunghi tangent laturilor sale. Există cercuri tangente la o latură a triunghiului ABC şi la prelungirile celorlalte două. Cum sunt trei laturi ale triunghiului, vom avea trei astfel de cercuri. Ele se numesc cercuri exânscrise triunghiului ABC. Raza cercului exânscris tangent laturii $[BC]$ şi prelungirile laturilor $[AB]$ şi $[AC]$ o notăm prin r_a. Centrul acestui cerc se obţine la intersecţia bisectoarei interioare a unghiului A cu bisectoarea exterioară a unghiului B (sau C). Analog avem razele r_b, r_c.

Teoremă. Într-un triunghi ABC razele cercurilor exînscrise sunt egale cu

$$r_a = \frac{S}{p - a}, \quad r_b = \frac{S}{p - b}, \quad r_c = \frac{S}{p - c}.$$

Demonstraţie. Bisectoarea interioară a unghiului A se intersectează cu bisectoarea exterioară a unghiului B în punctul I_a (fig. 11). Acest punct se află la egală distanţă de dreptele AB, AC, BC. Dacă A', B', C' sunt proiecţiile acestui punct pe BC, AC şi respectiv AB avem $I_aA' = I_aB' = I_aC' = r_a$.

Deci există un unic cerc de centru I_a care trece prin punctele A', B', C' şi este tangent unei laturi a triunghiului ($[BC]$) şi prelungirilor celorlalte două ($[AB]$, $[AC]$). Pentru determinarea razei r_a a acestui cerc utilizăm egalitatea de arii

$S = S_{ABI_a} + S_{ACI_a} - S_{BCI_a}$ sau

$S = \frac{c \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_a}{2} - \frac{a \cdot r_a}{2}$ sau

$S = \frac{b+c-a}{2} r_a$ sau încă $S = (p-a)r_a$, iar de aici $r_a = \frac{S}{p-a}$. ■

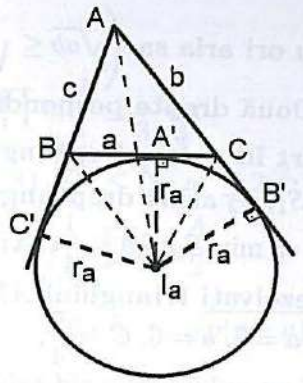


Fig. 11

Observaţie. Prin permutări circulare se obţin şi r_b, r_c.

Probleme propuse

Funcţiile trigonometrice ale unghiului pe jumătate

1. **Să se arate că dacă în triunghiul ABC avem:**

   1) $\sin A \sin B = 3\sin^2 \frac{C}{2}$, **atunci** $a + b = 2c$;

   2) $\sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2}$, **atunci triunghiul este isoscel;**

   3) $(p-b)\operatorname{ctg} \frac{C}{2} = p \operatorname{tg} \frac{B}{2}$, **atunci triunghiul este isoscel;**

   4) $\sqrt{p(p-a)} + \sqrt{(p-b)(p-c)} = \sqrt{2bc}$, **atunci** $A = \frac{\pi}{2}$.

2. **Dacă în triunghiul dreptunghic** ABC $\left(A = \frac{\pi}{2}\right)$ **avem** $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = 2\operatorname{tg} \frac{C}{2}$, **atunci** $2a = 3\sqrt{bc}$.

3. **Să se arate că într-un triunghi oarecare** ABC **avem relaţiile:**

   1) $\frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{a} + \frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{b} + \frac{\cos^2 \frac{C}{2}}{c} = \frac{p^2}{abc}$; 2) $(b+c)\sin^2 \frac{A}{2} + (c+a)\sin^2 \frac{B}{2} + (a+b)\sin^2 \frac{C}{2} = p$.

Aria unui triunghi. Razele R, r, r_a

0. **Problemele 1) – 10) se referă la** ABC **triunghi.**

1) **Dacă** $AC = 2$, $AB = 4$, $A = 30°$, **atunci** $S = 2$.

2) **Dacă** $S = 15$, $AB = 6$, $AC = 10$, **atunci** $\sin A = \frac{1}{2}$.

3) **Dacă** $S = 7$, $AC = 2$, $A = 30°$, **atunci** $AB = 14$.

4) **Dacă** $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$, **atunci** $h_a = \frac{12}{5}$.

5) **Dacă** $A = 90°$, $B = 40°$, $BC = 8$, **atunci** $S = 8\sqrt{3}$.

6) **Dacă** $A = 90°$, **atunci** $2S = a^2 \sin B \sin C$.

7) **Dacă** $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 10$, **atunci** $S = 24$.

8) **Dacă** $\sin A = \frac{1}{2}$, $\sin B = 1$, $BC = 4$,, **atunci** $S = 8\sqrt{3}$.

9) **Dacă** $AB = 13$, $AC = 14$, $BC = 15$, **atunci calculaţi** h_a.

10) **Dacă** $c = 6$, $B = 30°$, **atunci** $h_a = 3$.

11) **Dacă** $ABCD$ **este paralelogram şi** $AB = 6$, $AD = 8$, $\widehat{ADC} = 135°$, **atunci** $S = 24\sqrt{2}$.

12) **Dacă** $ABCD$ **este dreptunghi şi** $AC = 10$, $\widehat{A} = 30°$, **atunci** $S = 2\sqrt{3}$.

13) **Să se arate că într-un patrulater convex suma pătratelor laturilor sale este cel puţin de**

patru ori aria sa $\left(\sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)$.

14) Două drepte perpendiculare pe câte două laturi opuse ale unui pătrat de latură unu îl împart în patru dreptunghuri. Să se arate că ariile a două dreptunghiuri sunt cel mult $\frac{1}{4}$. (Fie S_1, S_2 ariile dreptunghiurilor de laturi x, y şi $1-x$, $1-y$. Atunci $S_1S_2 = x(1-x)y(1-y) \leq \leq \frac{1}{16} \Rightarrow \min(S_1, S_2) \leq \frac{1}{4}$. Analog S_3, S_4.)

1. Rezolvaţi triunghiul ABC în cazurile:
   1) $a=3$, $b=6$, $C=\frac{\pi}{4}$; 2) $A=\frac{\pi}{3}$, $C=\frac{\pi}{4}$, $b=5$; 3) $a=1+\sqrt{3}$, $b=\sqrt{6}$, $c=2$.
2. Să se calculeze aria triunghiului ABC în cazurile:
   1) $a=5$, $c=8$, $B=\frac{\pi}{3}$; 2) $a=4$, $b=5$, $c=6$;
   3) $b=9$, $A=\frac{\pi}{3}$, $C=\frac{5\pi}{12}$; 4) $a=6$, $C=\frac{\pi}{3}$, $A=\frac{\pi}{4}$.
3. Să se arate că dacă în triunghiul ABC avem relaţia $c^2\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = 4S$, atunci triunghiul este isoscel.
4. Să se arate că în oricare triunghi ABC avem relaţiile:
   1) $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$; 2) $r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$;
   3) $p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$; 4) $p-a = 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$;
   5) $\sum \sin^2\frac{A}{2} = 1-\frac{r}{R}$; 6) $\frac{\sum \sin A}{\sum \cos A} = \frac{p}{R+r}$; 7) $\sum a\operatorname{ctg}A = 2(r+R)$.
5. Să se arate că în oricare triunghi ABC şi triunghiul ortic asociat au loc egalităţile:
   1) $\frac{S'}{S} = 2\prod \cos A$; 2) $r' = \frac{S\prod \cos A}{\prod \sin A}$.
6. Să se arate că în oricare triunghi ABC avem relaţiile:
   1) $r = \frac{r_a r_b r_c}{p^2}$; 2) $S = \sqrt{r r_a r_b r_c}$; 3) $r_a + r_b + r_c = r + 4R$; 4) $r = \frac{r_a r_b r_c}{\sum r_a r_b}$; 5) $h_a = \frac{2r_b r_c}{r_b + r_c}$;
   6) $\sum \frac{a^2}{r_a} = 4(r+R)$; 7) $\sum r_a r_b = p^2$; 8) $\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$; 9) $\sum \frac{h_a + h_b}{r_c} = 6$.
7. Într-un triunghi ABC avem:
   1) $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$; 2) $r_a r_b r_c = pS$, $r_a r_b r_c r = S^2$. 3) $S = 2R^2 \prod \sin A$.
   4) $S = \frac{4}{3}\sqrt{s_m(s_m - m_a)(s_m - m_b)(s_m - m_c)}$, unde $s_m = \frac{1}{2}\sum m_a$.

8*. (Formula lui Pick) Fie P un poligon laticial. Pentru fiecare punct laticial p din interiorul sau frontiera poligonului notăm a_p unghiul de vizibilitate al poligonului P din p. Dacă $p \in \operatorname{Int} P$, atunci $a_p = 2\pi$. Dacă p aparţine frontierei, p diferit de vârfuri, atunci $a_p = \pi$, iar dacă p este vârf al poligonului, atunci a_p este chiar unghiul intern al poligonului. Fie $W = \frac{1}{2\pi}\sum a_p$. Atunci $W = S = i + \frac{f}{2} - 1$.

Verificaţi egalitatea pentru dreptunghiul de laturi $m=3$, $n=4$, având laturile paralele cu axele de coordonate.

Verificaţi egalitatea pentru triunghiul dreptunghic de catete $m=3$, $n=4$, având catetele paralele cu axele de coordonate.

Inegalităţi într-un triunghi

1. Să se arate că în oricare triunghi ABC au loc inegalităţile:

1) $\prod \cos A \le \frac{1}{8}$; 2) $\sum \sin^2 \frac{A}{2} \ge \frac{3}{4}$; 3) $\sum \sin 2A \le \sum \sin A$; 4) $\prod \operatorname{tg} \frac{A}{2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}}$;

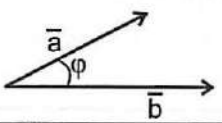
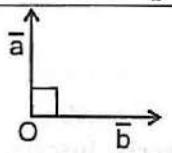
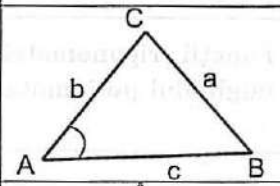
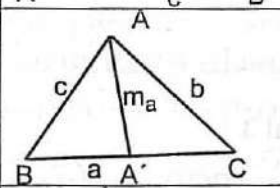
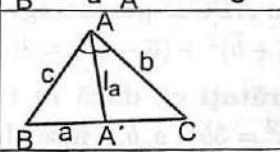
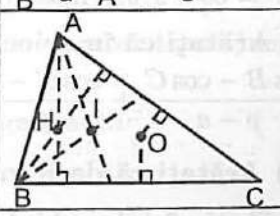
5) $\sum \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \ge 9$; 6) $\sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \ge 9 \prod \operatorname{tg} \frac{A}{2}$; 7) $\sum (p-a)^2 \ge \frac{p^2}{3}$; 8) $\frac{4p^2}{3} \le \sum a^2 \le 2p^2$;

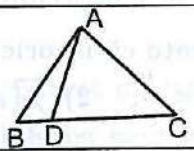
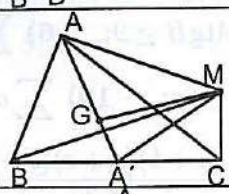
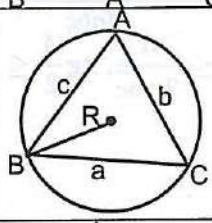
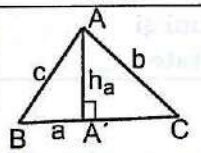
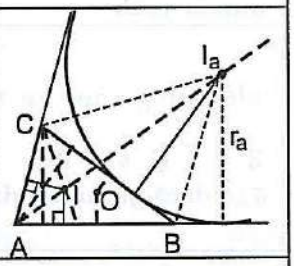
9) $\sum r_a \ge 9r$; 10) $\sum a r_a \ge 6S$; 11) $\sum \frac{r_a}{h_a} \ge 3$; 12) $\prod \left(1 - \frac{a}{b+c}\right) \le \prod \sin \frac{A}{2}$;

13) $\frac{R}{r} \ge \frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{4abc}$; 14) $\sum \frac{m_a^2}{b^2+c^2} \le \frac{9}{8}$; 15) $\sum h_a \ge 9r$; 16) $h_a \le \sqrt{p(p-a)}$;

17) $\sin \frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}$, $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \le \frac{a}{2h_a}$; 18) dacă $a+b<3c$, atunci $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} < \frac{1}{2}$.

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noţiuni şi rezultate	Formula matematică	Reprezentare
Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}, \vec{b}$ notat $\vec{a}\,\vec{b}$, este un număr real.	$\vec{a}\,\vec{b} = \begin{cases} 0, \vec{a} = \vec{0} \text{ sau } \vec{b} = \vec{0} \\ \lvert\vec{a}\rvert \lvert\vec{b}\rvert \cos\varphi, \vec{a}, \vec{b} \ne 0 \end{cases}$	
$\vec{a} \ne \vec{0}$ şi $\vec{b} \ne \vec{0}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ dacă şi numai dacă	$\vec{a}\,\vec{b} = 0$	
Teorema cosinusului într-un triunghi ABC de laturi $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$.	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	
Lungimea medianei într-un triunghi	$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$	
Lungimea bisectoarei într-un triunghi	$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$	
Distanţe remarcabile într-un triunghi	$OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$ $OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$	

Relaţia lui Stewart	$AB^2 \cdot DC - AD^2 \cdot BC + AC^2 \cdot BD = BD \cdot DC \cdot BC$	
Relaţia lui Leibniz	$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$	
Teorema sinusurilor	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$	
Formule pentru aria S a unui triunghi ABC	$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$ $S = \frac{ab\sin C}{2} = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{ac\sin B}{2}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ **(Heron)**, $p = (a+b+c)/2$	
Razele cercurilor circumscris, înscris, exînscris, în triunghiul ABC	$R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{p}$ $r_a = \frac{S}{p-a}$,	
Funcţii trigonometrice ale unghiului pe jumătate	$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$	

Teste de evaluare

Testul 1

1. Fie $ABCD$ paralelogram, cu $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{b}$. Arătaţi că: $(\bar{a}+\bar{b})^2 + (\bar{a}-\bar{b})^2 = 2(\bar{a}^2+\bar{b}^2)$ şi interpretaţi geometric rezultatul.

2. Arătaţi că dacă în triunghiul ABC, medianele din A şi C sunt perpendiculare, atunci $a^2 + c^2 = 5b^2$, a, b, c fiind lungimile laturilor triunghiului ABC.

3. 1) Arătaţi că în orice triunghi are loc relaţia:
$\frac{\cos B - \cos C}{p-a} + \frac{\cos C - \cos A}{p-b} + \frac{\cos A - \cos B}{p-c} = 0$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$.

   2) Arătaţi că dacă în triunghiul ABC, $b^2 - c^2 = 2a^2$, atunci $\cos A \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Arătaţi că triunghiul în care lungimile a două bisectoare sunt egale este isoscel.

5. Prin mijloacele laturilor unui patrulater se duc perpendiculare pe laturile opuse. Să se arate că dacă trei dintre aceste perpendiculare se intersectează într-un punct, atunci şi a patra perpendiculară trece prin acelaşi punct.

6. Să se arate că într-un triunghi ABC are loc relaţia:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}$$ (teorema tangentelor).

7. Arătaţi că triunghiul ABC în care $\operatorname{tg}B=\dfrac{\sin B+\cos C}{\cos B+\sin C}$ este dreptunghic.

8. Să se arate că dacă h_a, h_b, h_c sunt înălţimile unui triunghi, iar r este raza cercului înscris în triunghi şi verifică relaţia $h_a+h_b+h_c=9r$, atunci triunghiul este echilateral.

9. Să se arate că în triunghiul ABC are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{1}{r^2},$$

unde r este raza cercului înscris în triunghi.

10. Prin punctul R situat în interiorul triunghiului ABC, se duc trei drepte paralele la laturile triunghiului. Ariile celor trei triunghiuri sunt, respectiv, egale cu a^2, b^2 şi c^2. Să se determine aria triunghiului ABC.

11. Dacă $9x^2+16y^2+144z^2=169$, atunci arătaţi $\max(6x-4y+24z)=39$. ($\vec{u}(3x,4y,12z)$, $\vec{v}(2,-1,2)$ şi $\vec{u}\cdot\vec{v}\leq|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$.)

Testul 2

1. Fie $ABCD$ un paralelogram în care $[AC]$ este diagonala cea mai mare, E,F proiecţiile punctului C pe dreptele AB şi AD.
Stabiliţi relaţia $AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^2$.

2. Se consideră triunghiul ABC şi punctele M,N situate pe laturile (AC) şi respectiv (AB). Arătaţi că $BC^2+MN^2=BM^2+CN^2\Leftrightarrow \mathrm{m}(\widehat{A})=90^0$.

3. 1) Arătaţi că în orice triunghi are loc relaţia:
$(a+b)\cos C+(b+c)\cos A+(c+a)\cos B=0$.

2) Dacă $a=2b\cos C$, atunci triunghiul este isoscel.

4. Pe un cerc se consideră două puncte oarecare A, B. Din A se duce perpendiculara AC pe tangenta în B la cerc. Să se arate că $AB^2=2R\cdot AC$. Daţi soluţie vectorială şi sintetică.

5. În patrulaterul $ABCD$, fie M mijlocul diagonalei $[AC]$, iar N mijlocul diagonalei $[BD]$. Să se demonstreze relaţia lui Euler
$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2$.

6. Arătaţi că dacă în triunghiul ABC avem, $a+b=3c$, atunci $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=2$.

7. Arătaţi că triunghiul ABC în care $\sin A=\dfrac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$ este dreptunghic.

8. Fie ABC un triunghi, iar O centrul cercului circumscris lui. Să se demonstreze inegalitatea $OA+OB+OC\geq 2(OA_1+OB_1+OC_1)$.

9. Să se arate că pentru un triunghi ascuţitunghic ABC are loc inegalitatea
$\dfrac{m_a}{h_a}+\dfrac{m_b}{h_b}+\dfrac{m_c}{h_c}\leq 1+\dfrac{R}{r}$.

10. Pe laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC se iau punctele A_1, B_1 şi respectiv C_1. Să se arate că aria unuia din triunghiurile AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C nu depăşeşte $\frac{1}{4}$ din aria triunghiului ABC.

11. Utilizând graficele $y = \sin x$ şi $y = \frac{2x}{\pi}$ arătaţi că $\sin x > \frac{2x}{\pi}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Dacă ABC este triunghi ascuţitunghic, atunci $\sin A + \sin B + \sin C > 2$.

Testul 3

1. Arătaţi că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$.

2. Arătaţi că G este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = 3(\overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2)$.

3. Să se determine forma triunghiului ABC pentru care are loc egalitatea $BC \cdot \overrightarrow{GA} + AC \cdot \overrightarrow{GB} + AB \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului.

4. În cercul de rază R se înscrie triunghiul ABC cu $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Să se calculeze distanţa de la centrul O al cercului circumscris până la vârful D al paralelogramului $ABCD$.

5. Într-un cerc se înscrie patrulaterul $ABCD$, diferit de trapez, ale cărui diagonale se taie în M. Prin punctul P, mijlocul laturii $[AB]$ se duce dreapta PM, iar prin punctul Q, mijlocul laturii $[BC]$, se duce dreapta QM. Arătaţi că dacă $PM \perp CD$, atunci $QM \perp AD$.

6. Arătaţi că în triunghiul ABC are loc egalitatea:
$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\cos A + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\cos B + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\cos C = 3$$

7. Dacă în triunghiul ABC, $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{b}{a+c}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

8. Arătaţi că într-un triunghi ABC are loc inegalitatea:
$$\left(1 - \frac{a}{b+c}\right)\left(1 - \frac{b}{a+c}\right)\left(1 - \frac{c}{a+b}\right) \leq \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

9. 1) În triunghiul ABC, medianele $[AD]$ şi $[BE]$ sunt perpendiculare. Să se arate că avem: $\operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B \geq \frac{2}{3}$.

2) Dacă aria trapezului este egală cu 2, iar suma diagonalelor sale este egală cu 4, atunci diagonalele sunt perpendiculare.

10. Vârfurile triunghiului $B_1B_2B_3$ se află pe laturile triunghiului $A_1A_2A_3$ ($B_1 \in [A_2A_3]$, $B_2 \in [A_3A_1]$), iar vârfurile acestuia din urmă sunt situate pe laturile triunghiului $C_1C_2C_3$ ($A_1 \in [C_2C_3]$, $A_2 \in [C_1C_3]$). Ştiind că laturile triunghiului $C_1C_2C_3$ sunt paralele cu laturile triunghiului $B_1B_2B_3$, să se determine aria triunghiului $A_1A_2A_3$, dacă se cunosc ariile triunghiurilor $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$.

11. Să se demonstreze inegalitatea $\sin 2 + \cos 2 + 2(\sin 1 - \cos 1) > 1$.

12. Arătaţi că $\max\limits_{a^2+b^2=1}(a^3b - b^3a) = \frac{1}{4}$ ($a = \sin\alpha$, $b = \cos\alpha$).

15. Fiecare din cele trei drepte împart un triunghi în părţi echivalente (de arii egale). Să se arate că partea din figură, cuprinsă în interiorul triunghiului delimitat de cele trei drepte, are aria cel mult $\frac{1}{4}$ din aria întregului triunghi.

16. Se dă triunghiul ABC. Pe laturile $[AB]$ şi $[BC]$ se iau punctele M şi respectiv N, astfel încât $AB = 5AM$ şi $BC = 3BN$. Segmentele $[AN]$ şi $[CM]$ se intersectează în O. Să se determine raportul dintre ariile OAC şi ABC.

Testul 2.

1. Să se arate că are loc egalitatea $x,(y)+y,(z)+z,(x) = x,y(x)+y,z(x)+z,x(y)$, unde x, y, z sunt cifre.

2. a) Se consideră funcţia $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = -\frac{2+m}{1-m}x + \frac{3-6m}{1-m}$, $m \neq 1$. Arătaţi că graficele funcţiilor trec printr-un punct fix.

b) Determinaţi parametrul m, dacă punctul $A(2,5)$ aparţine graficului lui f_m.

c) Pentru $m = 2$, reprezentaţi grafic funcţia f_2 şi apoi restricţiile acestei funcţii la mulţimile:
$\{-1,0,1,2,3\}$, $[-1,1]$, $(-\infty,1]$, $(3,\infty)$.

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Arătaţi că dacă termenii a_k, a_l, a_m, a_n sunt în progresie geometrică, atunci numerele $k-l$, $l-m$ şi $m-n$ sunt în progresie geometrică.

4. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$, pentru care ecuaţiile
$2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0$, $4x^2 - (9m-2)x + 36 = 0$ au o rădăcină comună.

5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \begin{cases} 2x+3m, & x<2 \\ x^2+mx-2, & x \geq 2, \ m \in \mathbb{R} \end{cases}$ să fie strict monotonă.

6. Fie $[AB]$ şi $[CD]$, două coarde perpendiculare ale unui cerc cu centrul în O. Dacă $AB \cap CD = \{P\}$, să se arate că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$.

7. Fie M un punct în planul triunghiului ABC. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{BMC}$, $\widehat{CMA}$ şi $\widehat{AMB}$ intersectează pe $[BC]$, $[CA]$ şi $[AB]$, respectiv în A_1, B_1, C_1. Să se arate că AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

8. Arătaţi că $\operatorname{tg}20^0 + 4\cos 70^0 = \sqrt{3}$.

9. a) Arătaţi că dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A, atunci $b\sin 2B + c\cos 2B = c$.

10. Prin vârful A al triunghiului ABC se duc două ceviene, care formează unghiuri egale cu laturile $[AB]$ şi $[AC]$ şi întâlnesc latura $[BC]$ în M şi N.
Arătaţi că $\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

11. Într-un triunghi dreptunghic, se dau aria sa, S şi unghiul ascuţit α. Determinaţi distanţa de la centrul de greutate la ipotenuză.

12. Se consideră trei vectori nenuli $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, oricare doi necoliniari. Determinaţi suma lor, dacă $(\overline{a}+\overline{b}) \| \overline{c}$ şi $(\overline{b}+\overline{c}) \| \overline{a}$.

13. În triunghiul ABC se consideră mediana $[BD]$, $\mathrm{m}(\widehat{DBC}) = 90^0$,
$BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Să se determine $\mathrm{m}(\widehat{ABD})$.

14. Fie ABC un triunghi, iar M un punct pe una din laturile sale. Prin M ducem paralele la celelalte două laturi ale triunghiului. Fie S_1, S_2 ariile celor două triunghiuri astfel formate, iar S aria triunghiului ABC. Arătaţi că $2(S_1 + S_2) \geq S$.

15. Se dau 9 puncte în interiorul unui pătrat de latură 1. Să se arate că se pot alege trei puncte dintre acestea, care să formeze un triunghi de arie cel mult $\frac{1}{8}$.

16. În triunghiul ABC se ia punctul K pe latura $[AB]$ astfel încât $\frac{AK}{BK} = \frac{1}{2}$ şi punctul L pe $[BC]$, astfel încât $\frac{CL}{LB} = 2$. Fie $AL \cap CK = \{Q\}$. Determinaţi aria triunghiului ABC, dacă aria BQC este egală cu 1.

Testul 3.

1. Arătaţi că nu există numerele reale x, y, z, astfel încât $x^2 < 2y - 1$, $y^2 < 2z - 1$, $z^2 < 2x - 1$.

2. Determinaţi o funcţie având ca grafic segmentul $[AB]$, unde $A(-1, 3)$, $B(2, 1)$ şi arătaţi că punctul $C\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$ aparţine graficului acestei funcţii. Trasaţi graficul şi determinaţi $f([-1, 2])$.

3. Să se găsească primul termen a_1 şi raţia r ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_2 - a_6 + a_4 = -7$ şi $a_8 - a_7 = 2a_4$.
a) $a_1 = -5$, $r = 2$; b) $a_1 = -4$, $r = 3$; c) $a_1 = -4$, $r = 4$; d) $a_1 = -5$, $r = 2$.

(ADMITERE, BRAŞOV, 2000)

4. Ecuaţiile $x^2 - 3mx + 2m = 0$, $mx^2 - 3x + 2m = 0$ au aceleaşi rădăcini, dacă:
a) $m = -1$; b) $m = 1$; c) $m \in (0, 1)$; d) $m > 3$; e) $m = 2$.

5. Punctele fixe ale familiei de parabole $y = mx^2 - (8m - 1)x - 1$, $m \in \mathbb{R}^*$ sunt:
a) $A(1, 0)$, $B(7, 6)$; b) $A(0, 1)$, $B(7, 6)$; c) $A(0, 1)$, $B(6, 7)$;
d) $A(1, 0)$, $B(2, 3)$; e) $A(2, 3)$, $B(7, 6)$.

6. Fie patrulaterul $ABCD$, iar I mijlocul lui $[AC]$, J mijlocul lui $[BD]$. Să se arate că:
1) $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$; 2) Ce devine patrulaterul $ABCD$ dacă $I = J$?

7. Fiecare din diagonalele $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ ale hexagonului convex $ABCDEF$ împarte hexagonul în două poligoane echivalente (de arii egale). Arătaţi că AD, BE, CF sunt concurente.

8. Arătaţi că $\sin^2 x + \sin^2 y + \cos(x + y)\cos(x - y) = 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

9. a) Arătaţi că triunghiul în care $\sin A = 2 \sin B \cos C$ este isoscel.

b) Arătaţi că triunghiul ABC, în care $(1 + \operatorname{tg} B)(1 + \operatorname{tg} C) = 2$ este obtuzunghic.

10. Fie unghiul xOy. Prin punctul fix de pe bisectoarea acestui unghi se duce o dreaptă care taie laturile în M şi N. Să se arate că $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ este constant.

11. În paralelogramul $ABCD$ se dau $M \in [BC]$, $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{2}$, $N \in [DC]$, $\frac{DN}{NC} = \frac{1}{2}$, $\overline{AM} = \overline{a}$, $\overline{AN} = \overline{b}$. Exprimaţi vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{MN}$ şi $\overline{BD}$ în funcţie de $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

12. În triunghiul ABC, $N \in [AB]$, $AN = 3NB$, mediana $[AM]$ taie pe $[CN]$ în O. Determinaţi AB, dacă $AM = CN = 7$, $\mathrm{m}(\widehat{NOM}) = 60^0$.

13. Fie ABC un triunghi oarecare. Prin punctul M din interiorul triunghiului, ducem

paralele la laturile sale. Se formează trei triunghiuri care au laturile paralele cu laturile triunghiului dat. Notăm cu S_1, S_2, S_3 ariile acestor triunghiuri, iar cu S aria triunghiului dat. Să se arate că $3(S_1 + S_2 + S_3) \geq S$.

14. Două înălţimi ale unui triunghi sunt egale cu 12 şi 20. Arătaţi că a treia înălţime este mai mică decât 30.

15. Care este perimetrul cel mai mic pe care îl poate avea un poligon convex cu 12 laturi, dacă vârfurile lui sunt noduri ale unei reţele de pătrăţele de latură 1?

16. Punctul K împarte mediana $[AD]$ a triunghiului ABC în raportul $\frac{AK}{KD} = 3$. În ce raport împarte dreapta BK aria triunghiului ABC?

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

ALGEBRĂ

1. Elemente de logică matematică şi teoria mulţimilor

Mulţimea numerelor reale **pag. 29** 2. a) $\{1,5,9\}$; b) $\left\{-\frac{11}{4},-2,-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right\}$. 3. $[x]=2-\sqrt{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ $\Rightarrow\sqrt{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=k^2,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow k^2+k-2=0$; $\{1\}$. 5. 1) $x\in[2,3)$, $y=[-3,-2)$; 2) $x=k+\frac{1}{3}$, $y=l+\frac{1}{2}$, $k,l\in\mathbb{Z}$; 3) $x=2,7$, $y=3,6$; 4) $x=1,1$, $y=3,5$. **pag. 70** 8. $\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\left[\frac{100}{2^3}\right]+\left[\frac{100}{2^4}\right]+\left[\frac{100}{2^5}\right]+\left[\frac{100}{2^6}\right]=$ $=97$; 23. 3) $a,b\in\mathbb{Q}\Rightarrow\frac{a+b}{2}\in\mathbb{Q}\cap[a,b]$, $a<b$; 6) $a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. Din $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$; 7) Fie $\alpha\in\mathbb{Q}$ şi $\sqrt{\alpha^2+\alpha+1}\in\mathbb{Q}$. Atunci $x_1=\alpha+\sqrt{\alpha^2+\alpha+1}$, $x_2=\alpha-\sqrt{\alpha^2+\alpha+1}\in\mathbb{Q}$ verifică ecuaţia $x^2-2\alpha x-\alpha-1=0$. De aici $\alpha=\frac{x^2-1}{2x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2x-1\,|\,x^2-1$; pentru $\alpha=0\Rightarrow 1\in\mathbb{Z}$. 25. a) Dacă $b\neq 0$, atunci $\sqrt{3}=-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$, fals. Deci $b=0$ şi apoi $a=0$; b) Conform cu a) rezultă sistemul $2m+n-1=0$, $3m-2n=0$; c) $a=-6$, $b=12$; 27. Se ia $n=2k$, $k\in\mathbb{N}^*$, $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$; 33. 1) Nu; 2) Da; $a=1+\sqrt{2}$, $b=1-\sqrt{2}$, de exemplu; 34. 1) Nu; 2) Da; de exemplu $a=1-\sqrt{3}$, $b=1+\sqrt{3}$, $ab=-2\in\mathbb{Q}$; 35. $\sqrt{e}\in\mathbb{Q}\Rightarrow(\sqrt{e})^2=e\in\mathbb{Q}$, fals. Deci $\sqrt{e}\notin\mathbb{Q}$; 36. 1) $5\in\mathbb{Q}$; 2) $-3\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$; 3),5),6) raţionale; 4) iraţional; 7) $n<\sqrt{n(n+1)}<n+1$; 8) $\sqrt{3}$ $(n=1)$, $\sqrt{26}$ $(n=4)$, $\sqrt{\ldots 2}$ $(n\geq 5)$ nu sunt raţionale; pătratul unui număr natural nu se termină în cifra 2; 9) $n<\sqrt{n^2+1}<n+1$; $n=0$, $\sqrt{1}=1\in\mathbb{Q}$; $n\geq 1$, $\sqrt{n^2+1}\notin\mathbb{Q}$; 10) $\sqrt{n^2+3}=k\in\mathbb{N}\Rightarrow(k-n)(k+n)=3\Rightarrow(k-n=1,$ $k+n=3)\Rightarrow k=2$, $n=1$, $\sqrt{n^2+3}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, dacă $n\neq 1$, $n\in\mathbb{N}$. 37. 1) $1,2+\sqrt{5}>3$; 2) $\sqrt{7}<3$, $\sqrt{15}<4$; 5) $\sqrt{7}+\sqrt{2}>4$; 38. 1) 4; 2) 3; 3) 3; 40. Prin absurd, dacă fiecare cifră se repetă de un număr finit de ori, atunci după virgulă figurează un număr finit de cifre şi deci numărul ar fi raţional. Contradicţie!; 41. 1) $\frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)+(y-1)-1}<0$; 3) $x\in(1,3)\Leftrightarrow|x-2|<1$; 4) $x\in[5,7]\Leftrightarrow|x-6|\leq 2$; 42. 1) $\frac{1}{a(a+1)}=$ $=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1},\ldots;$; 5) $1+a^2=ab+bc+ca+a^2=(a+b)(a+c)$. 43. 1) ± 1; 2) $x\in[-1,1]$; 3) $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; 4) $x\in(-2,-1)\cup(1,2)$; 5) $x\in(-2,-1]\cup[1,2)$; 6) $x\in[-2,-1]\cup[1,2]$; 44. a) 1) $-2,-4$; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) ± 3; 4) ± 1; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $(-\infty,-1]$; 8) $1,-\frac{1}{2}$. b) 1) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; 2) $\left(-\frac{2}{3},2\right)$; 3) $(-\infty,0]\cup[6,\infty)$; 4) $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)$; 5) $(-2,-1)\cup(1,2)$; 6) $(-1,0)\cup(2,3)$; 7) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$; 8) $(-\infty,1]\cup[3,\infty)$; 9) $\mathbb{R}$; 10) $(0,2)$. 45. 1) $|x|<3$; 2) $|x|\geq 2$; 3) $|x-4|<2$; 4) $|x-16|\leq 4$; 5) $|x-5|<5$; 6) $|x-1|>4$; 46. 1) $5\leq 3x<6\Leftrightarrow\frac{5}{3}\leq x<2$; 2) $-2\leq 4x<-1\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\leq x<-\frac{1}{4}$; 3) $5\leq 3+2x<6\Leftrightarrow 1\leq x<\frac{3}{2}$. 51. 3) $k<\sqrt{k(k+1)}<k+1\Rightarrow[\sqrt{k(k+1)}]=k$; 52. 1) $k=\left[\frac{x-1}{2}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$, $k=\frac{x+3}{3}\Rightarrow x=3k-3$, $k\leq\frac{x-1}{2}<k+1\Leftrightarrow k\leq\frac{3k-4}{2}<k+1\Rightarrow k\in[4,6)\cap\mathbb{Z}$. Pentru $k=4\Rightarrow x_1=9$, iar pentru $k=5\Rightarrow x_2=12$; 2) $\left\{\frac{21}{2},13,\frac{31}{2},18,\frac{41}{2},23\right\}$; 3) $\{-8,-5\}$.

Calculul propoziţiilor **pag. 74** 1. 1) a; 2) f; 3) a. 2. 1) f; $\overline{p}$: „$2\leq 3$“. 3. 1) a; 2) – 5) f. 4. 1) $\{-1\}$; 2) $2-\frac{1}{x+2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x+2\in\{\pm 1\}$; $\{-1,-3\}$; 3) $\emptyset$. 5. 1) a; 2) – 4) f; 5) – 7) a; 8) f. 6. 1) $\exists x\in\mathbb{R}$, $3x+1\leq 0$; a. 7. 1) $x\in(-1,\infty)$; 2) $x\in(-\infty,2]$; 3) $x\in(-\infty,2]\cup(-1,\infty)=\mathbb{R}$; 4) $x\in(-1,\infty)\cap(-\infty,2]=(-1,2]$. 9. Toate sunt adevărate. 10. 1) – 2) a; 3) f; 4) a. 11. 1) a; 2) – 3) f.

Mulţimi. **pag. 75** 1. Aplicaţi principiul includerii şi excluderii. 2. a) $n(E\cup A\cup R)=52$; b) $n(E)=8$, $n(A)=10$, $n(R)=12$, 8 persoane nu citesc nici un ziar; c) $8+10+12=30$ citesc exact un ziar. 3. Notăm cu A, B, C mulţimile de numere naturale $\leq n$ care se divid la 2, 3 şi respectiv 5. Atunci, $n(A)=\left[\frac{n}{2}\right]$, $n(B)=\left[\frac{n}{3}\right]$,

$n(C) = \left[\frac{n}{5}\right]$. Trebuie calculat $n(A \cup B \cup C)$. Pentru $n = 50$, $n(A) = 25$, $n(B) = 16$, $n(C) = 10$, $n(A \cap B) = 8$, $n(A \cap C) = 5$, $n(B \cap C) = 3$, $n(A \cap B \cap C) = 1$ şi deci $n(A \cup B \cup C) = 36$. 4. $n(A) = m$, $n(B) = n$, $n(A \cap B) = p$. Din principiul includerii şi excluderii, rezultă $2p = m + n$ şi cum $0 \leq p \leq n$, $0 \leq p \leq m$, deducem $m = n = p$.

Metoda reducerii la absurd **pag. 76** 1. Prin reducerea la absurd; $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*, (m, n) = 1$. Din egalitate, rezultă $3n^2 = m^2$ şi deci 3 divide pe m. Fie $m = 3m_1$, $m_1 \in \mathbb{N}^*$. Avem: $n^2 = 3m_1^2$, adică 3 divide şi pe n, contradicţie (m, n au fost alese prime între ele)! 3. a) Dacă $b \neq 0$, atunci $\sqrt{3} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, fals. Deci, $b = 0$ şi apoi $a = 0$; b) Conform cu a) se obţine sistemul $2m + n - 1 = 0$, $3m - 2n = 0$; c) $a = -6$, $b = 12$. 4. a) Nu; prin reducere la absurd; b) Da, $a = 1 - \sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2}$ având $a + b = 2 \in \mathbb{Q}$. 5. Fie $d_1 \parallel d_2$ şi $d \cap d_1 = \{A\}$. Dacă, prin absurd, $d \cap d_2 = \emptyset$, adică $d \parallel d_2$, atunci $d \parallel d_1$, fals. 6. Fie $ABCD$ patrulaterul cu $m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 180°$. Dacă prin absurd, patrulaterul nu este inscriptibil, fie cercul care conţine punctele A, D, C şi taie latura $[AB]$ în E. Atunci $m(\widehat{AEC}) + m(\widehat{D}) = 180°$. Dacă $m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{B})$, fals etc. 7. Dacă, prin absurd, oricare două segmente n-au puncte în comun, atunci suma lungimilor acestora ar fi strict mai mică decât 1, fals. 8. Dacă, prin absurd, oricare două arce n-au puncte comune, atunci ele nu pot avea suma lungimilor mai mare decât 2π! 10.* Prin reducere la absurd, presupunem că $\sum \frac{x_1}{y_1} < \sum x_1$. Adunând această relaţie cu cea din ipoteză rezultă $2\sum x_1 > \sum x_1 \left(y_1 + \frac{1}{y_1}\right) \geq 2\sum x_1$, deoarece $y_1 + \frac{1}{y_1} \geq 2$, contradicţie. 11.* Presupunem că cel mai mic dintre cele patru numere este strict mai mare decât $\frac{1}{4}$. Deci $a - b^2 > \frac{1}{4}$, ..., care adunate dau $\sum a - \sum a^2 > 1 \Leftrightarrow 0 > \sum \left(\frac{1}{2} - a\right)^2$, fals.

Metoda inducţiei matematice **pag. 77** 2. 1) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$; 2) $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)$; 3) $(n+1)! - 1$; 4) $(n+1)!(n+1) - 1$; 5) $1 - \frac{1}{(n+1)!}$; 6) $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{4}$; 4. Inducţie matematică; 12) la pasul de inducţie grupăm $x_n + x_{n+1}$ şi folosim $(1 - x_n)(1 - x_{n+1}) \geq 1 - x_n - x_{n+1}$; 5. Inducţie matematică; 6. 1) $n \geq 2$; 2) $0, 1, n \geq 5$; 3) $0, n \geq 5$; 4) $n \geq 3$; 5) $n \geq 4$; 6) $n \geq 4$; 7) $n \geq 7$; 8) $n \geq 4$. 7. Inducţie matematică; 1) $\underbrace{33...3}_{n} = \frac{1}{3}(10^n - 1)$; 2) $\underbrace{77...7}_{n} = \frac{7}{9}(10^n - 1)$. 9. Inducţie matematică. 10. 7. 11. Inducţie matematică; 1) $S_n - 2S_{n-1} + 4S_{n-2} = 0$; 2) $S_n - 4S_{n-1} - 8S_{n-2} = 0$; 12. Inducţie matematică. 13. Inducţie. Presupunem că $f(k) = k$ pentru $k < n$, $n \geq 3$. Dacă n nu este prim, $n = k_1k_2$, atunci $f(n) = f(k_1)f(k_2) = n$. Dacă n este prim, atunci $n + 1$ nu este prim şi $f(n-1) < f(n) < f(n+1) \Rightarrow n - 1 < f(n) < n + 1 \Rightarrow f(n) = n$.

Teste de evaluare **pag. 79**

Testul 1. 1. c); 21 nu este prim. 2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$. 3. Inducţie matematică. 4. Se face o diagramă Venn, cu mulţimile F (cei care joacă fotbal), H (cei care joacă handbal) şi B (cei care joacă baschet). Avem: a) 5; b) 4; c) 2; d) 4; e) 6; f) 11; g) 23; h) 2. 5. O piatră de domino acoperă două pătrăţele din tabla de şah: una albă şi una neagră. Dar din tablă au fost scoase două pătrate de aceeaşi culoare. Deci nu se poate. **Testul 2.** 1. b). 2. $M = \{(2, 3), (3, 1), (1, 5)\}$. 3. Inducţie matematică. 4. Se calculează $n(A \cap B \cap C) = n(A \cup B \cup C) - \sum n(A) + \sum n(A \cap B) = 36 - (18 + 20 + 25) + (9 + 11 + 12) = 5$. 5. $2m + m + 1 + (n-1)(m+2) = mn + 2(m+n) - 1$ părţi. **Testul 3.** 1. Suma de module este egală cu zero, dacă fiecare modul este nul. Deci, $x + y - 2 = 0$, $y - 3 = 0$, cu soluţia $x = -1$, $y = 3$; a) ; 2. $x = 2n - 1 + \frac{6}{2n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n + 1$ divide pe 6, adică $2n + 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$; 4; 3. Inducţie matematică; 4) Dacă a, b, c sunt numerele date, atunci ele se înlocuiesc, după un pas cu $\frac{b+c}{2}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{b+a}{2}$. Să observăm că suma acestor numere este $a + b + c$, adică aceeaşi cu a numerelor date. Această caracteristică (suma celor trei numere = constantă), se numeşte **invariantul** transformării. În cazul nostru, suma numerelor iniţiale este egală cu $2 + 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 4$, iar suma celor finale este egală cu 5. Deci, răspunsul este negativ. 5. Nu pentru că $1 + 2 + \ldots + 21 = 21 \cdot 11 =$ impar, iar în fiecare grupă suma este număr par. **Testul 4.** 1. a) Din $x + y = 4 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 16$ iar din $x^2 + y^2 = 12$ deducem $xy = 2$. Avem $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 40$.

2. a) Din 1), $A \subset \{1,2,4,5\}$, $\{1,2,3\} \subset B$; din 2) $\Rightarrow \{2,5\} \subset A$ şi $B \subset \{1,2,3,4\}$. Din 3) $\Rightarrow 1 \in A$ şi $4 \in B$, iar din a doua $4 \notin A$. 3. b) Demonstraţi egalitatea prin inducţie; pentru precizarea răspunsurilor, particularizaţi pe n; dacă $n = 1$ şi se verifică b) şi c), iar dacă $n = 2$ se verifică a) şi b); deci răspuns comun este b). 4. c); pentru $n = 3$ obţineţi 7 regiuni, adică c); dacă a_n este numărul de regiuni determinat de n drepte, atunci încă o dreaptă mai determină $n+1$ regiuni noi. Deci $a_{n+1} = a_n + n + 1$. Punând aici $n = 1, 2, \ldots, n-1$ şi adunând, rezultă $a_n = 2 + 3 + 4 + \ldots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$. 5. $m = 4$.

2. Funcţii

pag. 91 1. 1) Nu, deoarece $f(0) = -7 \notin \mathbb{N}$; 2) Nu; $f(1) = \frac{2}{5} \notin \mathbb{Z}$; 3) Nu, $f(1) = 3 \notin [1,2]$. 2. $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = \ldots 6$, $2^5 = \ldots 2$; $u(2^1) = 2$, $u(2^2) = 4$, $u(2^3) = 8$, $u(2^4) = 6$, $u(2^5) = 2$; $10 = 4 \cdot 2 + 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow u(10) = u(2) = 4$; $u(n) = (6, n = 4k; 2, n = 4k+1; 4, n = 4k+2; 8, n = 4k+3; k \in \mathbb{N}^8)$; $S = 502 \cdot [u(1) + u(2) +$ $+u(3) + u(4)] = 502 \cdot 20 = 10040$. 4. 2) Se aplică 1) $\Rightarrow S = \frac{100}{101}$. 5. 2) Se aplică 1) $\Rightarrow S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{101 \cdot 102}\right] < \frac{1}{4}$. 6. 1) Da, pentru că $f(-1) = 1 \in B$; $f(1) = 3 \in B$; 2) Nu, pentru că $f(1) = 4 \notin B$; 3) Trebuie ca $f(-1), f(1) \in B \Leftrightarrow (-1+m \in \{1,3,5\}$ şi $1+m \in \{1,3,5\}) \Leftrightarrow (m \in \{2,4,6\}$ şi $m \in \{0,2,4\}) \Rightarrow m \in \{2,4\}$. 7. Se aplică ecuaţiile $x^2 - 1 = 8$ (în $\mathbb{Z}$), $\frac{5x-1}{x+1} = 8$ (în $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$). Găsim $x = \pm 3 \in \mathbb{Z}$ şi respectiv $x = -3 \notin \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$. Deci $\{-3, 3\}$. 8. 1) $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$; 2) $4 - 6 \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$; 3) $4 - x > 0 \Rightarrow x < 4$; 4) $1 - x \geq 0$, $x \geq 0 \Rightarrow x \in [0,1]$; 5) $-x + 3 \geq 0$; $x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow (x \leq 3, x \neq 0, x \neq 2)$; 6) $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq (-\infty, -1) \cup [-1, \infty)$, 7) $x - 1 \geq 0$ şi $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$; 8) $1 - x \geq 0$, $1 + x \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1]$. 9. $f(x) = |x-1| + x + 1 = x - 1 + x + 1 = 2x$. 10. $3+7+11 > 3+5+7$. 11*. $x = y = 0 \Rightarrow f(0) > -1$; $x = 1, y = -1 \Rightarrow f(0) < -1$. 12*. $y = -x \Leftrightarrow |f(0)| > |x|$, $\forall x$; $x = 2f(0) \Rightarrow |f(0)| < 0$. **pag. 93** 2. $f(x) = g(x) \Rightarrow x \in \{1,2\} = A$. 3. $f(x) = g(x) \Rightarrow m = 2$. 4. $f(1) = g(1) \Rightarrow a + b = c + d$; $f(3) = g(3) \Rightarrow 3a + b = 3c + d$; $2a + (a+b) = 2c + (c+d) \Rightarrow 2a = 2c \Rightarrow a = c$, iar din prima relaţie $b = d \Rightarrow f = g$. **pag. 94** 1. Pentru prelungirea g a lui f pe $\mathbb{R}$, trebuie să avem $f(-1) = g(-1) = -1$, $f(3) = g(3) = 7 \Rightarrow a = 2$, $b = 1$. 2 1) $5x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{5}$, $f_1 : \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 5x - 1$; 2) $5x - 1 \geq 4 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow f_2 : [1, \infty)$, $f_2(x) = 5x - 1$. 3. $f_{|\mathbb{Z}}(x) = 1$, $f_{|\mathbb{Q}-\mathbb{Z}}(x) = 2$ $f_{|\mathbb{R}-\mathbb{Q}}(x) = 3$. 4. $x \neq 1$, $g(x) = x + 1 = f(x)$, $h(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-2} = x + 1 = f(x)$. 5. Dacă $x \geq 1$, atunci $|x-1| = x - 1 \Rightarrow g(x) = f(x)$. 6. Se explicitează modulele. Găsim $f_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2 = f(x)$, $x \in [-1,1]$. 7. Se ridică la pătrat, se transformă diferenţele de pătrate în produse. Se face produsul lor. 8*. Se face $x = -\frac{1}{2}$. 9*. Prin reducere la absurd. Se aleg $x, y > 0$ a.î. $x + a \geq 0$, $x + y + b \geq 0$, $y + c \geq 0 \Leftrightarrow a + b + c > 0$. Se aleg $x, y < 0$ a.î. $x + a \leq 0$, $x + y + b \leq 0$, $y + c \leq 0 \Rightarrow a + b + c < 0$. 10*. Unul din intervalele $[0,a]$, $[a,b]$,...,$[d,1]$ are lungimea $\geq 0,2$. Se ia x centrul acestui interval $\Rightarrow |x - a| \geq 0,1$, $|x - b| \geq 0,1$ $l([a,b]) \geq 0,2)$, $|x - c| > 0,1$, $|x - d| > 0,1$.

pag. 98 1. 1) $x_{60} = 197$; $x_{81} = 260$; 2) $x_{21} = -841$; $x_{10} = -190$; 3) $x_2 = \frac{17}{26}$; $x_9 = \frac{21}{32}$; 4) $x_{16} = 3\sqrt{2} - 4$; $x_{18} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$. 2 1) $x_3 = \frac{13}{6}$, $x_4 = \frac{19}{6}$; 2) $x_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$; $x_{16} = 128\sqrt{2}$. 3. a) 1) $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$; 2) $(-1)^n 5$, $n \in \mathbb{N}^*$; 3) $1 + (-1)^n$; 4) $\frac{n}{n+1}$, $n \geq 1$; 5) $\frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$, $n \geq 1$; 6) $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, $n \geq 1$; b) 1) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$; 2) $a_n = n^2 - n + 2$; 3) $a_n = 1 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$; 4) $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$; 5) $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$, $a_n = \frac{1}{n}$; 6) $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$; $a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{(n+1)!}$; 7) $\frac{1}{(n+1)n(n-1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n+1)}\right]$; $x_n = x_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}\right]$. 4. $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $n \geq 2$. $a_1 = \sqrt{2}$. 6. $a_n = 2n$. 7. Se rescrie relaţia sub forma $a_{n+1} - a_n = 2 + a_n - a_{n-1}$, unde notăm $b_n = a_n - a_{n-1}$; relaţia $b_{n+1} = b_n + 2$, conduce la $b_n = 2n - 3$, iar $a_n - a_{n-1} = 2n - 3$ conduce la $a_n = n^2 - 2n + 2$. 9. $b_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$.

pag. 101 1. 1) $0 < x_n < 5$; 2) $|x_n| < 1$; 3) $|x_n| < 2$ 4) $|x_n| < 1$ 5) $0 < x_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)} + n} < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2}$;

6) $\frac{1}{3}=\frac{m}{3n}<x_n<\frac{n}{2n+1}<1$; 7) $0<x_n<\frac{n^2}{n^2+1}<1$; 8) $0<x_n<\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+1}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}<1$; 9) $\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+n^2}<x_n<\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+1}$, $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; 10) $0<x_n<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}<1$; 11) $\sum_{1}^{n}k(k+1)=\sum_{1}^{n}k^2+\sum_{1}^{n}k$; 12) $\left[\sqrt{k(k+1)}\right]=k$; 13) $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$, $0<x_n<\frac{1}{4}$; 14) $0<x_n<1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(n-2)(n-1)n}$; $0<x_n<2$; 15) $\frac{1}{k!}<\frac{1}{(k-1)k}=$ $=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$; $2<x_n<3$; 16) $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{k+1-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$; $0<x_n<1$; 17) $\frac{1}{k!+(k+1)!}=\frac{1}{k!(k+2)}=$ $=\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}$; $0<x_n<\frac{1}{2}$; 18) $1<x_n<\frac{3}{2}$; 19) $0<x_n<1$; 20) $0<x_n<2$; 21) $0<x_n<2$; 22) $0<x_n<9\left(\frac{3}{4}\right)^n\le\frac{27}{4}$; 23) $0<1-\frac{1}{3^k}<1\Rightarrow0<x_n<1$; 24) $0<\frac{2k-1}{2k}<1\Rightarrow0<x_n<1$; 25) $0<x_n=\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}<1$. 2. 1) $x_n<-n$; 2) $x_n>\frac{n}{3}$; 4) $x_n>2^n>n,\forall n\ge3$; 5) $x_n\ge\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$; 6) Se amplifică fiecare fracţie cu expresia conjugată; $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$; $x_n=\sqrt{n+1}-1$. 3. 1) $0<x_n<3$, inducţie; 2) $1<x_n<3$, inducţie; 3) $2<x_n<3$, inducţie. 4. 1) $x_{n+1}^2=x_n^2+\frac{1}{x_n^2}+2>x_n^2+2\Rightarrow x_1^2>x_0^2+2, x_2^2>$ $x_1^2+1,\ldots,x_n^2>x_0^2+2n\Rightarrow x_n^2>2n+4\Rightarrow x_n>\sqrt{2n+4}$. 5. b) Se aplică a) şi rezultă $0<x_n<2-\frac{2}{\sqrt{n+1}}<2$.

pag. 104 1. 1) $(x_n)\nearrow$; 2) $(x_n)\searrow$; 3) $(x_n)\searrow$; 4) $(x_n)\nearrow$; 5) $1^2+2^2+\ldots+n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $(x_n)\nearrow$; 6) $(x_n)\nearrow$; 7) $(x_n)\nearrow$; 8) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$; $(x_n)=\frac{(n+1)(n+2)}{3n^2}$; 9) $(x_n)\nearrow$; 10) $(x_n)\searrow$; 11) $\frac{x_{n+1}}{x_n}=1+\frac{1}{2^{n+1}}>1$; 12) $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2n+1}{2n+2}<1$; 13) $x_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+2}{k}=\frac{n+2}{3n}$; 14) $x_n=\frac{1+2n}{1-2n}$; 15) $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{4n+4}{4n+5}<1$; 16) $x_n=\prod\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$; $x_n=\frac{n+2}{3n}$. 3. 1) $\alpha>0\Leftrightarrow(x_n)\nearrow$; $\alpha<0\Leftrightarrow(x_n)\searrow$; $\alpha=0$, $x_n=\frac{1}{2},\forall n$; 2) $\alpha>0\Leftrightarrow(x_n)\nearrow$; $\alpha=0$, $x_n=0,\forall n$; $\alpha<0\Leftrightarrow(x_n)\searrow$; 3) $(\alpha<0\Leftrightarrow(x_n)\nearrow$; $\alpha=0$, $x_n=0,\forall n$; $\alpha>0\Leftrightarrow(x_n)\searrow$; 4) $\alpha>3\Leftrightarrow(x_n)\searrow$; $\alpha=3$, $x_n=1,\forall n$; $\alpha<3\Leftrightarrow(x_n)\nearrow$; 4. 1) $x_{n+1}-x_n=-x_n^2<0,\forall n$; 2) $(x_n)\nearrow$; 3) $(x_n)\nearrow$; 4) $(x_n)\nearrow$; 5) $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n+1}{n}>1$; 6) $(x_n)\searrow$; 7) $x_2-x_1=\frac{x_1(\alpha-x_1)}{\alpha+x_1}$; $x_1>0\Leftrightarrow(x_n)\searrow$; $x_1=\alpha\Leftrightarrow x_n=\alpha,\forall n$; $x_1<\alpha\Leftrightarrow(x_n)\nearrow$; 8) $x_2-x_1=\frac{\alpha-x_1^2}{2x_1}$; $x_1>\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow(x_n)\searrow$; $x_1=\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow x_n=\sqrt{\alpha},\forall n$; $x_1<\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow(x_n)\nearrow$; 9) $x_1=0<x_1=\sqrt{6}>x_2=\sqrt{6-\sqrt{6}}$, adică şirul nu este monoton.

pag. 117 1. 1) $\{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),\}$; 2) $\{x\}=x-[x]$; $\left\{\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right);\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right);\left(2\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right);\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right);\right.$ $\left.(5,(2);0,(2))\right\}$. 2. $f(2)=3\Rightarrow m=1$. 3. $f(m+1)=m-1\Rightarrow m\in\{-1,2\}\Rightarrow f_1(x)=-x,+4$, $f_2(x)=2x-2$. 4. $f(-1)=2$, $f(2)=5\Rightarrow a=1$, $b=3\Rightarrow f(x)=x+3$; $(-2,1)\in G_f$ deoarece $f(-2)=1$; $(0,5)\notin G_f$, $(3,6)\in G_f$. 5. $-1\le f(x)\le1,\forall x$. 6. Elementul 1 are două imagini $\Rightarrow f$ nu este funcţie. 7. Sistemul $f(-1)=1$, $f(0)=3$, $f(1)=5$ are soluţia $a=0$, $b=2$, $c=3$, fals. 8. Prin reducere la absurd. Punem $x=0$ în relaţie şi apoi $x=1$. Se obţine $f(0)+f(1)=1$, $f(1)+f(0)=2$, adică $1=2$! 9. $f(-1)=2$, $f(2)=6\Rightarrow-a-b+1=2$ şi $4a-6b=6\Rightarrow a=0$, $b=-1$.

pag. 121 1. 1) $y=\operatorname{Im}f$ dacă există $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(x)=y$; $-8\notin\operatorname{Im}f$, $-6=f(-2)\in\operatorname{Im}f$, $15=f(5)\in\operatorname{Im}f$, $53\notin\operatorname{Im}f$; 2) $A=\{-2,-1,0,1,2\}\Rightarrow f(A)=\{-6,-3,0,3,6\}$; 3) $x\in f^{-1}(B)$ dacă $f(x)\in B$; $f(x)=3x=-24\Rightarrow x=-8$; $3x=-9\Rightarrow x=-3$; $3x=18\Rightarrow x=6$; $3x=24\Rightarrow x=8\Rightarrow f^{-1}(B)=\{-8,-3,6.8\}$. 2 1) $\operatorname{Im}f=\{0,1\}$; 2) $f(A_1)=\{1\}$; $f(A_2)=\{0,1\}$; 3) Pentru $k\in\{1,4,9\}$, $\sqrt{k}\in\{1,2,3\}\Rightarrow f(\sqrt{k})=1$; 6. 3. 1) $f(A)=\{2\}$; 2) $f(A)=\{1,2\}$; 3) $f(A)=\{1,2,3\}$; 4) $f^{-1}(\{1\})=\mathbb{Z}$; $f^{-1}(\{2\})=\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$; $f^{-1}(\{3\})=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$; $f^{-1}(\{1,2\})=\mathbb{Q}$, $f^{-1}(\{1,3\})=\mathbb{Z}\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$;

$f^{-1}(\{2,3\}) = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$; $f^{-1}(\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$. 4. 1) Im $f = \{-3,-2,-1,0,1,,2,3\}$; 2) $f^{-1}(\{-3\}) = [-3,-2)$, $f^{-1}(\{-3,-2\}) = [-3,-1)$, $f^{-1}(\{-3,0\}) = [-3,0)$, $f^{-1}(\{-2,1\}) = [-2,-1) \cup [1,2)$; 3) Prima şi a patra pereche. 5. Avem două posibilităţi ($f(0) = -1$ şi $f(3) = 5$), ($f(0) = 5$, $f(3) = -1$), când $f(x) = 2 - x$ şi respectiv $f(x) = -2x + 5$. 6. 1) Ecuaţia $f(x) = -1$ are soluţia $x = 0 \notin (1,\infty)$; 2) $\frac{x+1}{x-1} = y \Rightarrow x = \frac{1+y}{1-y}$, $y \neq 1$; $x > 1 \Rightarrow \frac{1+y}{y-1} > 1 \Rightarrow \frac{2}{1-y} > 0 \Rightarrow y \in (1,\infty) \Rightarrow$ Im $f = (1,\infty)$; 3) $f(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \notin (1,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow x = -3 \notin (1,\infty) = f^{-1}\left(\left\{0, \frac{1}{2}\right\}\right) = \emptyset$; $f^{-1}(\{2,3\}) = \{3,2\}$. 7. ($f(-2) = 2$ şi $f(1) = 5$) sau ($f(-2) = 5$ şi $f(1) = 2$) $\Rightarrow f(x) = x+4$ sau $f(x) = -2x+5$. 8. Im $f = [5,9]$, $g(a) = 5$, $g(b) = 9 \Rightarrow a = 1$, $b = \frac{7}{3}$. 9. $f([-2,5]) = f([-2,0]) \cup f((0,3])$. **pag. 122** 1. 1) $D_f = [-2,2]$; 2) $D_f = [-2,-1] \cup [1,2]$; 3) $D_f = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$. 2. 1) $\mathbb{R}$; 2) $\mathbb{R} - \{1\}$; 3) $\mathbb{R} - \{-1,0\}$; 4) $\mathbb{R} - \{0,2\}$; 5) $(-\infty,2]$; 6) $[0,\infty)$.
3. 1) $\{-7,1,5,13\}$; 2) $\{-1,0,1,2,3,4\}$; 3) $[0,1]$; 4) $[-2,\infty)$; 5) Utilizaţi $f(A \cup B \cup C) = f(A) \cup f(B) \cup f(C)$.
4. $f(x) = |x-2|$; $f(x) = 2 - x$ dacă $x \leq 2$. 5. 1) $D_f = [1,\infty)$, $D_g = [|m|,\infty) \Rightarrow m = \pm 1$; 2) $[1,\infty)$.
6. $f(\mathbb{Z}) = \{0,1,2,\ldots,6\}$, $S = 287(1+2+3+4+5+6) = 6027$. **pag. 123** 1. 1) $(0,-2)$, $\left(\frac{2}{3},0\right)$; 4) $(0,3)$, $G_f \cap Ox = \emptyset$; 9) $|x-1|(1+|x|)$; $(0,1)$, $(1,0)$; 11) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$; $G_f \cap Oy = \emptyset$; 16) $(0,-3)$, $G_f \cap Oy = \emptyset$; 17) $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(3,0)$. 2 1) $a = b = 3$; 2) $a = 1$, $b = 0$. 3. 1) $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,1)$; 2) aceleaşi. 4. 1) $a = \pm 3$; 2) $a \in \{0,2\}$. **pag. 126** 1. 1) $x = 2$; 2) $x = 3$; 3) $x = 2$; 4) $x = 2$; 5) $x = \frac{1}{2}$; 6) $x = 0$. 3. $3a = 3 \Rightarrow a = 1$.
4. Nu pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ are loc relaţia $f(1+x) + f(1-x) = 6$. **pag. 129** pară: 1), 4), 5), 6), 8), 9), 10); restul impare. 2. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(-x) + f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum = 0$, $f(0) = 0 \Rightarrow \prod = 0$.
3. Punem în relaţia dată $(-x)$ în locul lui x şi se scad relaţiile. Rezultă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \Rightarrow f$ pară; $x = 0$ în relaţie dă $f(0) = 0 \Rightarrow \prod = 0$. 4. $-x \to x$ în relaţie şi se adună $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$, $\forall x$, $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. 5. $A'(-a,b)$ este simetricul lui $A(a,b)$ şi în raport cu Oy; $A'(a',b')$ este simetricul lui $A(a,b)$ în raport cu $M(x_0,y_0) \Leftrightarrow \left(x_0 = \frac{a+a'}{2}, y_0 = \frac{b+b'}{2}\right) \Leftrightarrow (a' = 2x_0 - a, b' = 2y_0 - b)$. **pag. 131** 1. $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 26$, $2^5 = 2^4 \cdot 2 = \ldots 2 \Rightarrow f(2) = 2$, $f(4) = 4$, $f(8) = 8$, $f(16) = 6$, $f(32) = 2 \Rightarrow f(4k) = 6$, $f(4k+1) = 2$, $f(4k+2) = 4$, $f(4k+3) = 8$, $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n+4) = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_0 = 4$; $\sum_{k=1}^{100} f(k) = 25(f(1)+f(2)+f(3)+f(4)) =$ $= 25 \cdot 20 = 500$; 2. $f(5k) = 0$, $f(5k+1) = 1$, $f(5k+2) = 2$, $f(5k+3) = 3$, $f(5k+4) = 4$, $T_0 = 5$; $\sum_{k=-100}^{100} f(k) = 40(0+1+2+3+4) = 400$. 3. $x \in \mathbb{Z}$, $T \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + T \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x+T) = f(x) = 1$; $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $T \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + T \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow f(x+T) = f(x) = 2$; $T \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + T \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow f(x+T) = 2 \neq 1 = f(x)$; $T_0 = 1 \in \mathbb{Z}$; $S = 10 + 2 \cdot 90 = 190$; 4. Ca la 3. 5. $T \in \mathbb{Q}^*$ este perioadă ($T \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ nu este! – verificare prin calcul $f(x+T) \neq f(x)$ pentru $x \in \mathbb{Q}$). Cum în $\mathbb{Q}_+^*$ nu există cel mai mic element, nu avem T_0. 6. $T \in \mathbb{Z}$ şi $T_0 = 1$. 7. $\frac{10}{3} = 2 + \frac{4}{3} \Rightarrow f\left(\frac{10}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}+2\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = 4 - 2 = 2$; $-\frac{39}{5} = -7 - \frac{4}{5} = -8 + 1 - \frac{4}{5} = -8 + \frac{1}{5} \Rightarrow$ $f\left(-\frac{39}{5}\right) = f\left(\frac{1}{5} + 2(-4)\right) = f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5} - 2 = -\frac{7}{5}$; $S = 50\,[f(0) + f(1)] = -50$. 8. $\{x+n\} = \{x\}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.
9. 1) $[x] = \left[x + \frac{1}{3}\right] = \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x] = 0$; 2) $f\left(x + \frac{1}{3}\right) = \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] + [x+1] - [3x+1] = f(x)$, deoarece $[x+1] = [x] + 1$, $[3x+1] = [3x] + 1$; 3) $f \equiv 0$. **pag. 145** 2. $2x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(3) = -1$; $2x + 3 = -1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(-1) = 7$; $y = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2} \Rightarrow f(y) = 4 \cdot \frac{y-3}{2} - 1 = 2y - 7$. 3. 1) În relaţia dată se înlocuieşte x cu $1 - x \Rightarrow f(x) - 2f(1-x) = 6x - 7$ şi se rezolvă sistemul de necunoscute $f(x)$, $f(1-x)$; $f(x) = 2x + 3$; 2) $\frac{1}{x} \to x$, $f(x) = \frac{5}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = c \in \mathbb{R}$. 4. $m = -1$. 5. 1) $g([a,b]) = [2a-3, 2b-3] \subseteq$ $\subseteq [-3,2] \Rightarrow (2a - 3 \geq -3, 2b - 3 \leq 2) \Rightarrow \left(a \geq 0, b \leq \frac{5}{2}\right)$; 2) $f([-3,2]) = [-8,7] \subseteq [a,b] \Rightarrow a \leq -8$; $b \geq 7$.

6. $h(x)=x^2$, $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. 7. $a^2x+ab+b=4x+3\Rightarrow(a^2=4, ab+b=3)\Rightarrow(a=-2,b=-3$ sau $a=2,b=1)$. 8. $a=1$, $b=0$. 9. $2g(x)-3=2x^2-4x+1\Rightarrow g(x)=x^2-2x+2$; 10. $g(3x+1)=4x-5$, $y=3x+1\Rightarrow x=\dfrac{y-1}{3}\Rightarrow g(y)=\dfrac{4y-16}{3}$. 11. $f\circ g=f\circ(f\circ f)=(f\circ f)\circ f=g\circ f\Rightarrow 1)$; 2) Se pune $x=1$ în $1)\Rightarrow(f(1)-1)^2=0\Rightarrow f(1)=1$. **pag. 148** 2. 1) $a=-1$, $b=1$; 3) $a=b=2$. 3. $m=-6$. 4. 1) Nu; 2) $f(x)=3x+2$. 5. 1) Da, $f(x)=2-3x$; 2) Nu. 6. 1) 4; 2) $-\dfrac{5}{2}$; 4) nedefinită. 7. $m=\operatorname{tg}\alpha$; 1) 0; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 4) nu există; 5) $m=-\sqrt{3}$. 8. 1) $m=-\sqrt{3}$; 2) $m=2$; 5) $y=-2x+1$, $m=-2$; 6) $m=0$; 7) Nu este definită; 8) $m=-\dfrac{2}{3}$. 9. $\dfrac{2m+1}{3m-1}=3$; $m=\dfrac{4}{7}$. 10. 1); 2); 5). 11. $f(-2)=1=g(-2)$; $a=1$; $b=5$. 12. 1) $1-2m=3m-4$, $4m=2+2m\Rightarrow m=1$; 2) $1-2m=0\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$; 3) $m=1$. 13. 1) $m=1\Rightarrow f(x)=-1$; 2) $m(x+2)-x-y-3=0\Rightarrow x+2=0$, $x+y+3=0\Rightarrow(-2,-1)$. 14. $A(3,0)$, $B(0,4)$ şi $AB=5$, $S=6$, $P=3+4+5=12$. 15. $a\sqrt{3}+b\sqrt{2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow a\sqrt{3}+\sqrt{2}(b-1)=0\Rightarrow a=0$, $b=1\Rightarrow f(x)=1$. 17. $m=\dfrac{1}{2}$, $n=-6$. 18. 1) $y-y_0=m(x-x_0)$, $A(x_0,y_0)\Rightarrow$ a) $y-2=3(x-1)$; 2) a) $A(-2,3)$, $m=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y-3=-\dfrac{1}{2}(x+2)$

Aplicaţii practice. 1. $G_s\cap O_t$: $s=0\Rightarrow t=5h$ (după 5 ore este parcursă distanţa Bucureşti-Blaj); $G_s\cap O_t$: $t=0\Rightarrow s(0)=400$, este distanţa de parcurs la momentul $t=0$. 2. Reperul tOS. $G_S\cap OS: t=0\Rightarrow S(0)=1000$ este suma iniţială din cont. $G_S\cap Ot: S=0\Rightarrow t=20$ de luni (sau retrageri) pentru a goli contul. 3. Reperul xOT; $G_t\cap OT: x=0\Rightarrow T(0)=-6$ este temperatura pe care o are cana în frigider înainte de a fi scoasă; $G_T\cap Ox$: $T=0\Rightarrow x=2$, adică după două minute de la scoaterea cănii din frigider aceasta va avea temperatura 0° C. 4. Reperul $tOh: G_h\cap Oh: t=0\Rightarrow h(0)=2800$ este înălţimea la care se află paraşutistul înaintre de deschiderea paraşutei; $G_h\cap Ot: h=0\Rightarrow t=280s$ este timpul necesar pentru a atinge pământul. 5. Reperul xOy. Este clar că $y\geq 0\Rightarrow x\geq\dfrac{30}{7}$; $G_y\cap Ox: y=0\Rightarrow x=\dfrac{30}{7}\approx 4,2$, înseamnă că la 4,2°C, greierul nu produce sunete; $T(x)=117\Rightarrow x=21$°C. 6. $y-2005=2000(x-15000)$; 7. q =cantitatea, p = preţul/unitate, (q,p): $(100,58),(200,51)$; $p=-\dfrac{7}{100}q+65$. 8. 1) (z,g): $(0,40)$, $(25,675)$, $g-40=\dfrac{127}{5}z$; 2) $z=10\Rightarrow g=294$ gr. 9. 1) $n(a)=132$, $N(a)=172$. **pag. 151** 1. 1), 3) $f\nearrow$; 2), 4) $f\searrow$; 5) $m>2\Rightarrow f\nearrow$; $m<2\Rightarrow f\searrow$; $m=2\Rightarrow f(x)=0$, $\forall x$, funcţie constantă. 2. 1) $2<5\Rightarrow f(2)<f(5)\Rightarrow f\nearrow$; $2<4<5\Rightarrow f(2)<f(4)<f(5)$, $-100<100\Rightarrow f(-100)<f(100)$; 2) $1<4\Rightarrow f(1)=13>f(4)=9\Rightarrow f\searrow$; $1<3<4\Rightarrow f(1)=13>f(3)>f(4)=9$; 3) $f(2)=3\Rightarrow 2=f^{-1}(3)$, $f(5)=9\Rightarrow 5=f^{-1}(9)$; $2<5\Rightarrow f(2)<f(5)=f\nearrow$; $f^{-1}(6)=x$ astfel încât $f(x)=6$; $3<6<9\Leftrightarrow f(2)<f(x)<f(5)\Rightarrow 2<x<5$. 3. 1), 3) $f\nearrow$; 2) $f\searrow$; 4) Nu; $-1<-\dfrac{1}{2}\Rightarrow f(-1)=2=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2!$ 4. $-2\leq x\leq 2\Rightarrow -4\leq 2x\leq 4$, $-2\leq y\leq 2\Rightarrow -6\leq 3y\leq 6\Rightarrow -10\leq 2x+3y\leq 10\Rightarrow -14\leq 2x+3y-4\leq 14$. 5. 1) $f((-2,-1))=\{-1\}$, $f([-1,1))=\{1\}$, $f((-2,-1))=\{-1,1\}$, $\operatorname{Im} f=\{-1,1\}$; 2) Pe $[-2,1]$ $f\searrow\Rightarrow f([-2,1))=(f(1),f(-2)]=(0,3]$; Pe $(1,3]$ $f\nearrow\Rightarrow f((1,3])=(f(1),f(3)]=(1,5]$; $[-2,3]=[-2,1]\cup(1,3]\Rightarrow f([-2,1))\cup(1,3])=f([-2,1])\cup f((1,3])=[0,3]\cup(1,5]=[0,5]$. 6. $f\nearrow$ dacă $m>0$; $f(m)=2m\Rightarrow m^2-2m-3=0$ cu soluţiile $m_1=-1$, $m_2=3$. Reţinem $m=3$.

pag. 153 2. a) 3) Tabelul de semn este

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+1)(x-2)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

deci, $f(x)>0$, dacă $x\in(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$; $f(x)<0$ dacă $x\in(-1,2)$; $f(x)=0$, dacă $x\in\{-1,2\}$.

b) 3) Tabelul de semn este

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$x+2$	$-$	$-$	$-$	-0	$+$	$+$
$\dfrac{1-x}{x+1}$	$-$	$-$	$-\vert$	$+0$	$-$	$-$

Deci, $f(x)<0$, dacă $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; $f(x)>0$ dacă $x\in(-1,1)$; $f(x)=0$, dacă $x=1$.

pag. 159 2. 1) $f(x)=(1,1\leq 2x+1;2x+1,2x+1<1)=(1,0\leq x;2x+1,x>0)$; 2) $f(x)=(-2,-2\geq$

$\geq 1-3x; 1-3x, 1-3x > -2) = (-2, x \geq 1; 1-3x, x < 1)$; 6) $f(x) = (1, 1-3x > 0; 0, 1-3x = 0; -1, 1-3x < 0) =$ $= \left(1, x < \frac{1}{3}; 0, x = \frac{1}{3}; -1, x > \frac{1}{3}\right)$. 3. 1) Se rezolvă inecuaţia în două cazuri: a) $x \leq 2$, când $f(x) = 3x - 2$; $3x - 2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$. Cum $x \leq 2 \Rightarrow x \in S_1 = [1, 2]$; b) $x > 2$, $f(x) = 9 - 4x$; $9 - 4x \geq 1 \Rightarrow x \leq 2$. Dar $x > 2 \Rightarrow x \in S_2 = \emptyset$. În final $x \in S_1 \cup S_2 = [1, 2]$. 4. Se explicitează modulele şi se rezolvă ecuaţia pe intervale. În final se face reuniunea soluţiilor. a) $x \geq 0$, $|x| = x$, $1+x \geq 2x \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow x \in S_1 = [0, 1)$; b) $x < 0$, $|x| = -x$, $1-x \geq 2x \Rightarrow x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x \in S_2 = (-\infty, 0)$. În final $x \in S_1 \cup S_2 = (-\infty, 1]$; 2) $\mathbb{R}$; 3) $(-\infty, 0)$; 4) $(-2, \infty)$; 5) $\mathbb{R}$. 5. 1) $m = -\frac{1}{2}$; 2) $m < -\frac{1}{2}$; 3) $m > -\frac{1}{2}$. 6. 1) $x = -\frac{1}{5}$; 2) $x > -\frac{1}{5}$; 3) $x < -\frac{1}{5}$. 7. 1) $\left[-2, \frac{3}{2}\right)$; 2) $(-3, 6]$; 3) $(3, \infty)$; 4) $(-\infty, -1)$. 8. $f(g(x)) = (f(1-2x), x \leq 1; f(3x), x > 1)$, unde $f(1-2x) = (2(1-2x), 1-2x \geq 0, x \leq 1; 1-(1-2x), 1-2x < 0, x \leq 1) = \left(2-4x, x \leq \frac{1}{2}, x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$. Analog, $f(3x) = (6x, 3x \geq 0, x > 1; 1-3x, 3x < 0, x > 1) = (6x, x > 1)$. 9. $f \nearrow$ pe $(-\infty, 0)$ şi $(0, \infty)$. Ca f să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ trebuie ca pentru $x_1 \leq 0$, $x_2 > 0$ $(x_1 < x_2)$ să avem $f(x_1) < f(x_2)$. Dar $f(x_1) \leq 1$ şi $f(x_2) > 3$. Deci $f \nearrow$ pe $\mathbb{R}$; 2) $f \searrow$; 3) $f(1) = 3 > f(x)$, $x > 1$ şi $f \nearrow$ pe $(-\infty, 1)$ şi $(1, \infty) \Rightarrow f$ nu este monotonă pe $\mathbb{R}$. 10. $f_{|(1,\infty)} \searrow \Rightarrow m < 0$, $f \searrow \Rightarrow m + 2m + 4 \geq -1 + 2 \Rightarrow m \geq -1 \Rightarrow m \in [-1, 0)$. 11. 1) $m + 1 > 0$, $-2m + 3 > 0$, $(m+1)3 + 3 < (-2m+3)3 + 1 - m \Rightarrow m \in \left(-1, -\frac{2}{5}\right)$. 12. $x - 3 = ax + 3 \Rightarrow x = \frac{6}{1-a} \in (-2, 2) \Rightarrow a$. 13. $-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -3 \leq 2x + 1 \leq 3 \Rightarrow f(x) = -3$, dacă $-3 \leq 2x + 1 < -2 \Leftrightarrow -2 \leq x < -\frac{3}{2}$; $f(x) = -2$ dacă $-2 \leq 2x + 1 < -1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x < -1, \ldots$. 6) $f(x) = [2x]$, $\forall x$. 14. 1) $2 \leq x + 1 < 3 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$; 3) $[3x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [3x] = 3x$ şi ecuaţia $3x = x + 2 \Rightarrow x = 1 \in \mathbb{Z}$. 6) $\left[\frac{x-3}{4}\right] = \left[\frac{x-4}{3}\right] =$ $y \Rightarrow \left(y \leq \frac{x-3}{4} < y+1, y \leq \frac{x-4}{3} < y+1\right) \Rightarrow y \in (-3, 4)$, $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-2, -1, \ldots, 3\}$; $y = -2 \Rightarrow$ $\left(-2 \leq \frac{x-3}{4} < 2+1, -2 \leq \frac{x-4}{3} < -2+1\right) \Rightarrow x \in [-2, -1], \ldots, S = [-2, -1) \cup [1, 3) \cup [4, 10) \cup [11, 13) \cup [15, 16)$. 15. $x - 1 > 0$, $x + 1 > 0$, $5 - x > 0$, $x - 1 < x + 1 + 5 - x$, $x + 1 < x - 1 + 5 - x$, $5 - x < x - 1 + x + 1 \Rightarrow x \in$ $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$. **pag. 162** 1. 3) $f(x) > 0, x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$; $f(x) < 0, x \in (-2, 3)$; $f(x) = 0, x = -2$. 2. 1) $(-3, -2)$; 2) $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$; 3) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; 4) $(-1, 0)$. 3. 1) $m > -1$, $f \nearrow$; $m < -1$, $f \searrow$; 2) $m \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, $f \nearrow$; $m \in (0, 2)$, $f \searrow$. 4. 1) $A = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, 0, 4\}$; 2) $B = \{1, 2\}$; 3) $C = \{\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\}$; 4) $D = \{-5, -4, -3\}$. **pag. 164** 1. 1) $f(x) = x$; 2) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x + b$, $b \in \mathbb{R}$; 3) $f_1(x) = 2x + 2$, $f_2(x) = -2x - 6$, 2. $g(x) =$ $= -\frac{3x}{2} + 4$. 3. $g(x) = \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}$. 4. $a = 3$, $b = 1$. 5. $x+1 = y \Rightarrow f(y) = 2(y-1) - 3 + 5f(2) \Rightarrow f(y) = 2y - 5 + 5f(2)$; $y = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow f(y) = 2y - \frac{15}{4}$. 6. $a = 1$, $b = 2$. 7. $g(x) = (2x + 4 + a, x \leq -1; bx + 2b - 3, x > -1)$; $a = 2$, $b = 1$. 8. 1) a) $g(x) = -\frac{x}{3}$; b) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$; c) $g(x) = x - 3$; d) $g(x) = 2 - x$; e) $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$; f) $g(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$; 2) a') $f^{-1}(0) = 0$; $f^{-1}(3) = -1$; b') $f^{-1}(0) = 0$; $f^{-1}(-\sqrt{2}) = -1$; 3) $f^{-1}(5) = 3$; $(f(3))^{-1} = \frac{1}{5}$. 9. $x - 1 \to x \Rightarrow f(x) \leq x - 1$ şi din $x \leq f(x) + 1 \Rightarrow x - 1 \leq f(x)$. Deci $f(x) = x - 1$. **pag. 169** 1. 1) a) $(-1, 1)$; b) $\left(x, \frac{x-4}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$; c) $(2, -3)$; 2) a) $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$; $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; b) $\frac{1}{x-1} = u$, $\frac{1}{y-1} = v$; $(3, 2)$; c) incompatibil; $|x| = 1$, $|y| = -2$!; d) $|x| = u$, $|y| = v$; $(\pm 2, \pm 3)$; e) $[x] = u$, $[y] = v$; $(x, y) \in [-1, 0) \times [2, 3)$; f) incompatibil; $[x] = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $[y] = 2$; g) $\{x\} = u$, $\{y\} = v$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$; h) incompatibil; $\{x\} = -\frac{1}{2} \notin [0, 1)$, $\{y\} = \frac{1}{4}$. 2. $m \neq -\frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2m+1}$, $y = \frac{m-1}{2m+1}$; $x > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{2}$; $y > 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$; $m > 1$. 3. 1) $m \neq \pm 2$,

$x=\frac{2}{m-2}$, $y=\frac{1}{2-m}$; 2) $m=-2$; $\left(x,\frac{x+1}{2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$; 3) $m=2$, $x+2y=1$, $x+2y=-1$, imposibil; 4) $2-m\in\{\pm1\}\Rightarrow m\in\{1,3\}$; $m=1\Rightarrow(1,-2)$; $m=3\Rightarrow(-1,2)$; 5) $\frac{-2}{2-m}\le 1\Rightarrow m\in(-\infty,2)\cup[4,\infty)$; $\frac{1}{2-m}>2\Rightarrow m\in\left(\frac{3}{2},2\right)$. **4.** 1) Punem $-x$ în locul lui x şi avem $f(x)+2f(-x)=-x+3$. Notăm $f(x)=u$, $f(-x)=v$ şi avem sistemul $v+2u=x+3$ (relaţia dată), $u+2v=-x+3\Rightarrow u=x+1$, $v=-x+1\Rightarrow f(x)=x+1$, $\forall x\in 3$; 2) $f(x)=-\frac{x}{3}-4$, $x\in\mathbb{R}$. **pag. 173** **2.** 1) strict descrescător; 2) strict crescător; 3) $x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; $x_{n+1}-x_n<0$, strict descrescător; 4) $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$; strict descrescător; 5) strict crescător. **3.** 1) strict crescător; 2) strict crescător; 3) strict descrescător.

4. 1) Nu; $x_{2k}>1$, $x_{2k+1}<1$; 2) Nu. **5.** 1) $0<x_n\le 1$; 2) $0\le x_n\le 2$; 3) $1\le x_n=1+\frac{1}{n}\le 2$; 4) $0<x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}\le\frac{1}{2}$; 5) $x_n\in[0,2]$; 6) $x_n\in[0,2]$; 7) $x_n=\frac{1}{2n+1}\in(0,1)$. **6.** $x_n=n^2+n+1$. **7.** 1) $u_n=(\sqrt{2})^n$; 2) u_{15}. **8.** 1) $r=\frac{3}{5}$, $a_1=1$; 2) 1) a_{1000}; 2) Nu; 3) a_{500}; **9.** Diferenţa $a_{n+1}-a_n$ nu este constantă; **11.** 1) -41; 2) 2; 3) 3; 4) $a_1=14$, $r=-3$; 5) $a_1=-7$, $r=\frac{3}{4}$; $a_1=5$, $r=\frac{3}{20}$; 6) $a_1=-5$, $r=2$; 7) $a_1=4$, $r=1$; $a_1=6$, $r=-1$; 8) -3; -5; 9) 6; 10) -13; 1. **13.** $\frac{1}{a_1a_2a_3}=\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{a_2a_3}\right)$ etc. **17.** 2) a) Nu; b) b_6; c) b_{10}; **18.** 1) $2(-3)^5$; 2) $\sqrt{2}\cdot 2^9$; 3) 2; 4) 183; 5) $(16;\frac{1}{2})$; $(2;-3)$; 6) $(2;3)$; 7) $(2;3)$; $\left(-162;\frac{1}{3}\right)$; 8) 3; -2.

Funcţii **pag. 176** **4.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $\mathbb{R}-\{-3\}$; 3) $\mathbb{R}-\{\pm2\}$; 4) $[-1,\infty)$; 5) $(3,\infty)$; **5.** 1) $f(-2)=3$, $f(-1)=2$, $f(0)=3$, $f(1)=5$, $f(2)=5$; **6.** 1); 3); 5). **10.** 1) impară; 3) impară; 5) pară; 6) pară.

Funcţia de gradul I. **pag. 179** **4.** 1) $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$; 2) $f(x)=-2x+5$; 3) $f(x)=-2x+11$; 4) $f(x)=5$. **7.** 1) $y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$; 2) $y=-3x$; 3) $y=x+2$; **19.** 1) $\left[-\frac{3}{2},-1\right)\cup(0,1)$; 2) $[-2,-1]\cup(2,3)$; 3) $\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right]\cup\left(1,\frac{3}{2}\right]\cup[4,\infty)$. % **21.** 1) $[4,5)$; 2) $\left[-1,-\frac{1}{2}\right)$; 3) $\emptyset$; 4) -2; 5) 0.

Teste de evaluare **pag. 182** **Testul 1** **1.** **1.** $a=2$, $b=6$, $c=18$ sau $a=18$, $b=6$, $c=2$; **2.** 93; **3.** $a_{3(n+1)}-a_{3n}=a_1+(3n+2)r-[a_1+(3n-1)r]=3r$, unde r este raţia progresiei date. **4.** $a_1=S_1=3$, $r=2$; **5.** b); **6.** b). **7.** $a\in\{4,7\}$; **8.** $f(-2)=1$, $f(3)=6$, $f(x)=x+3$; **9.** $g(x)=3\frac{x+1}{2}$; **10.** $f([1,\infty))=(-\infty,a]$; $a=-2$; **11.** $m=4$; **12.** $f((-\infty,2])=\{f(x)|x\le 2\}=[-4,\infty)$, $f((2,\infty))=(0,\infty)$, $f(\mathbb{R})=f((-\infty,2]\cup(2,\infty))=f((-\infty,2])\cup f((2,\infty)=(-4,\infty)$. **13.** Nu, deoarece $f(1)$, de exemplu, nu este definit. **14.** a) $f(0)=2$, $f(1)=3$; $f(2)=4$; $f(k)=2^k$, $\forall k\ge 3$ (inducţie); b) $k=3$; **15.** a) $x=0$; b) $g(x)=2x-5$; **16.** Prin reducere la absurd. Din $x_1\ne x_2$ şi $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$!. **17.** Prin reducere la absurd; dacă ar fi cel mult doi elevi care îşi serbează aniversarea într-o zi, atunci ar fi cel mult $365\times 2=730$ elevi. **Testul 2** **1.** $r_1=-1$, $a_1=3$; $r_2=1$, $a_1=1$; 3, 2, 1 sau 1, 2, 3; **4.** 3, 7, 11; **6.** d); **7.** $S_{20}=100$. **8** $f(x)=0\Rightarrow a=1$; **9.** Segmentul (AB) este inclus în dreapta AB de ecuaţie $y=ax+b$; $f:(-2,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x-2$; **10.** $f(x)=-x+3$; **11.** $(f\circ f)(x)=x+6$, dacă $x\in\mathbb{Q}$ şi $(f\circ f)(x)=x$, dacă $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$; $f^{-1}(x)=x-3$, dacă $x\in\mathbb{Q}$ şi $f^{-1}(x)=1-x$, dacă $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$; **12.** $m\ge -2$; $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$; $f(\mathbb{R})=(-\infty,1-m]\cup(3,\infty)$; $m=-2$; **13.** $f^{-1}((1,2))=\{x\in\mathbb{R}|1<f(x)<2\}=\left(1,\frac{3}{2}\right)$. **14.** Din $f(1)=a\in\{0,1,2,3\}$ şi $f(3)=3a\le 3$, deducem $a\in\{0,1\}$. **15.** monoton, descrescătoare. **16.** a) $f(1)=3$, $f(2)=5$; b) Se adună $f(0)=1$, $f(1)=f(0)+2$, ..., $f(n)=f(n-1)+2$; $f(n)=2n+1$; **17.** a) $f(x)=2x+4$, $f(x)=-2x-12$; b) Se pune $y=2x+3$ şi din prima inegalitate rezultă $f(y)\le y-3$, $y\in\mathbb{R}$. Notăm $y=2x$ şi din a doua inegalitate, avem $f(y)\ge y-3$. Deci, $f(y)=y-3$. **18.** Cu trei segmente de lungime a, b, c se poate forma un triunghi, dacă $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$. Prin reducere la absurd. Fie $10\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_7\le 100$. Cu x_1,x_2,x_3 nu se poate forma triunghi. Deci, $x_3\ge x_1+x_2\ge 10+10=20$. Analog, $x_4\ge x_2+x_3\ge 10+20=30,\ldots,x_7\ge x_5+x_6\ge 50+80=150$, fals.

3. Funcţia de gradul al doilea

pag. 191 1. 1) Nu există. 2) $f(x) = 2x^2 - 3x - 3$; 3) $f(x) = \frac{13}{6}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{8}{3}$; 4) $f(x) = -x^2 + 5x$; 2. 3) $(-\infty, 0]$, $f \searrow$; $[0, \infty)$, $f \nearrow$; $x_{\min} = 0$, $f_{\min} = 1$; $\mathrm{Im} f = [1, \infty)$; 6) $(-\infty, 3/2]$, $f \nearrow$; $[3/2, \infty)$, $f \searrow$; $x_{\max} = 3/2$, $f_{\max} = 9/4$; $\mathrm{Im} f = (-\infty, 9/4]$. 3. 1) $x_v = -\frac{b}{2a} = 3 \Rightarrow m = 6$; 2) $x_v \geq 3 \Rightarrow m \geq 6$; 3) $x_v \leq 3 \Rightarrow m \leq 6$; 4) $2 \leq x_v \Rightarrow m \geq 4$; 5) $x_v \leq 1 \Rightarrow m \leq 2$; 6) $1 < x_v < 2 \Rightarrow 2 < m < 4$. 4. 1) $(-\infty, 0]$, $f \searrow$; $[-1, 0] \subset (-\infty, 0) \Rightarrow f([-1, 0]) = [f(0), f(-1)] = [-1, 0]$; $A = [-1, 2] = [-1, 0] \cup [0, 2]$ şi $f(A) = f([-1, 0]) \cup f([0, 2])$, unde $[0, 2] \subset [0, \infty)$, unde $f \nearrow \Rightarrow f([0, 2]) = [f(0), f(2)] = [-1, 3] \Rightarrow f(A) = [-1, 0] \cup [-1, 3] = [-1, 3]$; $f^{-1}(\{0\}) = x$ cu $0 = f(x) \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x \in \{\pm 1\} \Rightarrow f^{-1}(\{0\}) = \{\pm 1\}$, $f^{-1}(\{0, 1\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$, unde $f^{-1}(\{1\}) = x$ cu $1 = f(x) \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x \in \{\pm\sqrt{2}\} \Rightarrow f^{-1}(\{0, 1\}) = \{\pm 1, \pm\sqrt{2}\}$. 5. $m = \pm 2$. 6. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $f(x) = x^2 + x - m + 1 \searrow \Rightarrow$ este la fel pe $(-\infty, -1]$; se impune $m < 0$, $x = \frac{1}{2m} = -1$, $f(-1) = -m + 1 \geq m(-1)^2 - (-1) + 1$, $m = -\frac{1}{2}$. 7. a) 1) $m < -\frac{3}{4}$; 2) $m > -\frac{3}{4}$. 8. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. 10. 1) $f(x) = x^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow f_{\min} = -1 \Rightarrow \mathrm{Im} f = [-1, \infty)$; 4) $f(x) = -5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{16}{5} \leq \frac{16}{5} \Rightarrow f_{\max} = \frac{16}{5}$. 11. b) 1) $y = x^2 - 3x$; 2) $y = x^2 - x - 1$; 3) $x^2 - 3x = y$; 4) $2x^2 - x = y$. 13. $b^2 = -ac$, $\Delta = 5b^2 > 0$ şi $P = \frac{c}{a}$ (produsul rădăcinilor); $ac = -b^2 < 0$. 14. Prin reducere la absurd. Presupuem că $\Delta_1 = a^2 - 4b < 0$ şi $\Delta_2 = b^2 - 4a < 0 \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 = a(a-4) + b(b-4) > 0$, fals. 15. $m = 2$, $n = -1$. 16. $f_{\max} = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$. 17. $a_n =$ numărul maxim de regiuni pe care le determină n tăieturi; $a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$. 18. $f(k) = f(2008 - k)$, $k = \overline{0, 2008}$. 19*. $f(x) = \sum x^2 - xyz - 2 \leq \max(f(0), f(1))$; „=" dacă $x = y = 1$, $z = 0$; $x = z = 1$, $y = 0$, $y = z = 1$, $x = 0$. 20. $f(x) = (x^2+3x)(x^2+3x+2)$, $z = x^2+3x$, $g(z) = z(z+2) = (z+1)^2 - 1 \geq -1$; $g(z) = -1 \Leftrightarrow z = -1 \Leftrightarrow x^2 + 3x = -1$.

pag. 201 1. a) 1) – 2) $x = 0$; 3) $x = \frac{2}{3}$; 4) $x = \frac{5}{2}$; b) 1) $x = 1$; 2) $x = \frac{5}{2}$. 2. Se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0$ şi se calculează $f(0)$; 1) $G_f \cap Ox = \{(-3, 0), (3, 0)\}$, $G_f \cap Oy = \{(0, -9)\}$; 2) $f(x) = 0 \Rightarrow x \in \emptyset \Rightarrow G_f \cap Ox = \emptyset$, $G_f \cap Oy = \{(0, 1)\}$. 3. Pentru $f(A)$ se scrie A ca reuniune dacă $x_V \in A$ şi se aplică $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ plus monotonia lui f pentru calculul lui $f(X)$, $f(Y)$; 1) $x_V = 0 \in A \Rightarrow A = (-3, 0] \cup (0, 5)$; $f((-3, 0]) = [0, 9)$, $f((0, 5]) = (0, 25] \Rightarrow f(A) = [0, 9) \cup (0, 25] = [0, 25]$. Pentru determinarea lui $f^{-1}(B)$ ducem dreptele paralele cu Ox, $y = 1$, $y = 4$. Acestea intersectează parabola în punctele de abscise obţinute rezolvând ecuaţiile $x^2 = 1$, $x^2 = 4$, adică $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Se proiectează pe Ox arcele de parabolă cuprinse între cele două drepte şi obţinem $x \in [-2, -1]$, $x \in [1, 2]$. Deci $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$. 5. 1) $x_V = \frac{1}{m} - 1$, $y_V = 1 - \frac{1}{m} \Rightarrow x_V + y_V = 0$; 2) $m(x^2 + 2x + 1) - 2x - 1 = 0$, $\forall m \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$, $2x + 1 = 0 \Rightarrow A(-1, 1)$; 3) a) $y_V < 0 \Rightarrow \frac{m-1}{m} < 0 \Rightarrow m \in (0, 1)$; b) $\frac{m-1}{m} = 3 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$; c) $\frac{m-1}{m} > -1 \Rightarrow m > 0$; d) $2(1/m - 1) + 3(1 - 1/m) - 5 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$; 4) $x_V = \frac{1}{m} - 1 \Rightarrow m = \frac{1}{x_V + 1} < 0 \Rightarrow x_V < -1$. Deci $x + y = 0$ cu $x < -1$. 6. 1) $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, $a + b + c = 0$, $c = 1$; 2) $f(3) = 1$, $f(4) = 4$, $-\frac{b}{2a} = 2$; $f(x) = x^2 - 4x + 4$; 3) $f(0) = -1$, $f(3) = -1$ şi ecuaţia $ax^2 + bx + c - 2 = 0$ are rădăcină dublă $\Leftrightarrow b^2 - 4a(c-2) = 0$; 4) $f(4) = 5$, $-\frac{b}{2a} = 2$, $-\frac{\Delta}{4a} = 3$; 5) $x = -2 \Rightarrow y = 2x - 12 = -16 \Rightarrow (-2, -16) \in G_f \Leftrightarrow f(-2) = -16$ şi $x = 4 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow (4, -4) \in G_f \Leftrightarrow f(4) = -4$. **pag. 205** 3. Fie $A = \{x_1, x_2\}$, $B = \{x_3, x_4\}$. Avem $x_1 + x_2 = 6 = 1 + 5 = 2 + 4$. Dacă $A = \{1, 5\}$, atunci $B = \{2, 4\} \Rightarrow a = 5$, $b = -(2 + 4) = -6$, $c = 2 \cdot 4 = 8$; dacă $A = \{2, 4\}$, atunci $B = \{1, 5\} \Rightarrow a = 8$, $b = -6$, $c = 5$. 4. 1) a) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $m = -\frac{13}{16}$; b) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $m = -3$; c) $m = 3$; d) $m = -2$; e) $m < -1$; f) $m = 2$; 2) a) $\Delta = 0 \Rightarrow m = -1$; b) $m \in \{-2, 1\}$. 5. 1) $S = 2(P + 1)$; 2) $S = 3(P + 1)$; 3) $\frac{1}{S+1} = m$, $P - 3 = \frac{4}{m+1} \Rightarrow \frac{4}{P-3} = \frac{1}{S+1} + 1$. 6. 7) Se aduce la acelaşi numitor. 8) $7x_1^2 - 3x_1 + 2 = (x_1 + 3) - 3x_1 + 2 = 5 - x_1$; $\frac{5 - x_1}{5 - x_2} + \frac{5 - x_2}{5 - x_1}$ şi se continuă ca la 7). 7. 1) Se ridică la pătrat,

plus relaţiile lui Viète; 2) din 1) $\Rightarrow (x_1-1)^2 \le 4$, $(x_2-1)^2 \le 4 \Rightarrow (-2 \le x_1-1 \le 2$ şi $-2 \le x_2-1 \le 2)$. 8. $\min(x_1^2+x_2^2) = \min(m^2-6m+1) = -8$ pentru $m=3$. 9. 1) $\Delta = 9m^2-4m+2 = 9\left(m+\frac{2}{9}\right)^2+\frac{14}{9} > 0$; 2) $x_1+2<0$, $x_2+2>0 \Rightarrow (x_1+2)(x_2+2)<0 \Rightarrow x_1x_2+2(x_1+x_2)+4<0 \Rightarrow m \in \left(1,\frac{15}{4}\right)$. 11. 1) Din $y=2x \Rightarrow x=\frac{y}{2}$ care se înlocuieşte în ecuaţia în x. **pag. 209** 5. 1) $f(x) = (1, x^2-4>0; 0, x^2-4=0; -1, x^2-4<0) = (1, x \in (-\infty,-2)\cup(2,\infty); 0, x=\pm 2; -1, x \in (-2,2))$. 6. a) $f(x) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \le 0 \Leftrightarrow m^2-16 \le 0 \Rightarrow m \in [-4,4]$. 7. $t = \frac{a}{b}+\frac{a}{b} \Rightarrow t^2-3t+3>0$, $\forall t$. 8. $E(x,y) = (x-y+3)^2+5(y-1)^2+4 \ge 4$; „=" dacă $x-y+3=0$, $y=1 \Rightarrow x=-2$, $y=1$; altfel, luaţi ca funcţie de gradul doi în x. 9. 1) $(x-1)^2+(y+1)^2+m-2>0 \Rightarrow m>2$; altfel $x^2-2x+y^2+4y+m+1>0$, $(\forall x)$, $(\forall y) \Rightarrow \Delta_x<0, \forall y \Rightarrow y^2+4y+m+3>0, \forall y \Rightarrow \Delta_y<0 \Rightarrow 4-m-2<0 \Rightarrow m>2$. 10. 1) $\Rightarrow$ Ecuaţia are rădăcini reale distincte $\Rightarrow \Delta_f>0 \Rightarrow$ 2). 11. 1) $f_{\min} = \frac{\left(\sum a_i\right)^2 - n\left(\sum a_i^2\right)}{n}$; 2) $f(x) \ge 0$, $\forall x \Rightarrow \Delta \le 0 \Rightarrow$ ineg. 12. 1) Sumă de pătrate; 2) $f(x) = \left(\sum a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum a_ib_i\right)x + \sum b_i^2$; $f_{\min} = -\frac{\left(\sum a_ib_i\right)^2 - \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)}{\sum a_i^2}$; 3) $f(x) \ge 0 \Rightarrow f_{min} \le 0 \Rightarrow$ inegalitatea C-B-S; avem egalitate dacă $a_1x-b_1 = a_2x-b_2 = \ldots = 0$. **Aplicaţii.** 1) Se ia funcţia $f(x) = a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc$ cu $\Delta_a = -3(b-c)^2 \le 0$; 2) Coeficientul lui x^2 este $a_1^2-a_2^2-\ldots-a_n^2>0$ şi din $f\left(\frac{b_1}{a}\right)<0 \Rightarrow$ ecuaţia $f(x)=0$ are rădăcini reale $\Rightarrow \Delta_f \ge 0 \Rightarrow$ inegalitatea lui Aczél. **pag 212** 5. $\Delta_1 \ge 0 \Rightarrow m \in (-\infty,-2]\cup[2,\infty)$; $\Delta_2 \ge 0 \Rightarrow m \in [-1,1]$. 6. a) f este definită pe $\mathbb{R}$, dacă numitorul nu se anulează pe $\mathbb{R} \Rightarrow \Delta_1<0 \Rightarrow m \in (-2,2) \Rightarrow x^2+mx+1>0$, $x \in \mathbb{R}$, $f(x)>0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2-mx+m+2>0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_2<0 \Rightarrow m \in (2-2\sqrt{3},-2+2\sqrt{3})$, $m \in (-2,-2+2\sqrt{3})$. 8. $a^2+(1-x)a+1-x=0$, are rădăcini reale dacă $\Delta_a \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-3]\cup[1,\infty)$. 9. Valoarea fiecărei funcţii este ≥ 5. 10. c) 1) $y=x^2-2$; $y+\frac{2}{y}>3 \Rightarrow y \in (0,1)\cup(2,\infty) \Rightarrow 0<x^2-2<1$ sau $x^2-2>2$ şi se face reuniunea soluţiilor; 2) $y=x-x^2$; $\frac{y^2-4y}{y+2}<0 \Rightarrow y \in (-\infty,-2)\cup(0,4)$. 11. 1) $m-1>0$, $-1 \le x_V = \frac{m}{2(m-1)}$; 2) $m-1<0$; $-1 \le x_V$; 3) $m-1>0$, $x_V \le 2$; 4) $m-1<0$, $x_V \le 2$; 5) $(m-1>0, x_V \le 1)$ sau $(m-1<0, 2 \le x_V)$, apoi se face reuniunea soluţiilor. 12. a) $m-1>0$, $\Delta \le 0$; 13. $1<x_V<2$. 14. 1) $m>0$, $-\frac{\Delta}{4a}<0$; 2) $m>0$, $-\frac{\Delta}{4a}>0$; 3) $m<0$, $-\frac{\Delta}{4a}<0$; 4) $m<0$, $-\frac{\Delta}{4a}>0$. 15. 1) $-2 \le x^2-2x<3$; 2) $2 \le x^2-4x+5<3$. **pag. 215** 3. $\mathrm{Im}f = \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$; $n=2$. 4. $m=-1$. 5. $[-4,0]$ 6. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 7. a) 1) $0 \le \frac{x}{x^2-x+1}<1 \Leftrightarrow (0 \le x, (x-1)^2>0)$; b) $x^2-3x=y$. 8*. $\frac{x^2+ax+b}{x^2+1} = y \Rightarrow (1-y)x^2+ax+b-y=0 \Rightarrow \Delta_x \ge 0 \Rightarrow -4y^2+4(1+b)y+a^2-4b \ge 0 \Rightarrow y \in [y_1,y_2]$, unde $y_1+y_2 = \frac{b+1}{2} = 0 \Rightarrow b=-1$ şi $y_1y_2 = \frac{a^2-4b}{-4} = -4 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$. **pag. 221** 1. 1) $S=3$, $P=0 \Rightarrow x_1=0$, $x_2=3$. 2. 1) $\Delta = -4m+5$, $S=1$, $P=m-1$; $m_1=1$; $m_2=\frac{5}{4}$ şi se face tabelul de discuţie. 3. $\Delta = (m-2)^2 \ge 0 \Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale, $\forall m \in \mathbb{R}$; $P=m-1$; a) $\Delta=0 \Rightarrow m=2$; b) $S=0$, $P<0 \Rightarrow (m=0, m-1<0) \Rightarrow m=0$; c) $(S>0, P>0) \Rightarrow (m>0, m-1>0) \Rightarrow m>1$; d) $P<0 \Rightarrow m<1$; e) $m \in \emptyset$. 4. 1) $y=x-3 \Rightarrow x=y+3 \Rightarrow (y+3)^2-4(y+3)+m=0 \Rightarrow y^2+2y+m-3=0$; a) $y_1,y_2 \le 0 \Rightarrow \Delta = 4-m \ge 0$; $S=-2<0$, $P=m-3 \ge 0 \Rightarrow m \in [3,4]$. 5. 1) Avem două cazuri: a) $\Delta<0 \Rightarrow m \in M_1$; b) $\Delta \ge 0$, $x_1x_2 \le 1 \Rightarrow m \in M_2$; $m \in M_1 \cup M_2$. 6. 1) $\mathrm{card}(A)=0$ dacă $(\Delta<0$ sau $\Delta \ge 0$, $x_1,x_2 \le 1) \Rightarrow m \in [-2,2)$; $\mathrm{card}(A)=1$ dacă $(\Delta=0$ sau $x_1=x_2>1$ sau $\Delta>0$, $x_1<1<x_2)$; $\mathrm{card}(A)=2$ dacă $(\Delta>0, x_1,x_2>1$. 8. 1) a) $[3,4]$; 2) a) $\left(-2,-\frac{7}{4}\right)$. 10. $f(0)f(1)<0$. 11. $\Delta>0$, $0<x_1, x_2<1$. 12. $m \in \{0,2\}$.

13. $m \in \{\pm 3\}$. 14. $a = 10$, $b = -15$. **pag. 231** 6. **I.** 1) $(0,-1),(3,2)$; 2) $(2,3)$; 3) $\emptyset$; 4) $(0,1),(4,5)$; 5) $(3,5)$; 6) $\emptyset$; 7. 1) $(1,3),(3,1)$; 2) $(5,-2),(-2,5)$; 3) $(5,4),(4,5)$; 8. 1) $\left(\alpha, -\frac{3\alpha}{2}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; 2) $(0,0)$; 3) $(0,0)$; 4) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$;

Teste de evaluare. **pag. 232**

Testul 1. 1. a) $G_f \cap Ox = \{(1,0),(3,0)\}$, $G \cap Oy = \{(0,3)\}$, $V(2,-1)$(minim), $x = 2$, $(-\infty, 2], [2, \infty)$. Observăm că $g(x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că graficul lui g se obţine din graficul lui f prin simetrizarea în raport cu axa Ox; b) Al doilea punct de intersecţie va fi simetricul lui A faţă de $x = 1$, axa de simetrie a celor două parabole. Deci, $B(-1,4)$; 2. a) $x_{\min} = 2$ şi $f_{\min} = f(2) = -1$. $m = -1$; b) $n = 2$; 3. a) Se ordonează după puterile descrescătoare ale lui x, $\Delta_x \le 0 \Rightarrow -y^2 - 6y + 4 - m \le 0$, $\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_y \le 0 \Rightarrow m \ge 13$; b) Domeniul lui f_m este $\mathbb{R}$, deci $x^2 + mx + 1 \ne 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$. De aici, $x^2 + mx + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se impune $(m-1)x^2 + 2mx + m + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Trebuie ca $\Delta_1 < 0$ şi $m - 2 > 0$; $m \in \emptyset$; c) $y \in \left[-3, \frac{7}{3}\right]$, $f_{\min} = -3$, $f_{\max} = \frac{7}{3}$; 4. a) $\Delta > 0$, $mf(1) \ge 0$, $mf(0) \ge 0$, $-\frac{b}{2a} = \frac{m^2 - m + 1}{2m} \in (0,1)$, $m \ne 0$; $m \in [1,2]$; b) $x_1 f(x_2 - m) + x_2 f(x_1 - m) = x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 2mx_1 x_2 + (m-4)(x_1 + x_2) = -4m(m-4) \ge 0$; $[0,4]$; a). 5. a) Sistem simetric; (1,2), (2,1), $(-1,-2)$, $(-2,-1)$; b) Dacă sistemul are soluţia (x,y,z), atunci are şi soluţia (z,y,x). Deci $x = y$. Avem sistemul $x - y = a$, $3x^2 + 6xy = 3a - 4$; $a \in \{1, -4\}$. **Testul 2.** 1. a) $G_f \cap Ox = \{(1,0),(3,0)\}$, $G_f \cap Oy = \{(0,3)\}, x = 2, (-\infty, 2] \cup [2, \infty)$. Cum $g(-x) = f(x)$, deducem că graficele celor două funcţii sunt simetrice în raport cu Oy; b) Punctele A, A' fiind simetrice în raport cu $x = 2$, atunci $m = -2$; 2. a) $m = 4$; b) $n = 2$; c) Regiunea delimitată se poate acoperi cu pătratul de latură 4, de arie 16. Deci, $S < 16$. Pe de altă parte, se duc paralele la Oy prin (1,0), (2,0), (3,0), (4,0) care taie arcul de parabolă. Se unesc succesiv aceste puncte. Se formează două triunghiuri şi două trapeze congruente. Deci $S > 2\left(\frac{3}{2} + \frac{3+4}{2}\right) = 10$; 3. a) $(1,-2)$, $(2,-1)$; b) $f(1) = -2$, $f(2) = -1 \Rightarrow a = 2$, $b = -5$; c) $y = |x| \ge 0$, $f(y) \ge 0$, $\forall y \ge 0$; b); 4. a), d); b), c); c), a); 5. a) $a \in \{1,3\}$; $a = 1$ sistemul are soluţia (1,1), care sunt coordonatele punctului de tangenţă ale dreptei la parabolă; b) $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$.

GEOMETRIE

1. Vectori în plan

pag. 243 1. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ şi se adună. 2. $ABCDEF$ hexagon, (M,N), (P,Q), (R,S) mijloacele perechilor $([AB],[AD])$, $([BC],[FE])$ şi respectiv $([CD],[FA])$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EN} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}$ şi analoagele $2\overrightarrow{QP}$, $2\overrightarrow{RS} \Rightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{0}$. 3. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$, care se adună; $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}$, care se adună. 4. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$ şi anloagele. **pag. 249** 1. $(-1,1)$; $(-5,0)$; $(-20,1)$. 2. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) + \beta(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0} \Rightarrow (\alpha + \beta)\vec{a} + (\alpha - \beta)\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow (\alpha + \beta = 0, \alpha - \beta = 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$. 4. $\vec{v_1} = -\vec{b}$, $\vec{v_2} = -7\vec{b} \Rightarrow \vec{v_2} = 7\vec{v_1}$. 5. $\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} = \vec{0} \Rightarrow (2\alpha + 3\beta)\vec{a} + (-3\alpha - 4\beta)\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow 2\alpha + 3\beta = 0 = -3\alpha - 4\beta \Rightarrow \alpha = \beta = 0$. 6. 1) a) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{AN}(2,1)$; $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(-2\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{CN}) = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CN}$; $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{CN}$; $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = -2\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{CN}$; b) $\overrightarrow{AB}(0,2)$, $\overrightarrow{BC}(2,-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = (0,2) + 2(2,-2) = (4,-2)$; $\overrightarrow{AC}(2,0)$, $\overrightarrow{CB}(-2,2)$; $(8,-2)$; 2) a) $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(4\overrightarrow{CP} - 3\overrightarrow{BN}) = 2\overrightarrow{CP} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BN}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = -4\overrightarrow{CP} - 3\overrightarrow{BN}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}}{1+2}$ (rezultă din $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN})$) $= \frac{1}{3}[-4\overrightarrow{CP} + 2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})]$; b) $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}(-4\overrightarrow{PC} + 3\overrightarrow{NB}) = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$. 7. 1) 1°) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$;

$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

pag. 251 1. $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OD} = -3\vec{i}$, $\overrightarrow{OE} = 5\vec{j}$, $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{BD} = -\vec{i} - 3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = -3\vec{i} - 7\vec{j}$, $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{OD}| = 3$, $|\overrightarrow{OE}| = 5$. 2. 1) $\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{AA_2} \Rightarrow (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j} \Rightarrow (x - x_1 = x_2 - x$ şi $y - y_1 = y_2 - y)$; 2)$M(3,2)$ este mijlocul lui $[AB]$, $N(4,5)$, $P(2,4)$; 3) $AB = BC = 2\sqrt{5}$, $AC = 2\sqrt{10}$; 4) $A(x_1y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3) \Rightarrow 2 = \frac{x_1+x_2}{2}$, $-1 = \frac{y_1+y_2}{2}$, $-1 = \frac{x_2+x_3}{2}$, $4 = \frac{y_2+y_3}{2}$, $-2 = \frac{x_1+x_3}{2}$, $2 = \frac{y_1+y_3}{2} \Rightarrow A(1,-3)$, $B(3,1)$, $C(-5,7)$. 3. Mijlocul diagonalei $[AC]$ este $O_1(-1,3) \Rightarrow O_1$ mijlocul lui $[BD]$, $D(x,y) \Rightarrow -1 = \frac{x+2}{2}$, $3 = \frac{y}{2} \Rightarrow D(-4,6)$. 5. 1) $B(x,y)$, $\overrightarrow{AB} = (x-1)\vec{i} + (y+2)\vec{j} = 3\vec{i} + 5\vec{j} \Rightarrow (x - 1 = 3,\ y + 2 = 5 \Rightarrow B(4,3)$; 2) $A(x,y)$, $\overrightarrow{AB} = (-2 - x)\vec{i} + (3 - y)\vec{j} = 3\vec{i} + 5\vec{j} \Rightarrow (-2 - x = 3,\ 3 - y = 5) \Rightarrow A(-5,-2)$. 6. $\vec{i} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$, $\vec{j} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$. 7. 1) $(x - 1, y) = 2(2,-1) \Rightarrow x = 5,\ y = -2$. 8. 1) $(-1 - x, y - 1) = (2, 3 - y) \Rightarrow x = -3,\ y = 2$. 9. 2) $|\vec{a}| = \sqrt{m^2 + 9} = 10 \Rightarrow m = \pm\sqrt{91}$; $|\vec{b}| = \sqrt{4 + n^2} = 3 \Rightarrow n = \pm\sqrt{5}$. 10. 1) $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$; altfel: $m_{AB} = m_{CD} = \frac{1}{2}$. 12. $m_{AB} = m_{CD} = 1$, $m_{BC} = m_{AD} = -1$. 13. $m_{AB} = m_{CD}$, $m_{AD} = m_{BC} \Rightarrow ABCD$ este paralelogram; $m_{AD} = m_{BC}$, $m_{BD} = m_{AC} \Rightarrow ADBC$ este paralelogram. 14. Paralelogram cu diagonale egale. 15. 1) $C(x,0)$, $AC = BC \Rightarrow x = 7$;$C'(0,y)$, $AC = BC \Rightarrow y = 7$; 2) $C(x,y)$, $AB = BC = AC \Rightarrow$ două soluţii. 17*. Prin reducere la absurd. Fie a lungimea laturii. Avem $\left(\sum x_1\right)\vec{i} + \left(\sum y_1\right)\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \sum x_1 = \sum y_1 = 0$, (1). În plus $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = a \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = a^2$, (2). Se ridică (1) la pătrat şi se adună cele două relaţii, via (2), rezultă $3a^2 = -2\sum_{i\neq j}(x_ix_j + y_iy_j) \Rightarrow a^2$ par (presupunem că a este cea mai mică latură posibilă) $\Rightarrow a^2 \vdots 4$) sau ($a^2 \vdots 2$) $\Rightarrow (x_i, y_i$ pare) sau (x_i, y_i impare din $x_i^2 + y_i^2 = a^2$) $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right)$ determină triunghi echilateral cu latură $< a$, fals) sau ($\sum_{i\neq j}(x_ix_j + y_iy_j) \vdots 2 \Rightarrow a^2 \vdots 4$, fals). Altfel, utilizând panta dreptei şi formula pentru tangenta unghiului a două drepte!

Adunarea vectorilor **pag. 258** 2. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; se construiesc paralelogramele $BMNQ$, $NPCR$; $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NR} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MP}$; 3. $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{DD'}$; $6\sqrt{2}$.

Înmulţirea unui vector cu un scalar **pag. 258** 1. 1) Paralelogramul $ABA'C$ dă $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AM}$; 2) Se utilizează 1); 2. 2) Se aplică regula poligonului şi fiecare membru este egal cu $\overrightarrow{AB}$.; 5. Regula poligonului; $\overrightarrow{MB}$; 6. Se scrie vectorii $\overrightarrow{MP}$ şi $\overrightarrow{MN}$ în funcţie de $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$; 7. Linii mijlocii; pentru soluţia vectorială $XYZU$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MZ} = \overrightarrow{MY} + \overrightarrow{MU}$, $\forall M$; 10. Aplicaţi regula poligonului; 11. Arătaţi că $2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$!

Descompunerea unui vector după două direcţii date **pag. 259** 1. $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 2. Formula pentru punctul care împarte un segment într-un raport dat, $3\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{QM} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MP} = \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{NQ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{15}\overrightarrow{BC}$; 4. $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} - m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN} = (n - m)\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD}$.

Coliniaritatea a doi vectori. Paralelismul a două drepte **pag. 259** 1. $\frac{AO}{AD} = k$, $\overrightarrow{EO} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{4k}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $k = \frac{1}{2}$; 2. 2) $\overrightarrow{NP} = 3\overrightarrow{MN}$; 3. $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; 4. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$; 5. Fie $QS \| AB$, $S \in |BC|$, $QT \| AC$, $T \in [BC]$, $2\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC}$; fie

$[AD] \equiv [MB]$, $D \in [AB]$ şi $[AE] \equiv [NC]$; $E \in [AC] \Rightarrow \overline{AF} = \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{MB} + \overline{NC} = 2\overline{QR}$;
7. $\overline{BN} = \frac{8}{15}\overline{BM} + \frac{7}{15}\overline{BP}$, $\frac{8}{15} + \frac{7}{15} = 1$; **8.** $\overline{MN} = \frac{1}{4}\overline{MD}$; **9.** $\overline{CF} = -2\overline{CE}$; **10.** Fie O un punct în plan, atunci $\overline{SQ} = \overline{OQ} - \overline{OS} = \frac{1}{4}\overline{QD}$.

Teste de evaluare pag. 260

Testul 1. **1.** $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AN}$, $\overline{MP} = \overline{MB} + \overline{BP}$; **2.** $\overline{MO} = \frac{1}{2}(\overline{MA} + \overline{MC})$; **3.** Fie Q, $\overline{GM} + \overline{GN} = \overline{GQ} \Rightarrow \overline{O} = \overline{GQ} + \overline{GP} \Rightarrow G, P, Q$ coliniare; $MGNQ$ romb; **4.** Se duc prin P paralele la laturi şi se formează triunghiuri echilaterale. **Testul 2.** **1.** $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN}$, $\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN}$ şi se adună; **2.** $\overline{BE} = -\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD}$; $\overline{RS} = -\frac{2}{3}\overline{BE}$; **3.** $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.

2. Coliniaritate, concurenţă, paralelism. Calcul vectorial în geometria plană

Vectorul de poziţie. pag. 275 **1.** $\vec{r}_M = \frac{1}{4}\vec{r}_A + \frac{3}{4}\vec{r}_B$, $\vec{r}_P = \frac{4}{3}\vec{r}_A - \frac{1}{3}\vec{r}_B$. **2.** $\vec{r}_M = \frac{5}{6}\vec{r}_A + \frac{1}{6}\vec{r}_B$. **3.** $\frac{29}{42}\vec{r}_A + \frac{13}{42}\vec{r}_D$.
6. $\vec{r}_N = \frac{3}{5}\vec{r}_A + \frac{2}{5}\vec{r}_B$; $\vec{r}_N = \frac{5}{7}\vec{r}_A + \frac{2}{7}\vec{r}_C$; $\frac{21}{10}$, $\frac{175}{42}$. **8.** Polul se ia A. **13.** $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\ldots \overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OA} = \ldots \Rightarrow 3\overrightarrow{OG_1} = 3\overrightarrow{OG_2} = \ldots \Rightarrow G_1 = G_2 = \ldots$; **14.** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} \Rightarrow \sum \overrightarrow{MN} = 2\sum \overrightarrow{MA} \Rightarrow 3\overrightarrow{MG'} = 6\overrightarrow{MG}$; **15.** $\sum \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IH} \Leftrightarrow \sum(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OH} \Leftrightarrow I = O$; **16.** $\sum \overrightarrow{IA} = \sum(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA}) = 3\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OH} = 3(\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HO}) + \overrightarrow{OH}$;
17. $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OH_2}$, $\overrightarrow{OH_3}$, $\overrightarrow{OH_4} \Rightarrow \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{OH_4} - \overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{A_3A_2}$.
18. $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} \Leftrightarrow OH_2 - OH_1 \Rightarrow 1)$; $1) \Rightarrow \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{H_1H_2}$ şi cum $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{H_1H_2} \Rightarrow 2)$. **19.** $\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{OH} \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IO} = \vec{0}$,
20. $(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{OI}$. **22.** $\sum(b+c)\overrightarrow{OA} = \vec{0} \Leftrightarrow (a+b+c)\sum \overrightarrow{OA} = \sum a\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \frac{1}{a+b+c}\sum a\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \vec{0}$.

Probleme de coliniaritate. pag. 276 **1.** Pentru $CC'B$ şi punctele A, E, D aplicaţi reciproca teoremei lui Menelaos; **2.** Teorema bisectoarei şi reciproca teoremei lui Menelaos. **3.** Se aplică Menelaos pentru triunghiul BMP şi transversala $\overline{AQR}$ şi pentru triunghiul ABR şi transversala $\overline{PQM}$, după care utilizăm reciproca lui Meneloas pentru triunghiul ARC şi punctele B, Q, N. **4.** Dacă $AB < AC$, atunci $B \in (AP)$, $N \in (AC)$. **5.** Fie MNP triunghiul determinat de paralele duse prin vârfurile triunghiului ABC la laturile sale. Aplicaţi Menelaos pentru MNP şi d şi apoi, din reciproca lui Menelaos pentru triunghiul MNP şi A_1, B_1, C_1 deduceţi coliniaritatea. **6.** Aplicaţi teorema lui Menelaos în ABA' pentru $\overline{OGM}$ şi în $AA'C$ pentru $\overline{GPM}$; **7.** Aplicaţi Menelaos pentru $(ABC, \overline{POM})$, $(ADB, \overline{PNO})$, unde $\{P\} = AB \cap MN$; **8.** Caz particular al problemei 7. Punctul fix este punctul de inetrsecţie al diagonalelor; **9.** $AC \cap d = \{R\}$; se aplică Menelaos pentru $(ABC, \overline{MNR})$, $(ADC, \overline{RPQ})$ şi se face produsul relaţiilor. **10.** $\{N'\} = EP \cap AC$. Patrulaterul $NEMN'$ paralelogram, iar în triunghiul $EN'G$, $DP \| GN'$, D mijlocul lui $[GE]$.

Probleme de concurenţă. pag. 277 **1.** Teorema bisectoarei şi reciproca teoremei lui Ceva; **2.** Tangentele dintr-un punct exterior la cerc sunt egale; reciproca teoremei lui Ceva; **3.** Se obţine din b) pentru triunghiul IAB; **4.** Reciproca teoremei lui Ceva, utilizând triunghiuri asemenea şi teorema catetei; **5.** Puterea punctelor A, B, C faţă de cerc şi reciproca teoremei lui Ceva; **6.** Reciproca teoremei lui Ceva pentru AOO'.

Teste de evaluare pag. 278

Testul 1. **1.** $\vec{r}_C = \frac{7}{9}\vec{r}_A + \frac{2}{9}\vec{r}_B$, $\vec{r}_D = \frac{4}{9}\vec{r}_A + \frac{5}{9}\vec{r}_B$; **2.** $\overrightarrow{CP} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$; **3.** Mijlocul lui $[AB]$, $\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B), \ldots$; G centrul de greutate al triunghiului MPR are vectorul de poziţie $\vec{r}_G = \frac{1}{3}(\vec{r}_M + \vec{r}_P + \vec{r}_R)$; **4.** Menelaos pentru $(ABM, \overline{C'PC})$, $(ACN, \overline{B'QB})$; **5.** Reciproca teoremei lui Ceva. **Testul 2.** **1.** $\vec{r}_I =$

$\frac{5}{19}\vec{r}_A + \frac{6}{19}\vec{r}_B + \frac{8}{19}\vec{r}_C$; 2. $\overrightarrow{B_1C_1} = k\overrightarrow{B_1D_1}$. 3. Reciproca teoremei lui Ceva; 4. Teorema lui Menelaos pentru $(MAB, \overline{QSP}) \Rightarrow S$ milocul lui $[PQ]$; 5. În $\triangle ABD$, fie $\{G\} = AO \cap DN$. Atunci $G = M$.

3. Elemente de trigonometrie

Rezolvarea triunghiului dreptunghic. **pag. 285** 3. 1) $\frac{7\pi}{36}$; 2) $\frac{5\pi}{12}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $\frac{7\pi}{6}$; 6) $\frac{4\pi}{3}$; 7) $\frac{65\pi}{36}$; 8) $\frac{11\pi}{6}$; 4. 1) 15°; 2) 12°; 3) 120°; 4) 210°; 5) 240°; 6) 315°; 7) 330°; 5. 1) $C = \frac{\pi}{6}$; $c = 15$, $b = 15\sqrt{3}$; 2) $b = 5$, $\sin B = \frac{5}{13}$, $C = \frac{\pi}{2} - B$; 3) $B = \frac{\pi}{3}$, $a = 1$, $c = \frac{1}{2}$; 4) $a = 13$, $\sin B = \frac{12}{15}$, $C = \frac{\pi}{2} - B$; 5) $C = \frac{\pi}{6}$, $B = \frac{\pi}{3}$, $a = 3\sqrt{3}$; 7. Dacă un punct de pe exteriorul roţii mari face unghiul θ_1 atunci arcul descris este $10\theta_1$; analog pentru roata mică $10\theta_2 \Rightarrow 10\theta_1 = 6\theta_2$; $10 \cdot 2\pi = 6\theta_2 \Leftrightarrow \theta_2 = \frac{10\pi}{3}$ sau $\theta_1 = 600°$. 8. $\cos 30° = \frac{x}{1,5} \Rightarrow x \approx 1,3$m.

Funcţiile sinus şi cosinus. **pag. 294** 1. $\cos\alpha < 0$ şi deci $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2. $\sin\alpha < 0$ şi $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$; 3. $\sin(-1830°) = -\sin 1830° = -\sin(5 \cdot 360° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$; $\cos(-\frac{81\pi}{4}) = \cos\frac{81\pi}{4} = \cos(20\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(10 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4. 1) $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -1 \le f(x) \le 5$; 3) $0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow 5 \le f(x) \le 6$; 4) $f(x) = 4(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 4 + \cos^2 x$; $4 \le f(x) \le 5$; 6. Dacă $a = \sin^2 x$, $b = \cos^2 x$, atunci $a + b = 1$. Fie $a = \frac{1}{2} - \alpha$, $b = \frac{1}{2} + \alpha$, $\alpha > 0$. Atunci $a^2 + b^2 \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 2\alpha^2 \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 > 0$, evident. Dar $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 \ge \frac{1}{4} - 2\frac{1}{16} = \frac{1}{8}$, unde $ab \le (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{1}{4}$ şi $(ab)^2 \le \frac{1}{16}$. Altfel $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 = [(a+b)^2 - 2ab]^2 - 2(ab)^2 = (1-2ab)^2 - 2(ab)^2 = 2(ab)^2 - 4ab + 1$, $ab \in [0, \frac{1}{4}]$, etc. 11. $S = \sin^2(90° - 1°) + \ldots = (1 - \cos^2 89°) + \ldots = 89 - S$. 12. $f(x + 4k) = f(x)$. 13. $x = y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\pi) < 0$; $x = \frac{3\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\pi) > 0$.

Funcţiile tangentă şi cotangentă. **pag. 299** 1. 1) Se exprimă $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$ în funcţie de $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ şi se utilizează $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. 6) În membrul stâng se grupează primul cu ultimul şi al doilea cu al treilea termen. Altfel se dezvoltă membrul drept; 7) În membrul drept se scrie $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$ conform definiţiei; 8) În membrul stâng exprimaţi $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{ctg}x$ din definiţie; 2. Din $\mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{5}\cos\alpha$ şi se obţine -12. Altfel se împart numărătorul şi numitorul prin $\cos\alpha$ şi rezultă fracţia $\frac{\mathrm{tg}\alpha + 2}{1 - 3\mathrm{tg}\alpha}$.

Relaţii între funcţii trigonometrice. **pag. 302** 1. $1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $2,3 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $4 \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $5,6 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$; 1) $\sin\alpha = 0$, $\sin\alpha = 3$; $\sin\alpha = 0$ dacă $\alpha \in \{0, \pi\} \subset [0, 2\pi)$; $\alpha \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $\sin\alpha = 3 \notin [-1, 1]$, ecuaţie imposibilă; 2) $\sin\alpha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi)$; $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$; $\alpha \in \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$; 4) $\cos\alpha = -1$, $\alpha = \pi \in [0, 2\pi)$; $\alpha = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\} \subset [0, 2\pi)$; $\alpha \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; 3. 1) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$, $\mathrm{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$; 4) $\frac{125}{78}$; 5) 2;2;0; 6) $-\frac{3}{2}$; 5. 1) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\mathrm{tg}\alpha = -2\sqrt{2}$, $\mathrm{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$;

Formule pentru suma şi diferenţa a două unghiuri. **pag. 309** 1. $\cos 75° = \cos(45° + 30°)$; $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$, $\sin 105° = \sin(90° + 15°) = \cos 15° = \cos(45° - 30°)$; $\sin 135° = \sin(90° + 45°) = \cos 45°$, $\sin 210° = \sin(180° + 30°) = -\sin 30°$;

2. 1) $\sin(49° + 11°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin(57° - 12°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3. 1) $\cos a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos b = \frac{2\sqrt{6}}{5}$;

2) $\cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; 3) $\sin a = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\cos b = -\frac{4}{5}$; 4) $\sin a = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\sin b = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$; 4. 1) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha$; 2) 1; 3) $\cos^2 b - \sin^2 b$; 4) $2\cos x \cos y$, $-2\sin x \sin y$; 5) $2\sin x \cos y$, $2\sin y \cos x$; 6) 0. 7. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{23}$; 9. $\cos(a-b) = \frac{1}{2}$, $a, b \in$ I sau $a, b \in$ IV; 10. Se adună şi se scad relaţiile din ipoteză şi rezultă $\cos\alpha\cos\beta = \frac{4}{15}$, $\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{15}$. De aici $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{4}$; 11. $\operatorname{tg}\alpha = x$, $\operatorname{tg}\beta = y$ şi rezultă sistemul $x + y = 2$, $xy = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$; 12. Se dezvoltă $\operatorname{tg}[(\alpha+\beta)+\gamma]$ şi apoi $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; 14. Se utilizează relaţia $2\sin x\cos x = \sin 2x$ şi se restrânge produsul din stânga inegalităţii; 15. Se scrie $\operatorname{tg}B = \frac{\sin B}{\cos B}$ în egalitate, care se reduce la $\sin(B+C) = 1$; se scrie $A = \pi - (B+C)$ şi deci $\sin A = \sin(B+C)$, iar relaţia se reduce la $\sin(B-C) = 0$.

Funcţiile trigonometrice ale argumentului dublu şi triplu pag. 314 4. 1) Se înmulţeşte egalitatea prin $\cos 10°$, se scriu $\sin 50° = \cos 40°$, $\sin 70° = \cos 20°$ şi se utilizează relaţia $2\sin x\cos x = \sin 2x$; 2) Se înmulţeşte egalitatea prin $\sin 20°$ etc. 5. Se aduce funcţia la forma $f(x) = 2\cos^2 x + 5\cos x - 1$ şi se ţine seama că $-1 \le \cos x \le 1$; $-4 \le f(x) \le 6$; 6. 1) $f(\cos\alpha) = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1$; $m \le -\frac{9}{8}$, $M \ge 2$; 2) $m \le 1$, $M \ge 2$. 7. 0. 10. 2) $\cos x < \frac{1}{2}\left(\cos x + \cos\frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow \cos x < \cos\frac{x}{3}$ deoarece $0 < \frac{x}{3} < x < \pi$ şi funcţia cosinus este strict descrescătoare pe $[0, \pi]$.

Substituţia universală. pag. 317 1. $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{4}{3}$; 2. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$; 3. $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{12}{5}$, $\operatorname{tg}4\alpha = -\frac{120}{119}$; 4. $0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\alpha < \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$; 5. $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin 4\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos 4\alpha = \frac{7}{25}$; 6. 1) $\frac{5}{101}$; 2) $-\frac{4}{225}$; 7. $\sin x = -\frac{3}{5}$, $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\sin y = \frac{8}{17}$, $\cos y = -\frac{15}{17}$; 9. $g(t) = \frac{4t}{1+t^2} - \frac{5(1-t^2)}{1+t^2}$, $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; $g(t) = y \Leftrightarrow (5-y)t^2 + 4t - 5 - y = 0$, ecuaţie care are soluţii reale dacă $\Delta_t \ge 0 \Leftrightarrow y \in [-\sqrt{29}, \sqrt{29}]$; 11. Inducţie matematică.

Transformarea sumelor în produse pag. 319 2. 1) $(\cos 0 + \cos 2\alpha) + \cos\alpha = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha =$ $= 2\cos\alpha\left(\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\right) = 4\cos\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$. 6. 1) După transformarea sumelor din membrul stâng în produse rezultă $\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \sin C$ sau $\cos C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$; 2) $A = \pi - (B+C)$ şi se transformă suma de sinusuri în produs, iar $\cos(C-B) = \cos B\cos C + \sin C\sin B$ şi egalitatea devine $\operatorname{tg}B = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}C + \operatorname{tg}B) \Leftrightarrow \cos(B+C) = 0 \Leftrightarrow B + C = \frac{\pi}{2}$; 3) $\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$; 9. $\sin\frac{x+y}{2} = t$ şi se obţine trinom de gradul doi în t.

4. Aplicaţii ale produsului scalar a doi vectori şi ale trigonometriei în geometrie

Produsul scalar a doi vectori pag. 332 1. a) $3\sqrt{2}$; b) $10\sqrt{3}$; c) 0; d) 6; e) 24; f) $3\sqrt{3}$; 2. $|\overline{a}|^2 = \overline{a}\cdot\overline{a}$; 3. $a_b = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $b_a = 2\sqrt{2}$; 4. $|\overline{a}+\overline{b}|^2 = 13 + 6\sqrt{3} \Rightarrow |\overline{a}+\overline{b}| = \sqrt{13+6\sqrt{3}}$; 5. $\overline{ED}\cdot\overline{EC} = 0$; 6. $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$; 7. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ se ridică la pătrat; 8. $\sqrt{25 - 12\sqrt{2}}$; 9. $\frac{\pi}{6}$. 10. a) obtuzunghic în C; b) Dreptunghic în C; e) asuţitunghic; 11. Teorema cosinusului; 12. Teorema medianei; 13. Teorema cosinusului; 14. $\overrightarrow{r}_M = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r}_B + \overrightarrow{r}_C)$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{r}_C - \overrightarrow{r}_B$; 15. $GA = \frac{2}{3}m_a$ plus teorema medianei; 17. Relaţia lui Stewart în AOA', A' mijlocul lui $[BC]$; 19. Din relaţia lui Stewart se exprimă AM^2; 20. Teorema medianei pentru LM, LN, LP, LQ.

Teste de evaluare pag. 352

Testul 1. 1. $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$. 2. $AG^2 + GC^2 = BC^2$. 3. 1) Se exprimă cosinusurile din teorema cosinusului; 2) $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. 4. $l_a = l_b \Leftrightarrow a = b$. 6. $a = 2R\sin A$, ... 7. $\operatorname{tg}B = \frac{\sin B}{\cos B}$. 8. $h_a = \frac{2pr}{a} =$

$= r\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$. **Testul 2.** 1. Teorema cosinusului pentru BC şi CD. 2. Teorema cosinusului pentru toate segmentele (în funcţie de $\cos A$). 3. Se scrie $\cos A$ în funcţie da laturi. 5. Teorema medianei în triunghiurile ADC, ABC, ABD, BDC şi AFC, BDE. 6. $a = 2R\sin A$, ... şi se rescrie ipoteza. 7. Se transformă sumele în produse. 8. $OA_1 = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$, ... 9. $m_a \le R + OA_1$, A_1 ete mijlocul lui $[BC]$; $\sum \frac{1}{h_a} = \frac{1}{r}$; $\sum \frac{OA_1}{h_a} = 1$. **Testul 3** 1. $(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}) = 0$. 2. Utilizaţi relaţia lui Leibniz. 3. $(BC-AB)\overrightarrow{GA}+(AC-AB)\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \Rightarrow BC = AB$ şi $AC = AB$. 4. $\overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{r}_B = \overrightarrow{r}_C + \overrightarrow{r}_D$ şi se calculează $\overrightarrow{r}_D{}^2$. 6. $a = 2R\sin A$. 7. $a = 2R\sin A$, ... 8. $a+b \ge 2\sqrt{ab}$. 9. Se ia înălţimea $[CC']$ şi $\operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B \ge \frac{AB}{CC'} \ge \frac{AB}{CC_1}$, $[CC_1]$ este mediană.

Teste de recapitulare finală

pag. 355 **Testul 1.** 1. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $y = 0 \in \mathbb{Z}$; falsă; 2. $m \in (1,5)$; 3. a) $a = 2$, $b = 6$, $c = 18$ sau $a = 18$, $b = 6$, $c = 2$; b) b; 4. $x_1^2 = 4x_1 - 1 \Rightarrow x_1^3 = 4x_1^2 - x_1 = 4(4x_1 - 1) - x_1$; 5. a) $m \in \{0,1\}$; b) $m \in [-4,0]$; 6. 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{FE}$; 2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MD}) = \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$; 7. $\{A''\} = AA' \cap BC$. Se exprimă segmentele care apar în teorema lui Ceva, utilizând teorema sinusurilor, apoi $B'A = AB\cos A$, iar AC' din teorema bisectoarei; 9. Din ipoteză, $\sin x \cos x = \frac{1}{3}$ şi deci $\sin 2x = \frac{2}{3}$, $\cos 4x = \frac{1}{9}$; 10. $\mathrm{m}(\widehat{ADC}) = x$. Teorema sinusurilor aplicată în triunghiurile ADC, BCD implică $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin(x-B)}{\sin(x+A)}$. Se fac dezvoltările şi apoi se împarte prin $\sin A \sin B \sin x$ şi rezultă $\operatorname{ctg}x = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}B - \operatorname{ctg}A)$; 11. $\frac{2}{3}\sqrt{3S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; 12. $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a}-\overline{b}$ sunt diagonalele paralelogramului de laturi $\overline{a}$, $\overline{b}$; $|\overline{a}+\overline{b}| = |\overline{a}-\overline{b}| \Rightarrow$ dreptunghi; 13. $\overline{AA_1} = \overline{m}_1$, $\overline{BB_1} = \overline{m}_2$, $m_1 = \overline{c} + \frac{1}{2}\overline{a}$, $\overline{m}_2 = \overline{a} + \frac{\overline{b}}{2}$, $\overline{BC} = \overline{a}$, $\overline{CA} = \overline{b}$, $\overline{AB} = \overline{c}$ şi după calcule $\overline{m}_1\overline{m}_2 = \frac{1}{8}(a^2+b^2-5c^2) = 0$; 14. $h_a, h_b, h_c \in \{1,2,3\}$. Arătaţi că înălţimile nu pot fi distincte utilizând $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$; 15. S_i, $i = \overline{1,7}$ ariile celor şapte figuri determinate de drepte şi S aria triunghiului; $S_3+(S_2+S_7) = \frac{1}{2}S = S_1+S_6+(S_2+S_7) \Rightarrow S_3 = S_1+S_6$; $\frac{1}{2}S = S_1+S_2+S_3+S_4 \Rightarrow \frac{1}{2}S = 2S_1+S_2+S_4+S_6 \ge 2S_1$.

Testul 2. 1. $x,(y) = x + \frac{y}{9}$, $x,y(z) = x + \frac{10y+z-y}{90}$; 2. a) $(-1,5)$; b) $f_m(2) = 5 \Rightarrow m = -2$; 4. $m = 2$; 5. $-\frac{b}{2a} = -\frac{m}{2} \le 2$, $3m+4 \le 2+2m$; $m \in [-4,-2]$; 6. Se consideră mijloacele coardelor; 7. Teorema bisectoarei în BMC, CMA, AMB plus reciproca teoremei lui Ceva; 8. $\frac{\sin 20^0}{\cos 20^0} + 4\sin 20^0 = \frac{\sin 20^0 + 2\sin 40^0}{\cos 20^0} = \frac{(\sin 20^0 + \sin 40^0) + \sin 40^0}{\cos 20^0}$; 10. $\mathrm{m}(\widehat{BAM}) = \mathrm{m}(\widehat{CAN}) = \alpha$, $\mathrm{m}(\widehat{MAN}) = \beta$. Aplicaţi teorema sinusurilor în perechile de triunghiuri (AMB, ACM) şi (ABN, ACN); 11. $\frac{1}{3}\sqrt{S\sin 2\alpha}$; 12. $\overline{c} = \alpha(\overline{a}+\overline{b})$, $\overline{b}+\overline{c} = \beta\overline{a} \Rightarrow \alpha = \beta = 1$, adică $\overline{c} = -\overline{a}-\overline{b}$; 13. $\overline{BA}\cdot\overline{BD} \Rightarrow 30^0$; 14. Exprimaţi $\frac{S_1}{S}$, $\frac{S_2}{S}$ şi apoi folosiţi inegalitatea $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \ge \frac{x+y}{2}$; 15. Duceţi liniile mijlocii în pătrat. **Testul 3.** 1. Prin reducere la absurd; 2. $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}$; 3. d); 4. b); 5. a); 6. 1) $[IJ]$ mediană în $\triangle AJC$; 2) paralelogram; 7. Prin reducere la absurd; 9. $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$; $\sin(B+C) = 2\sin B\cos C \Leftrightarrow \sin(B-C) = 0$; 10. Aplicaţi teorema sinusurilor în triunghiurile OAM, OAN; 11. $\overline{AB} = \frac{9\overline{a}}{8} - \frac{3}{8}\overline{b}$, $\overline{AD} = \frac{9}{8}\overline{b} - \frac{3}{8}\overline{a}$, $\overline{MN} = \overline{b}-\overline{a}$, $\overline{BD} = \frac{3}{2}\overline{b} - \frac{3}{2}\overline{a}$; 12. $\overline{AM} = \frac{7}{8}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{CN} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{8}{7}\overline{AM} + \frac{4}{7}\overline{CN} \Rightarrow \overline{AB}^2 = 112$; 13. Se aplică problema 14 de la testul 2; 14. $c > |b-a| \Leftrightarrow \frac{2S}{h_c} > \left|\frac{2S}{h_b} - \frac{2S}{h_a}\right| \Rightarrow h_c < 30$; 15. $4(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})$.

CUPRINS

ALGEBRĂ 3

1. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI TEORIA MULŢIMILOR 5
   - 1.1. Noţiunea de mulţime 5
   - 1.2. Mulţimea numerelor reale 8
   - 1.3. Elemente de calculul propoziţiilor 44
   - 1.4. Operaţii logice elementare 48
   - 1.5. Mulţimi finite, infinite, mărginite. Probleme de numărare 56
   - 1.6. Tipuri de raţionamente logice 61
   - Probleme propuse 70

2. FUNCŢII 82
   - 2.1. Cuplu. Produs cartezian. Reper cartezian 82
   - 2.2. Noţiunea de funcţie 86
   - 2.3. Funcţii definite pe mulţimi de numere reale incluse în $\mathbb{N}$ 95
   - 2.4. Funcţie numerică. Operaţii cu funcţii numerice 115
   - 2.5. Reprezentarea grafică a unei funcţii numerice. Graficul unei funţii 117
   - 2.6. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ 146
   - Probleme propuse 173

3. FUNCŢIA DE GRADUL AL DOILEA 185
   - Probleme propuse 231

GEOMETRIE ŞI TRIGONOMETRIE 235

1. VECTORI ÎN PLAN 237
   - 1.1. Vectori în plan 237
   - 1.2. Operaţii elementare cu vectori liberi 241
   - Probleme propuse 258

2. COLINIARITATE, CONCURENŢĂ, PARALELISM. CALCUL VECTORIAL ÎN GEOMETRIA PLANĂ 261
   - Probleme propuse 275

3. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE 279
   - 3.1. Elemente de trigonometrie plană 281
   - 3.2. Cercul trigonometric 286
   - 3.3. Funcţii trigonometrice directe 288
   - Probleme propuse 323

4. APLICAŢII ALE PRODUSULUI SCALAR A DOI VECTORI ŞI ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE 325
   - 4.1. Produsul scalar a doi vectori 325
   - 3.2. Aplicaţii ale trigonometriei în geometrie 337
   - Probleme propuse 352

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI 359